

§ 12. Формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

 **2.270.** Прочитайте выражения:

$$2ab; a^2; b^2; (a - b)^2.$$

2.271. Запишите выражение:

- а) удвоенное произведение выражений m и b ;
б) квадрат суммы выражений x и y .

2.272. Представьте в виде квадрата выражение:

- а) 16; б) $36x^2$; в) $25x^2y^4$.

2.273. Запишите выражение в виде произведения:

- а) m^2 ; б) $-x^2$; в) $(a + b)^2$; г) $(c - 2)^2$.

2.274. Преобразуйте выражение в одночлен стандартного вида:

- а) $2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2}ab$; б) $2 \cdot 5a \cdot 7b^2$.

 Рассмотрим произведение двух двучленов $(a + b)(a + b)$, которое можно записать $(a + b)^2$ и прочитать «квадрат суммы двух выражений a и b ».

Выполним умножение двучленов $(a + b)(a + b)$ по правилу умножения многочленов:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат суммы двух выражений (a и b) равен квадрату первого выражения (a^2) плюс удвоенное произведение первого и второго выражений ($2ab$) плюс квадрат второго выражения (b^2)

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Рассмотрим квадрат разности выражений a и b :

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Квадрат разности двух выражений (a и b) равен квадрату первого выражения (a^2) минус удвоенное произведение первого и второго выражений ($2ab$) плюс квадрат второго выражения (b^2)

Таким образом, получили формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений. С помощью этих формул умножение равных двучленов можно выполнить сокращенно.

Их называют **формулами сокращенного умножения**.

⊗ Чтобы представить квадрат суммы двух выражений в виде трехчлена, нужно:

<p>① Назвать первое и второе выражения.</p> <p>② Записать квадрат первого выражения и знак «плюс».</p> <p>③ Записать удвоенное произведение первого и второго выражений и знак «плюс».</p> <p>④ Записать квадрат второго выражения.</p>	<p>Представьте в виде трехчлена выражение $(3a + 5b)^2$.</p> <p>① $3a$ и $5b$.</p> <p>② $9a^2 +$</p> <p>③ $9a^2 + 30ab +$</p> <p>④ $9a^2 + 30ab + 25b^2$</p> <p>$(3a + 5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$.</p>
---	---

Например:

а) $(m + 4)^2 = m^2 + 2 \cdot m \cdot 4 + 4^2 = m^2 + 8m + 16;$

б) $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1.$

$$(2k + 7n)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 7n + (7n)^2 = 4k^2 + 28kn + 49n^2$$

⊗ Чтобы представить квадрат разности двух выражений в виде трехчлена, нужно:

<p>① Назвать первое и второе выражения.</p> <p>② Записать квадрат первого выражения и знак «минус».</p> <p>③ Записать удвоенное произведение первого и второго выражений и знак «плюс».</p> <p>④ Записать квадрат второго выражения.</p>	<p>Представьте в виде трехчлена выражение $(x - 2y)^2$.</p> <p>① x и $2y$.</p> <p>② $x^2 -$</p> <p>③ $x^2 - 4xy +$</p> <p>④ $x^2 - 4xy + 4y^2$</p> <p>$(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$.</p>
--	---

Например:

$$\begin{aligned} \text{а) } (3n - 1)^2 &= \\ &= (3n)^2 - 2 \cdot 3n \cdot 1 + 1^2 = \\ &= 9n^2 - 6n + 1; \end{aligned}$$

$$\text{б) } (y^3 - 2)^2 = y^6 - 4y^3 + 4.$$

$$\begin{aligned} (4a - 3b)^2 &= \\ &= (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2 = \\ &= 16a^2 - 24ab + 9b^2 \end{aligned}$$

Формулы сокращенного умножения применяются как слева направо, так и справа налево:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Если члены трехчлена представляют собой квадрат одного выражения, квадрат второго выражения, удвоенное произведение этих выражений, то этот трехчлен можно представить в виде квадрата двучлена.

⊗ Чтобы записать трехчлен в виде квадрата двучлена, нужно:

<p>① Назвать два члена из трех, которые являются квадратами выражений.</p> <p>② Определить выражения, которые были возведены в квадрат.</p> <p>③ Назвать удвоенное произведение этих выражений.</p>	<p>Представьте в виде квадрата двучлена трехчлен $x^2 - 10xy + 25y^2$.</p> <p>① x^2 и $25y^2$.</p> <p>② x и $5y$.</p> <p>③ $2 \cdot x \cdot 5y = 10xy$.</p>
---	---

④ Если удвоенное произведение совпадает с третьим членом трехчлена (со знаком «плюс» или «минус»), то записать квадрат суммы (квадрат разности) этих выражений.

$$\textcircled{4} x^2 - 10xy + 25y^2 = (x - 5y)^2.$$

Представим в виде квадрата двучлена трехчлен $36x^2 + 12xy + y^2$:

① $36x^2$ и y^2 — квадраты выражений;

② $6x$ и y — выражения, которые были возведены в квадрат;

③ $12xy$ — удвоенное произведение этих выражений;

④ $12xy$ совпадает со вторым членом трехчлена (со знаком «плюс»), значит,

$$36x^2 + 12xy + y^2 = (6x + y)^2.$$

Представим в виде квадрата двучлена трехчлен $25m^2 - 20mn + 4n^2$:

① $25m^2$ и $4n^2$ — квадраты выражений;

② $5m$ и $2n$ — выражения, которые были возведены в квадрат;

③ $20mn$ — удвоенное произведение этих выражений;

④ $20mn$ совпадает со вторым членом трехчлена (со знаком «минус»), значит,

$$25m^2 - 20mn + 4n^2 = (5m - 2n)^2.$$



Тождественно равны выражения:

а) $(a + b)^2$ и $(-a - b)^2$;

б) $(a - b)^2$ и $(b - a)^2$.

Покажем это:

а) $(-a - b)^2 = (-1 \cdot (a + b))^2 = (-1)^2 (a + b)^2 = (a + b)^2$;

б) $(a - b)^2 = (-1 \cdot (-a + b))^2 = (-1)^2 (b - a)^2 = (b - a)^2$.



Формулы квадрата суммы и квадрата разности являются тождествами.

 Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений	
<p>1. Представьте в виде трехчлена:</p> <p>а) $(x + 3)^2$; б) $(7n - 1)^2$; в) $(-5a - 2b)^2$; г) $(-c + 1)^2$.</p>	<p>а) $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 =$ $= x^2 + 6x + 9$; б) $(7n - 1)^2 = (7n)^2 - 2 \cdot 7n \cdot 1 +$ $+ 1^2 = 49n^2 - 14n + 1$; в) $(-5a - 2b)^2 = (5a + 2b)^2 =$ $= 25a^2 + 20ab + 4b^2$; г) $(-c + 1)^2 = (c - 1)^2 =$ $= c^2 - 2c + 1$.</p>
<p>2. Используя формулы сокращенного умножения, вычислите:</p> <p>а) 1001^2; б) $7,8^2$.</p>	<p>а) Запишем число 1001 как сумму чисел 1000 и 1 и воспользуемся формулой квадрата суммы:</p> $1001^2 = (1000 + 1)^2 =$ $= 1000^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1^2 =$ $= 1\,000\,000 + 2000 + 1 =$ $= 1\,002\,001$; б) $7,8^2 = (8 - 0,2)^2 =$ $= 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 0,2 + 0,2^2 =$ $= 64 - 3,2 + 0,04 = 60,84$.
<p>3. Используя алгоритм, представьте в виде квадрата двучлена трехчлен:</p> <p>а) $x^2 - 8x + 16$; б) $a^4 + 6a^2 + 9$.</p>	<p>а) ① x^2 и 16 — квадраты выражений; ② x и 4 — выражения, которые возведены в квадрат; ③ $8x$ — удвоенное произведение этих выражений; ④ $8x$ совпадает со вторым членом трехчлена (со знаком «минус»), значит, $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$; б) $a^4 + 6a^2 + 9 = (a^2)^2 +$ $+ 2 \cdot a^2 \cdot 3 + 3^2 = (a^2 + 3)^2$.</p>

4. Используя алгоритм, представьте, если возможно, в виде квадрата двучлена трехчлен

$$36m^2 - 12mn + 4n^2.$$

① $36m^2$ и $4n^2$ — квадраты выражений;

② $6m$ и $2n$ — выражения, которые были возведены в квадрат;

③ $24mn$ — удвоенное произведение этих выражений;

④ $24mn$ не совпадает со вторым членом $12mn$, значит, трехчлен $36m^2 - 12mn + 4n^2$ невозможно представить в виде квадрата двучлена.

- ?** 1. Верно ли, что формула квадрата суммы (разности) двух выражений используется для сокращенного умножения двучленов?
2. Если трехчлен содержит сумму квадратов двух выражений, то каким должен быть третий член, чтобы получить формулу квадрата двучлена?



2.275. Примените формулу квадрата суммы и представьте выражение в виде многочлена стандартного вида, используя алгоритм:

- а) $(x + y)^2$; б) $(a + 3)^2$; в) $(8 + c)^2$;
 г) $(b + 1)^2$; д) $(3a + 1)^2$; е) $(7 + 2m)^2$;
 ж) $(5k + n)^2$; з) $(3b + 4c)^2$; и) $(8c + 3d)^2$.

2.276. Примените алгоритм и представьте выражение в виде трехчлена:

- а) $(m - n)^2$; б) $(x - 2)^2$; в) $(6 - b)^2$;
 г) $(a - 1)^2$; д) $(5k - 1)^2$; е) $(8 - 3a)^2$;
 ж) $(9z - 5)^2$; з) $(2x - 3y)^2$; и) $(5p - 2k)^2$.

2.277. Представьте в виде трехчлена, используя формулы сокращенного умножения:

- а) $(x + 0,4)^2$; б) $(0,6a - 1)^2$;
 в) $\left(\frac{1}{3}m + 3\right)^2$; г) $(5n - 0,1k)^2$.

2.278. Представьте в виде трехчлена квадрат двучлена:

- а) $(a^2 - b^2)^2$; б) $(n^2 + m^2)^2$;
в) $(x^3 - y^2)^2$; г) $(p^4 + q^3)^2$;
д) $(10n^4 - 1)^2$; е) $(3 - 2a^2)^2$;
ж) $(2k - c^2)^2$; з) $\left(\frac{1}{6}x^2 + 3y^4\right)^2$.

2.279. Представьте в виде трехчлена, используя формулы сокращенного умножения:

- а) $(-a + 1)^2$; б) $(-2b - 5)^2$;
в) $(-3m + 4n)^2$; г) $(-x^2 - 3y)^2$.

2.280. Найдите ошибки в преобразованиях:

- а) $(2x - 3)^2 = 2x^2 - 12x + 9$;
б) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 6x + 9$;
в) $(2x - 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

Выполните преобразование верно.

2.281. Примените формулу квадрата суммы и вычислите:

- а) 31^2 ; б) 501^2 ; в) $7,2^2$; г) $\left(8\frac{1}{9}\right)^2$.

2.282. Примените формулу квадрата разности и вычислите:

- а) 89^2 ; б) 499^2 ; в) $7,8^2$; г) $3,99^2$.

2.283. Упростите выражение:

- а) $2(3a + 1)^2$; б) $\frac{1}{2}(-m - 8n)^2$;
в) $-(2x - 5y)^2$; г) $-5(-0,2b + 4c)^2$.

2.284. Представьте в виде многочлена, выполнив тождественные преобразования:

- а) $3(x - 4)^2 - 3x^2$; б) $7(-a + b)^2 + 14ab$;
в) $8xy + 4(x - y)^2$; г) $9x^4 - 3(x^2 + y)^2$.

2.285. Упростите выражение:

- а) $(y - 9)^2 - 3y(y + 1)$;
 б) $4c(c - 2) - 3(c - 4)^2$;
 в) $(-a - 1)^2 - (a - 1)(a + 3)$;
 г) $(m + 3)(m - 11) - (m + 6)^2$.

2.286. Упростите выражение и найдите его значение:

- а) $(3a + b)^2 + (3a - b)^2$ при $a = 0,1$; $b = 7$;
 б) $(5a^2 + b)^2 - (5a^2 - b)^2$ при $a = 0,5$; $b = 24$.

2.287. Решите уравнение:

- а) $16x^2 - (4x - 5)^2 = 15$;
 б) $x(x + 3) - (x - 1)^2 = 4$;
 в) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = 48$.

2.288. Докажите, что значение выражения $(5a - 1)^2 - (4a + 1)^2 - 9a(a - 2) + 4$ не зависит от значения переменной.

2.289. Найдите, при каком значении переменной квадрат двучлена $x + 5$ больше квадрата двучлена $x - 1$ на 126.

2.290. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| а) $a^2 + 6a + 9$; | б) $x^2 - 4xy + 4y^2$; |
| в) $25m^2 + 10m + 1$; | г) $4n^2 - 12nk + 9k^2$; |
| д) $y^2 + 2y + 1$; | е) $1 - 2b + b^2$; |
| ж) $a^4 + 16a^2 + 64$; | з) $9c^4 - 30c^2b + 25b^2$. |

2.291. Вместо знаков $*$ подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:

- а) $* + 2mn + m^2 = (n + *)^2$;
 б) $4x^2 - 4xy + * = (* - *)^2$;
 в) $* + 12ab + 9b^2 = (* + 3b)^2$.

2.292. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $x^2 - 2x + 1$ при $x = 10$; 0,1; -89;

б) $25m^2 + n^2 + 10mn$ при $m = 0,2$, $n = 49$.

2.293. Прибавьте к двучлену такой одночлен, чтобы полученное выражение можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $y^2 + 2y$; б) $m^2 - 6mn$; в) $49x^2 + 1$.

2.294. Найдите значение выражения:

а) $101^2 - 2 \cdot 101 \cdot 91 + 91^2$; б) $27^2 + 146 \cdot 27 + 73^2$.

2.295. Представьте трехчлен двумя способами в виде квадрата двучлена:

а) $100a^2 + 1 - 20a$; б) $m^6 - 6m^3n^2 + 9n^4$;

в) $-4x^2y + x^4 + 4y^2$; г) $36k^8 + c^2 - 12k^4c$.

2.296. Упростите выражение:

а) $(-x - 8)^2 - 2(x + 8)(x - 3) + (-x + 3)^2$;

б) $3(3a - 1)^2 - 2(-4a - 2)^2 + 5$.

2.297. Упростите выражение

$$(-7x + 2)^2 - (5x - 3)(5x + 1) - (x + 7)(3 - x)$$

и найдите его значение при $x = 0,2$.

2.298*. Какое выражение надо прибавить к квадрату разности двух чисел, чтобы получить квадрат суммы тех же чисел?

2.299*. Выделите квадрат двучлена в выражении:

а) $x^2 + 6x + 10$; б) $y^2 - 16y + 70$.

2.300*. Докажите, что выражение $81a^2 - 18a + 4$ принимает только положительные значения.



2.301. Используя формулы квадрата суммы и квадрата разности, представьте выражение в виде многочлена стандартного вида:

- а) $(c + d)^2$; б) $(b - 5)^2$; в) $(3 + k)^2$;
 г) $(n - 1)^2$; д) $(4x + 1)^2$; е) $(2 - 7y)^2$;
 ж) $(6a + b)^2$; з) $(5p - 2q)^2$; и) $(8a + 3b)^2$.

2.302. Представьте в виде трехчлена:

- а) $(a - 0,2)^2$; б) $(0,3x + 1)^2$;
 в) $(\frac{1}{5}b - 5)^2$; г) $(0,1n + 4m)^2$.

2.303. Представьте в виде трехчлена квадрат двучлена:

- а) $(n^3 + m)^2$; б) $(a^4 - b^3)^2$;
 в) $(1 + 10x^2)^2$; г) $(\frac{1}{4}b^2 - 2c^3)^2$.

2.304. Представьте в виде трехчлена:

- а) $(-b + 2)^2$; б) $(-3a - 1)^2$;
 в) $(-5x - 4y)^2$; г) $(-y^3 + 8z)^2$.

2.305. Примените формулу квадрата суммы или квадрата разности и вычислите:

- а) 61^2 ; б) 799^2 ; в) $9,2^2$; г) $5,98^2$.

2.306. Представьте в виде многочлена:

- а) $5(2 - a)^2 - 5a^2$; б) $3a(a - 2) - (-a + 3)^2$.

2.307. Упростите выражение $(2x - 3y)^2 - (2x + 3y)^2$ и найдите его значение при $x = \frac{7}{24}$, $y = 5$.

2.308. Решите уравнение $(-x - 5)^2 - x(x + 3) = 39$.

2.309. Докажите, что значение выражения $(3x - 1)^2 - 3(x - 1)^2 - 6(x^2 - 1) - 8$ не зависит от значения переменной.

2.310. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

- а) $x^2 - 10x + 25$; б) $n^2 + 2n + 1$;
в) $16a^2 + 8ab + b^2$; г) $m^4 - 18m^2 + 81$.

2.311. Найдите значение выражения $y^2 + 6y + 9$ при $y = 97$.

2.312. Прибавьте к двучлену такой одночлен, чтобы полученное выражение можно было представить в виде квадрата двучлена:

- а) $a^2 - 4a$; б) $25y^2 + 1$; в) $24c + 4$.

2.313. Найдите значение выражения
 $99^2 - 2 \cdot 99 \cdot 111 + 111^2$.

2.314. Представьте трехчлен двумя способами в виде квадрата двучлена:

- а) $9x^2 + 1 - 6x$; б) $-10ab^2 + a^2 + 25b^4$.

2.315*. Выделите квадрат двучлена в выражении $a^2 + 2a + 3$.

2.316*. Докажите, что выражение $4x^2 - 4x + 3$ принимает только положительные значения.



2.317. Из точек $K(-11)$; $M(0)$; $P(-11,2)$; $T(-13)$ выберите ту, которая расположена на координатной прямой левее точки $N(-12)$.

2.318. Вычислите: $(0,5 - 0,75) : (-2,75)$.

2.319. Одну и ту же книгу ученик прочитывает за 7 дней, а его младшая сестра — за 9 дней. Кто прочитает больше: ученик за 5 дней или его сестра за 6 дней?

2.320. Сравните значения выражений $a^{-1} - b^{-1}$ и $(a - b)^{-1}$ при $a = 0,6$, $b = 1,2$.

2.321. На счет положили 800 р. Через месяц на счету стало 816 р. На сколько процентов увеличилась сумма вклада?

2.322. В классе 28 учащихся. Из них 15 человек любят читать детективы, 17 человек — фантастику, а 3 человека не любят читать. Найдите, сколько учащихся любят одновременно детективы и фантастику, если читательские интересы всех учащихся известны.

§ 13. Формулы сокращенного умножения: произведение суммы и разности двух выражений



2.323. Запишите выражение:

а) разность выражений $4m$ и $7b$; б) разность квадратов выражений $3x$ и $2y$; в) произведение суммы выражений $5a$ и $4c$ и их разности.

2.324. Представьте в виде квадрата одночлена выражение: а) 36; б) b^4 ; в) $9x^2$; г) $0,01m^{12}$.



Рассмотрим произведение двучленов $(a + b)(a - b)$. Первый множитель — это сумма выражений a и b , второй множитель — их разность. Все выражение — произведение суммы и разности двух выражений. Выполним умножение по правилу умножения многочленов: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Получили формулу сокращенного умножения суммы и разности двух выражений.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Произведение суммы $(a + b)$ и разности $(a - b)$ двух выражений равно разности квадратов $(a^2 - b^2)$ этих выражений