

СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 21. Линейное уравнение с двумя переменными



4.1. Найдите значение выражения:

а) $(-1,5 + 4 - 2,5)(-6)$; б) $0,25 - \frac{1}{3}$.

4.2. Упростите выражение:

а) $7 - 3(6y - 4)$; б) $8a + (5 - a) - (9 + 11a)$.

4.3. Найдите значение выражения $-0,1x + 5$ при:

а) $x = 10$; б) $x = -0,1$; в) $x = 0$.



Различные задачи на определение значений величин приводят к уравнениям одного и того же вида.

Рассмотрим задачи. 1) Мука расфасована в пакеты по два и по три килограмма. Сколько пакетов каждого вида нужно взять, чтобы получить 20 кг муки?

Обозначим через x количество пакетов муки по два килограмма, а через y количество пакетов муки по три килограмма, тогда по условию задачи получим $2x + 3y = 20$.

2) Можно ли из монет в 2 к. и 5 к. сложить сумму в 13 к.?

Обозначим через x количество монет по 2 к., а через y количество монет по 5 к., тогда по условию задачи $2x + 5y = 13$.

В каждой из рассмотренных задач получили уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a , b и c — некоторые числа.

Определение

Уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a , b и c — некоторые числа, называется **линейным уравнением с двумя переменными**.

Будем рассматривать уравнения, в которых по крайней мере один из коэффициентов (a или b) не равен нулю.

Решение линейного уравнения с двумя переменными

Вернемся к задаче 1). Заметим, что по условию задачи подойдут значения переменных $x = 7$ и $y = 2$, или $x = 4$ и $y = 4$, или $x = 1$ и $y = 6$.

Убедимся в этом, подставляя эти пары значений в уравнение $2x + 3y = 20$. Полученные числовые равенства: $2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$, $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 = 20$ — являются верными. Каждая из пар чисел $(7; 2)$; $(4; 4)$; $(1; 6)$ является решением уравнения $2x + 3y = 20$.



В записи пары чисел важно, что на первом месте стоит значение первой переменной (x), а на втором — значение второй переменной (y). В таком случае говорят, что пара чисел $(x; y)$ **упорядоченная**.

Определение

Упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$ называется **решением уравнения $ax + by = c$** , если при подстановке этих чисел в уравнение получается верное числовое равенство, т. е. числовое равенство $ax_0 + by_0 = c$ верное.

$$ax + by = c$$

$$(x_0; y_0)$$

$$ax_0 + by_0 = c \text{ —}$$

$$\text{верно}$$

$$(x_0; y_0) \text{ —}$$

$$\text{решение}$$

$$\text{уравнения}$$

В задаче 2) составили уравнение $2x + 5y = 13$, которому по условию задачи подойдет только пара чисел $x = 4$, $y = 1$. Так как $2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 13$ — верное равенство, то пара чисел $(4; 1)$ является решением уравнения $2x + 5y = 13$.

Число решений уравнения $ax + by = c$

Число решений уравнения $ax + by = c$ зависит от условий задачи. В общем случае, если на x и y не накладывается никаких дополнительных условий, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

Например, подставляя произвольные значения переменной x в уравнение $2x + 3y = 20$, получаем линейные уравнения с переменной y , решая которые, находим значения y :

при $x = 1$

$$2 \cdot 1 + 3y = 20;$$

$$y = 6;$$

$(1; 6)$ — решение

уравнения;

при $x = 2,5$

$$2 \cdot 2,5 + 3y = 20;$$

$$y = 5;$$

$(2,5; 5)$ — решение

уравнения.

Таким же образом, подставляя произвольное значение x в уравнение $ax + by = c$ и решая полученное уравнение относительно y , будем получать пары чисел $(x; y)$ — решения уравнения.



Линейное уравнение с двумя переменными

1. Какие из уравнений:

а) $2x + 3y = 7$;

б) $x + 2y = 0$;

в) $x^2 - 6y = -4$;

г) $-x - y = 1,5$;

д) $x^2 - 6y^2 = -9$ — являются линейными уравнениями с двумя переменными?

Так как линейным уравнением называется уравнение вида $ax + by = c$, то уравнения а), б) и г) — линейные.

В уравнении а) $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$, в уравнении б) $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, в уравнении г) $a = -1$, $b = -1$, $c = 1,5$.

Решение линейного уравнения с двумя переменными

2. Верно ли, что пары чисел (1; 2), (2; 1) являются решениями уравнения $3x - 2y = 4$?

Подставим в уравнение $3x - 2y = 4$ вместо x значение 1, а вместо y — значение 2. Получим: $3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4$. Это равенство неверное, значит, пара чисел (1; 2) не является решением этого уравнения. Для второй пары чисел получим: $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$. Это равенство верное, значит, пара чисел (2; 1) является решением этого уравнения.

3. Найдите несколько решений уравнения $-x + 4y = 5$.

Выберем произвольное значение y , например $y = 3$, подставим это значение в уравнение $-x + 4y = 5$ и получим уравнение $-x + 4 \cdot 3 = 5$. Решим его и найдем значение $x = 7$. Значит, пара чисел (7; 3) — решение данного уравнения. Выберем еще одно значение y , например $y = 0$, подставим это значение в уравнение $-x + 4y = 5$ и получим уравнение $-x + 4 \cdot 0 = 5$. Решим его и найдем значение $x = -5$. Пара чисел (-5; 0) — решение данного уравнения. Если $y = 0,5$, то $x = -3$. Пара чисел (-3; 0,5) — решение данного уравнения.



1. Запишите три уравнения вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a , b и c — некоторые числа. Являются ли записанные уравнения линейными уравнениями с двумя переменными?

2. Пара чисел $(1; -1)$ — решение уравнения $2x - 3y = 5$.
 а) Существуют ли другие решения этого уравнения? б) Является ли пара чисел $(-1; 1)$ решением этого уравнения?



4.4. Какие из следующих уравнений являются линейными уравнениями с двумя переменными:

- а) $2x - 3y = 5$; б) $x^2 + 2y = 7$;
 в) $21y + 17x = -3$; г) $xy - 3x = 8$?

Для линейных уравнений с двумя переменными укажите a , b и c .

4.5. Составьте линейное уравнение с двумя переменными по условию задачи:

- а) 2 кг яблок и 1 кг апельсинов стоят 5 р.;
 б) 2 коробки конфет дороже 3 коробок зефира на 4 р. 20 к.;
 в) 3 кг сахара дешевле 4 кг муки на 1 р.

4.6. Проверьте, является ли пара чисел $x = 3\frac{2}{9}$ и $y = 8\frac{7}{9}$ решением уравнения $x + y = 12$. Найдите еще две пары значений переменных, являющихся решением этого уравнения.

4.7. Выберите пары чисел, являющиеся решениями уравнения $3x - 4y = 7$:

- а) $(1; -1)$; б) $(0; 1\frac{3}{4})$;
 в) $(2\frac{1}{3}; 0)$; г) $(0,6; -1,3)$.

4.8. Выберите уравнения, решением которых является пара чисел $(1; 3)$:

- а) $2x - 3y = -5$; б) $-x + y = 2$;
 в) $5x - y = 2$; г) $0x - 7y = -21$.

4.9. Верно ли, что уравнение $2x + y = 2$:

- а) имеет единственное решение $(1; 0)$;
- б) имеет не более двух решений?

4.10. Составьте какое-либо линейное уравнение с двумя переменными x и y , которому удовлетворяет пара чисел $x = 2,5$; $y = 1$.

4.11. Из равенства $x + 2y = 5$ выразите:

- а) x через y ;
- б) y через x .

4.12. Выразите y через x в уравнении:

- а) $5x - y = -3$;
- б) $x - 9y = 1$;
- в) $0,4x - 2y = 1,2$;
- г) $\frac{1}{7}x - 0,2y = -1$;
- д) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 15$;
- е) $0,3x + \frac{2}{7}y = -6$.

Для каждого уравнения найдите два каких-либо его решения.

4.13. Даны два линейных уравнения с двумя переменными: $x - y = 4$ и $x + y = 8$. Найдите пару чисел, которая:

- а) является решением первого уравнения, но не является решением второго;
- б) является решением второго уравнения, но не является решением первого;
- в) является решением и первого и второго уравнений;
- г) не является решением ни первого ни второго уравнений.

4.14. Для награждения победителей школьной олимпиады приобрели m записных книжек по 3 р. и n фоторамок по 5 р. Вся покупка обошлась в 71 р. Сколько записных книжек было куплено? Найдите все решения.

4.15. За каждый час работы в кафе студенту платят 9 р. и высчитывают 2 р. за каждую разбитую тарелку. За семь рабочих дней он заработал 170 р. Сколько всего часов он отработал и сколько разбил тарелок, если он работает не более 3 ч в день?

4.16. Периметр равнобедренного треугольника равен 16 см. Чему могут быть равны длины боковой стороны и основания, если они выражаются целыми числами?

4.17*. Группу туристов из 20 человек нужно разместить в двухместные и трехместные номера. Найдите все варианты возможного размещения туристов.



4.18. Запишите три каких-либо линейных уравнения с двумя переменными.

4.19. Составьте линейное уравнение с двумя переменными по условию задачи:

- а) 2 пакета молока и пакет кефира стоят 5 р. 25 к.;
- б) 5 одинаковых груш тяжелее 3 одинаковых яблок на 570 г;
- в) на изготовление 1 плаща и 3 курток ушло 11 м ткани.

4.20. Проверьте, является ли пара чисел $x = 2\frac{2}{7}$ и $y = -1\frac{5}{7}$ решением уравнения $x - y = 4$. Подберите еще пару значений переменных, являющихся решением этого уравнения.

4.21. Выберите пары чисел, являющиеся решениями уравнения $10x + y = 12$:

- а) (3; -20); б) (-2; 12); в) (0,1; 11); г) (1; 2).

4.22. Составьте линейное уравнение с двумя переменными x и y , которому удовлетворяет пара чисел $x = -3$; $y = 2$.

4.23. Из равенства $x + 4y = 7$ выразите:

- а) x через y ; б) y через x .

4.24. Выразите x через y в уравнении:

- а) $x + 7y = 1$; б) $3x - 12y = 5$;
в) $-x + 6y = 5$; г) $0,5x - 8y = -7$;
д) $\frac{2}{3}x + \frac{7}{6}y = 4$; е) $1,3x - y = \frac{13}{15}$.

Для каждого уравнения найдите два каких-либо его решения.

4.25. Ученик купил a обложек по 10 к. и b тетрадей по 15 к., уплатив за всю покупку 95 к. Сколько тетрадей купил ученик? Найдите все решения.

4.26. Семиклассники выполняли тест, содержащий задания по алгебре и по геометрии. За каждый верный ответ на алгебраический вопрос выставлялось 4 балла, а на геометрический — 5 баллов. Семиклассник верно ответил на все вопросы и получил 65 баллов. Сколько в тесте могло быть заданий по алгебре и по геометрии?

4.27*. Среди решений уравнения $3x + 5y = 18$ найдите такую пару, которая состоит из двух противоположных чисел.




4.28. Вычислите: $\frac{2^7 \cdot 2^9}{8 \cdot 2^{11}}$.

4.29. Тетрадь стоит 12 к. Найдите, сколько заплатит покупатель за 50 тетрадей, если при покупке более 45 тетрадей магазин делает скидку 18 % от стоимости всей покупки.

4.30. Когда поезд прошел 37,5 % пути между станциями, то до половины пути ему осталось пройти 20 км. Найдите длину пути между станциями.

§ 22. График линейного уравнения $ax + by = c$ с двумя переменными

 **4.31.** На рисунке 60 изображен график функции $y = -x + 4$. Найдите координаты точки пересечения этого графика с прямой:

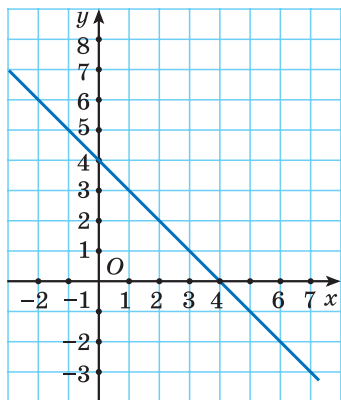


Рис. 60

а) $y = 5$; б) $y = -2$; в) $y = x$.

4.32. Функция задана формулой $y = \frac{1}{3}x - 4$. Найдите:


а) значение функции, если значение аргумента равно 9;

б) значение аргумента, если значение функции равно 8.

4.33. Постройте график функции $y = -2x + 3$. Принадлежит ли этому графику точка:

а) $A(0; 3)$; б) $B(-2; 3)$;

в) $C(100; -197)$?

 Рассмотрим линейное уравнение с двумя переменными $ax + by = c$.

1. Если $b \neq 0$, то разделим обе части уравнения $ax + by = c$ на b и выразим переменную y :

$$\frac{ax}{b} + y = \frac{c}{b}; \quad y = -\frac{ax}{b} + \frac{c}{b}.$$

Получили линейную функцию

$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Ее график — прямая.

$$ax + by = c,$$

$$b \neq 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

График —
прямая