

4.51. Постройте график уравнения:

- а) $x + y = 5$; б) $-2x + 3y = 4$;
 в) $0x - 8y = 32$; г) $-x + 0y = 3$.

4.52. График уравнения $8x - 5y = 14$ проходит через точку с абсциссой 3. Найдите ординату этой точки.

4.53. График уравнения $x + y = a$ проходит через точку $M(4; -1)$. Найдите число a .



4.54. Найдите значение выражения

$$(2 - 6,588 : 6,1) : 0,01.$$

4.55. Разложите на множители $a^2 - b^2 - 3(a - b)$.

4.56. Файл объемом 60 Мб скачивается с сайта за 5 с. За какое время скачается файл объемом 885 Мб, если скорость скачивания увеличится на 25 %?

§ 23. Система линейных уравнений с двумя переменными

 **4.57.** Найдите отношение значений величин:

- а) 15 мин и 1 ч; б) 1,8 м и 12 см.

4.58. Найдите значение выражения $-2m + n^2$ при:

- а) $m = 5$; $n = 3$; б) $m = \frac{1}{2}$; $n = -2$.

4.59. Приведите пример линейной функции, график которой:

- а) параллелен графику функции $y = -2x + 7$;
 б) пересекает график функции $y = x - 8$.

4.60. Проверьте, принадлежит ли точка $(1; 2)$ графику уравнения $2x - y = 0$.

4.61. Даны два линейных уравнения с двумя переменными: $x - y = 3$ и $x + y = 5$. Найдите пару

чисел, которая является решением и первого и второго уравнений.

 Решение различных задач приводит к необходимости находить общие решения линейных уравнений с двумя переменными.

Рассмотрим задачу. В фермерском хозяйстве под злаковые и овощные культуры отведено 150 га, причем под злаковые — на 30 га больше, чем под овощные. Сколько гектаров отведено под злаковые и под овощные культуры отдельно?

Если обозначить через x га площадь, отведенную под злаковые, а через y га — площадь, отведенную под овощные культуры, то по условию задачи получится два уравнения: $x + y = 150$ и $x - y = 30$.

Известно, что и первое и второе уравнения имеют бесконечно много решений. Но по условию задачи нужно найти общие решения, т. е. найти такие пары чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют и первому и второму уравнениям.

В этом случае говорят, что нужно решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + y = 150, \\ x - y = 30. \end{cases}$$

Система двух линейных уравнений с двумя

переменными имеет вид
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — некоторые числа, а x и y — переменные.

Например, система уравнений
$$\begin{cases} 2x - y = 150, \\ x + 3y = 35 \end{cases}$$

является системой линейных уравнений с двумя

переменными. Коэффициенты перед переменными: $a_1 = 2$; $b_1 = -1$; $a_2 = 1$; $b_2 = 3$, а числа в правых частях уравнений (свободные члены) $c_1 = 150$; $c_2 = 35$.

Система уравнений $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ x = 3 \end{cases}$ также является

системой линейных уравнений с двумя переменными. Коэффициенты перед переменными: $a_1 = 2$; $b_1 = -5$; $a_2 = 1$; $b_2 = 0$, а числа в правых частях уравнений (свободные члены) $c_1 = 0$; $c_2 = 3$.

Определение

Решением системы уравнений

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ называется упорядоченная пара

чисел $(x_0; y_0)$, являющаяся одновременно решением и первого и второго уравнений.

Решить систему — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Покажем, что пара чисел $(3; 2)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$

Подставим пару чисел $(3; 2)$ в каждое из уравнений системы и получим $\begin{cases} 2 \cdot 3 + 2 = 8, \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5. \end{cases}$ Каждое из уравнений обращается в верное числовое равенство, значит, пара чисел $(3; 2)$ является решением системы уравнений.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (x_0; y_0)$$

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases} \quad \text{— верно}$$

$(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

Число решений системы линейных уравнений с двумя переменными

Так как графиком каждого уравнения системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ является прямая, то число решений

системы зависит от взаимного расположения прямых.

1. Если прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ пересекаются (рис. 70), то координаты точки пересечения прямых удовлетворяют и первому и второму уравнениям системы, т. е. являются решением системы. Это решение единственное, так как других общих точек у двух пересекающихся прямых нет.

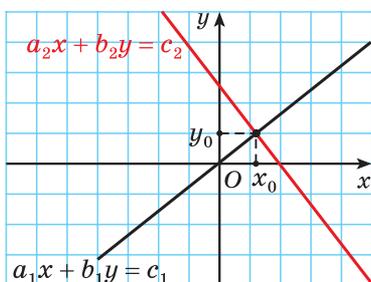


Рис. 70

Прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ пересекаются, значит, система уравнений имеет единственное решение

2. Если прямые параллельны (рис. 71), то система уравнений не имеет решений, так как у этих прямых нет общих точек, т. е. нет пар чисел, удовлетворяющих одновременно двум уравнениям.

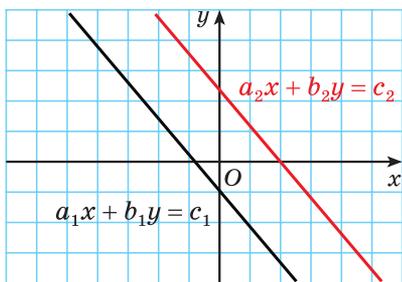


Рис. 71

Прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ параллельны, значит, система уравнений не имеет решений

3. Если прямые совпадают (рис. 72), то система уравнений имеет бесконечно много решений — это координаты точек, лежащих на прямой.

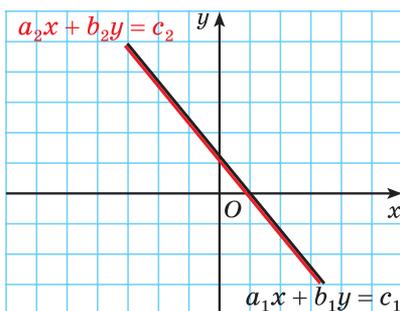


Рис. 72

Прямые
 $a_1x + b_1y = c_1$
и $a_2x + b_2y = c_2$
совпадают, значит,
система уравнений
имеет бесконечно
много решений



Система линейных уравнений с двумя переменными

1. Определите, является ли система системой линейных уравнений с двумя переменными, и назовите коэффициенты перед переменными:

а)
$$\begin{cases} -x + 2y = 12, \\ 5x - y = 5; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x^2 + y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$$

а) Система
$$\begin{cases} -x + 2y = 12, \\ 5x - y = 5 \end{cases}$$
 является системой линейных уравнений, так как имеет

вид
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Коэффициенты перед переменными: $a_1 = -1$; $b_1 = 2$; $a_2 = 5$; $b_2 = -1$.

б) Первое уравнение системы

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 1, \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$
 содержит пере-

менную x во второй степени, система не является системой линейных уравнений.

Решения системы линейных уравнений с двумя переменными

2. Верно ли, что пары чисел $(1; 3)$, $(-2; 6)$ являются решениями системы уравнений

Подставим пару чисел $(1; 3)$ в каждое уравнение системы

$$\begin{cases} 6x + 2y = 12, \\ 8x - y = 5? \end{cases}$$

и получим:
$$\begin{cases} 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 12, \\ 8 \cdot 1 - 3 = 5. \end{cases}$$

Каждое уравнение системы обратилось в верное числовое равенство, значит, пара чисел (1; 3) является решением системы уравнений.

Подставим пару чисел (-2; 6) в первое уравнение системы. Поскольку $6 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 = 12$ — неверно, второе уравнение можно не проверять. Пара чисел (-2; 6) не является решением системы уравнений.

Число решений системы линейных уравнений с двумя переменными

3. Постройте графики уравнений системы
$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$
 и определите число решений системы.

Выразим переменную y из первого и второго уравнений, получим линейные функции $y = 8 - x$ и $y = 2,5 - x$. Построим графики функций (рис. 73).

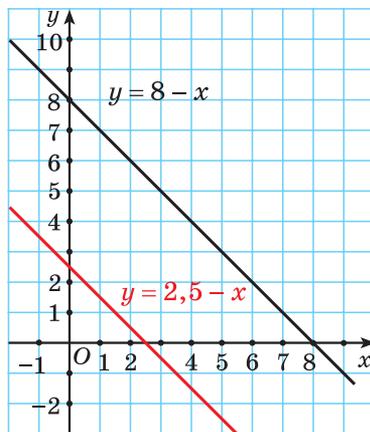


Рис. 73

Графики параллельны ($k_1 = k_2$; $b_1 \neq b_2$), значит, система не имеет решений.

? 1. Верно ли утверждение: «Пара чисел $(x; y)$ называется решением системы уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ если она является решением хотя бы одного уравнения системы»? Ответ поясните.

2. Система уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ не имеет решений.

Как расположены графики уравнений системы?

3. Система уравнений $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ имеет одно решение.

Как расположены графики уравнений системы?



4.62. Определите, какие системы являются системами линейных уравнений с двумя переменными. Для систем линейных уравнений назовите коэффициенты перед переменными:

а) $\begin{cases} x - y = -1, \\ -2x - y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x + 2y = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y + \frac{x}{2} = -1, \\ x - y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 0,3y = 7, \\ -2x + 0,9y = -0,7. \end{cases}$

4.63. Является ли пара чисел $(40; 20)$ решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 60, \\ x - y = 20? \end{cases}$

4.64. Из пар чисел $(10; 0)$ и $(6; -6)$ выберите ту, которая является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 5. \end{cases}$$

4.65. Покажите, что пара чисел $(2; 1)$ не является решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$

4.66. Выберите систему уравнений, решением которой не является пара чисел $(1; -2)$:

а) $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$

4.67. Придумайте пример системы двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой будет пара чисел $(3; -1)$.

4.68. Постройте графики уравнений системы и определите число решений системы:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ -6x + 2y = 3. \end{cases}$

4.69. Постройте графики уравнений системы и выберите систему, которая не имеет решений:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ -x - 2y = 5. \end{cases}$

4.70. Постройте графики уравнений системы и выберите систему, которая имеет бесконечно много решений:

а) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 0,5y = 4, \\ -x + 0,25y = -2. \end{cases}$

4.71. Первое уравнение системы $x - 2y = 1$. Придумайте второе уравнение системы так, чтобы полученная система:

- а) имела бесконечно много решений;
- б) не имела решений;
- в) имела только одно решение.

4.72*. Найдите все значения a , при которых система уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 10, \\ ax - 5y = 15 \end{cases}$ имеет единственное решение.

4.73*. Найдите все значения b , при которых система уравнений $\begin{cases} 3x + by = 1,5, \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.



4.74. Является ли пара чисел $(4; 3)$ решением системы уравнений $\begin{cases} 2,5x - 3y = 1, \\ 5x - 6y = 2? \end{cases}$

4.75. Какая из пар чисел $(0; 2)$ и $(3; -2)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} 4x + 3y = 6, \\ 2x + y = 4? \end{cases}$

4.76. Покажите, что пара чисел $(-1; 4)$ не является решением системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = 7, \\ 6x - y = -9. \end{cases}$

4.77. Выберите систему уравнений, решением которой является пара чисел $(-1; 2)$:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ x + y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + 4y = 9, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

4.78. Придумайте пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой будет пара чисел $(5; 7)$.

4.79. Постройте графики уравнений системы и определите число решений системы:

а) $\begin{cases} x - y = 6, \\ -x + y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 3. \end{cases}$

