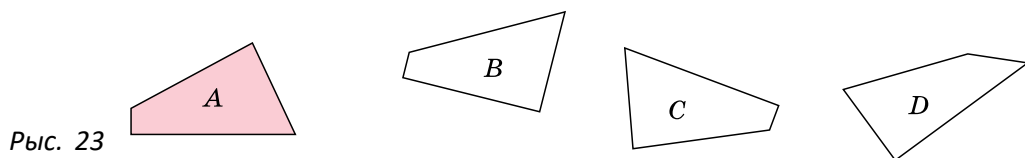




Калі выкананне задання 3 выклікала ў вас цяжкасці, атрымайце дадатковую інфармацыю ў **Інтэрнэце**, набраўшы запыт «прамавугольны паралелепіпед».

Гімнастыка розуму

Вызначыце, якая з фігур B , C або D роўна фігуры A (рыс. 23).

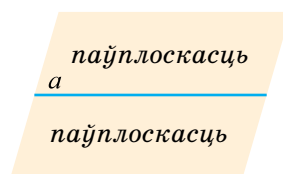


Рыс. 23

§ 3. Прамая. Прамень. Адрэзак. Ломаная

3.1. Прамая

Прамая бясконцая (у абодва бакі) і разбівае плоскасць на дзве *паўплоскасці*, для якіх прамая з'яўляецца *мяжой* (рыс. 24). Мяжа належыць паўплоскасцям. На рысунку 25 пункт C ляжыць на прамой паміж пунктамі A і B , якія ляжаць па розныя бакі ад пункта C . Пункты C і B ляжаць па адзін бок ад пункта A . З трох пунктаў на прамой адзін і толькі адзін пункт ляжыць паміж двума іншымі.

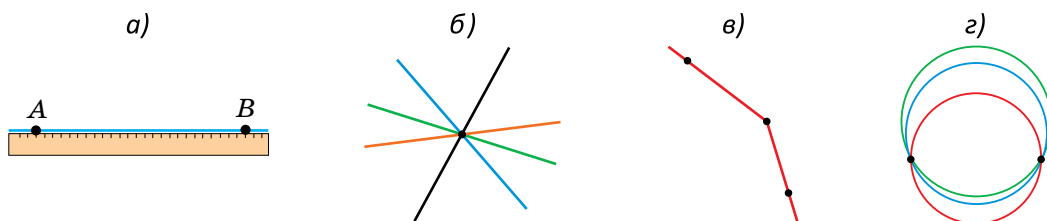


Рыс. 24



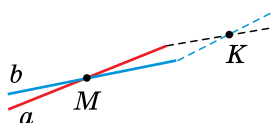
Рыс. 25

Калі на плоскасці адзначыць два пункты A і B , то праз іх заўсёды можна правесці прамую AB (рыс. 26, а). Праз адзін пункт можна правесці бясконца многа прамых (рыс. 26, б), праз тры пункты не заўсёды можна правесці прамую (рыс. 26, в). Праз два пункты можна правесці бясконца многа акружнасцей (рыс. 26, г), а прамую — толькі адну!



Рыс. 26

Аксіёма прамой. Праз любыя два пункты плоскасці можна правесці прамую, і прытым толькі адну.



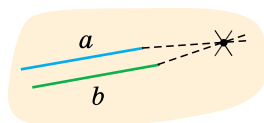
Рыс. 27

З аксіёмы вынікае, што калі дзве прамыя (a і b) маюць агульны пункт (M), то гэта адзіны агульны пункт (рыс. 27).

Калі дапусціць, што існуе яшчэ адзін агульны пункт (K), то тады праз два пункты (M і K) пройдуць дзве прамыя, што па аксіёме прамой немагчыма.

Азначэнне. Дзве прамыя называюцца **перасякальнымі**, калі яны маюць агульны пункт.

Азначэнне. Дзве прамыя называюцца **паралельнымі**, калі яны ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.



Рыс. 28

Калі прамыя a і b паралельныя, то адрэзкі, якія паказваюць гэтыя прамыя, ніколі не перасякуцца, колькі б іх ні падаўжалі (рыс. 28).

3.2. Прамень

Азначэнне. **Праменем** называецца частка прамой, абмежаваная адным пунктам.

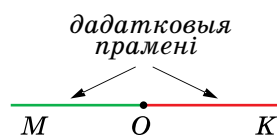


Рыс. 29

Пункт, які абмяжоўвае прамень, належыць праменю і называецца *пачаткам праменя*. Прамень бясконцы (у адзін бок). Ён абазначаецца адной малой літарай або дзвюма вялікімі літарамі лацінскага алфавіта, прычым на першым месцы заўсёды запісваецца пачатак праменя. Другі пункт можа быць не адзначаны на прамені. Ён паказвае напрамак праменя, напрыклад як пункт B на прамені AB (рыс. 29).

Азначэнне. Два прамені называюцца **дадатковымі** (процілеглымі), калі яны маюць агульны пачатак і ляжаць на адной прамой.

На рысунку 30 паказаны дадатковыя прамені OM і OK . Яны дапаўняюць адзін аднаго да прамой. Каб пабудаваць прамень, дадатковы да дадзенага, дастаткова прадоўжыць дадзены прамень за яго пачатак уздоўж прамой, на якой ляжыць дадзены прамень. Любы пункт на прамой разбівае яе на два дадатковыя прамені.



Рыс. 30

3.3. Адрэзак

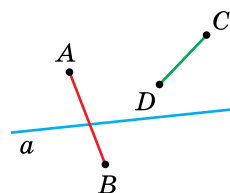
Азначэнне. **Адрэзкам** называецца частка прамой, абмежаваная двума пунктамі.

Пункты, якія абмяжоўваюць адрэзак, належаць адрэзку і называюцца канцамі адрэзка, астатнія пункты адрэзка — яго ўнутранымі пунктамі. На рысунку 31 паказаны адрэзак AB з канцамі A і B . Пункт M — унутраны пункт адрэзка AB .



Рыс. 31

Калі канцы адрэзка ляжаць у розных паўплоскасцях адносна прамой, то гэты адрэзак перасякае прамую, а калі ляжаць у адной паўплоскасці, то не перасякае. На рысунку 32 канцы адрэзка AB ляжаць у розных паўплоскасцях адносна прамой a , і ён перасякае прамую a . Канцы ж адрэзка CD ляжаць у адной паўплоскасці, і ён не перасякае прамую a .



Рыс. 32

Калі пры накладанні адрэзкаў іх канцы супадуць, то па аксіёме прамой гэтыя адрэзкі супадуць усімі сваімі пунктамі.

Азначэнне. Два адрэзкі называюцца **роўнымі**, калі іх можна сумясціць накладаннем.

Важнай характарыстыкай адрэзка з’яўляецца яго *даўжыня*. Уласцівасці даўжыні адрэзка: кожны адрэзак мае даўжыню, выражаную дадатным лікам; роўным адрэзкам адпавядаюць роўныя даўжыні, большаму адрэзку — большая даўжыня. І наадварот.

Аксіёма вымярэння адрэзкаў. Калі на адрэзку ўзяць пункт, то ён разаб’е дадзены адрэзак на два адрэзкі, сума даўжынь якіх роўна даўжыні дадзенага адрэзка.

Аксіёма адкладання адрэзкаў. На любым прамені ад яго пачатку можна адкласці адрэзак дадзенай даўжыні, і прытым толькі адзін.



Рыс. 33

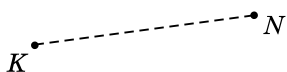
На рысунку 33 пункт C ляжыць на адрэзку AB . Па аксіёме вымярэння адрэзкаў вынікае, што $AC + CB = AB$.



Рыс. 34

Сярэдзінай адрэзка называецца пункт, які дзеліць адрэзак на два роўныя адрэзкі. На рысунку 34 пункт M — сярэдзіна адрэзка EF , г. зн. $EM = MF$.

Азначэнне. Адлегласцю паміж двума пунктамі называецца даўжыня адрэзка, які злучае гэтыя пункты.



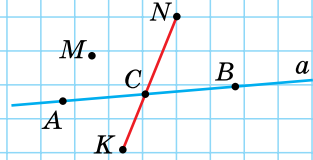
Рыс. 35

На рысунку 35 адлегласць паміж пунктамі K і N роўна даўжыні адрэзка KN .

А цяпер выканайце **Заданне 1**.

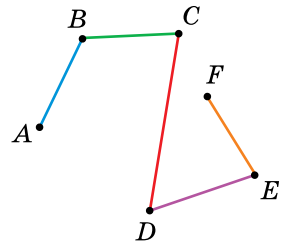
Заданне 1

Назавіце ўсе адрэзкі (паказаныя і тыя, відарысы якіх можна паказаць) з канцамі ў адзначаных на рысунку пунктах. Знайдзіце агульную колькасць гэтых адрэзкаў.



3.4. Ломаная

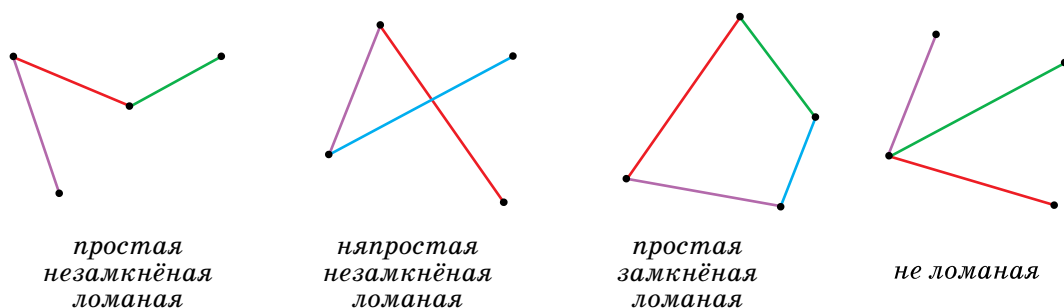
На рысунку 36 адрэзкі AB , BC , CD , DE і EF паслядоўна злучаны сваімі канцамі: адрэзак BC злучаны з адрэзкам AB , адрэзак CD злучаны з адрэзкам BC і гэтак далей. Атрыманая фігура ўяўляе сабой ломаную $ABCDEF$. Паказаныя адрэзкі называюцца *звёнамі* ломанай, а пункты A , B , C , D , E і F — *вяршынямі* ломанай.



Рыс. 36

Азначэнне. **Ломанай** называецца геаметрычная фігура, утвораная адрэзкамі, паслядоўна злучанымі сваімі канцамі, у якой ніякія два суседнія звёны не ляжаць на адной прамой. **Даўжынёй ломанай** называецца сума даўжынь яе звёнаў.

Азначэнне. Ломаная называецца **замкнёнай**, калі пачатак яе першага звяна супадае з канцом апошняга. У адваротным выпадку яна называецца **незамкнёнай**. Ломаная называецца **простай**, калі яна не мае самаперасячэнняў і ніякія два яе звёны, акрамя суседніх, не маюць агульных пунктаў. У адваротным выпадку яна называецца **няпростай** (рыс. 37).

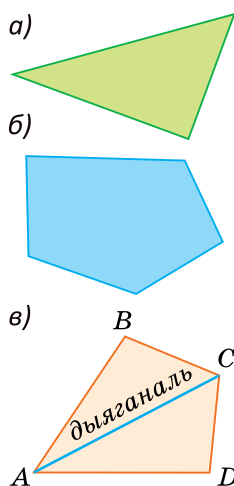


Рыс. 37

Простая замкнёная ломаная на плоскасці называецца *многоавугольнікам*. Звёны гэтай ломанай называюцца старанамі гэтага многоавугольніка, а вяршыні — вяршынямі многоавугольніка. *Перыметрам* многоавугольніка называецца сума даўжынь яго старон. Частка плоскасці, абмежаваная многоавугольнікам, называецца *плоскім многоавугольнікам*.

Далей, разглядаючы плоскія многоавугольнікі, слова «плоскі» ўжываць не будзем.

Адрэзак, што злучае вяршыні многоавугольніка, якія не належаць адной старане, называецца яго *дыяганаллю*. Калі ў многоавугольніка тры стараны, то ў яго тры вяршыні і тры вуглы, і ён называецца трохвугольнікам (рыс. 38, а), калі чатыры стараны — чатырохвугольнікам, калі пяць — пяцівугольнікам (рыс. 38, б) і гэтак далей.



Рыс. 38

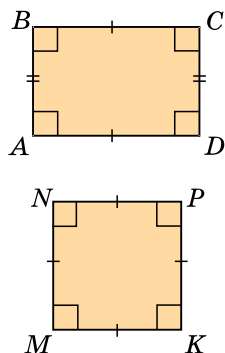
На рысунку 38, в паказаны чатырохвугольнік $ABCD$ са старанамі AB , BC , CD і AD . У яго чатыры вуглы: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ і дзве дыяганалі: AC і BD . Перыметр гэтага чатырохвугольніка:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

Пры ўказанні многоавугольніка яго вяршыні запісваюцца *паслядоўна*, пачынаючы з любой вяршыні і ў любым напрамку. Напрыклад, $CBAD$ — гэта той жа чатырохвугольнік $ABCD$.

Самыя вядомыя вам чатырохвугольнікі — гэта прамавугольнік і квадрат. У прамавуголь-

ніка ўсе вуглы прамыя, а процілеглыя стораны роўныя. Квадрат — гэта прамавугольнік, у якога ўсе стораны роўныя. На рысунку 39 $ABCD$ — прамавугольнік, $MNPК$ — квадрат. Пазней мы дадзім азначэнне прамавугольніка і квадрата і падрабязна разгледзім іх уласцівасці. А пакуль будзем карыстацца дадзенымі ўяўленнямі.

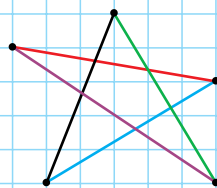


Рыс. 39

А цяпер выканайце **Заданне 2**.

Заданне 2

Якую ломаную ўяўляе сабой «зорачка» з вяршынямі ў адзначаных пунктах?



Заданні да § 3

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. На адрэзку AB , роўным 24 см, адзначаны пункт C . Адрэзак AC на 6 см большы за адрэзак CB . Знайсці даўжыню адрэзка AC .



Рыс. 40

Рашэнне.

Няхай $CB = x$ см, тады $AC = (x + 6)$ см.

Па аксіёме вымярэння адрэзкаў $AC + CB = AB$ (рыс. 40), г. зн. $(x + 6) + x = 24$, $2x + 6 = 24$, $2x = 24 - 6$, $2x = 18$, $x = \frac{18}{2} = 9$, адкуль

$AC = 9 + 6 = 15$ (см).

Адказ: 15 см.

Заўвага. У далейшым пры рашэнні задач мы не будзем спасылацца на аксіёму вымярэння адрэзкаў.

Задача 2. На адрэзку AB адзначаны пункты C і D (рыс. 41). Знайсці даўжыню адрэзка CD , калі: а) $AB = 36$ см, $AD = 23$ см, $BC = 19$ см; б) $AB = a$, $AD = b$, $BC = c$.



Рыс. 41

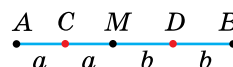
Рашэнне.

$$\begin{aligned} \text{а) } DB &= AB - AD = 36 - 23 = 13 \text{ (см)}, \\ CD &= BC - DB = 19 - 13 = 6 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

б) Калі скласці адрэзкі AD і BC , то атрымаецца адрэзак AB плюс адрэзак CD . Адсюль $CD = AD + BC - AB = b + c - a$.

Адказ: а) 6 см; б) $b + c - a$.

Задача 3*. На адрэзку AB , роўным 42 см, адзначаны пункт M . Знайсці адлегласць паміж сярэдзінамі адрэзкаў AM і MB .



Рыс. 42

Рашэнне.

Няхай C — сярэдзіна адрэзка AM , D — сярэдзіна адрэзка MB . Абазначым $AC = CM = a$, $MD = DB = b$ (рыс. 42).

$$\text{Тады } AB = 2a + 2b = 2(a + b), \text{ а } CD = a + b.$$

$$\text{Значыць, } CD = \frac{1}{2}AB = 21 \text{ см.}$$

Адказ: 21 см.

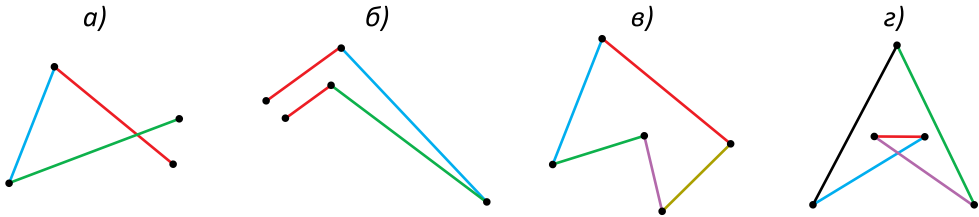
Зайвагі. 1. У дадзенай задачы мы даказалі ўласцівасць: «Калі на адрэзку адзначаны пункт, то адлегласць паміж сярэдзінамі атрыманых адрэзкаў роўна палове дадзенага адрэзка».

2. Сцверджанні, якія будуць даказаны намі ў ключавых задачах, могуць у далейшым выкарыстоўвацца як вядомыя ўласцівасці.



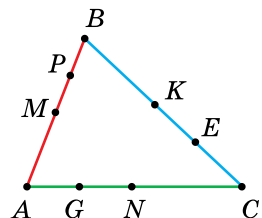
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

1. Адзначце ў шшытку чатыры пункты A , B , C і D , ніякія тры з якіх не ляжаць на адной прамой. Пакажыце відарысы прамых, якія праходзяць праз пары гэтых пунктаў. Запішыце гэтыя прамыя. Пазначце прамені з пачаткам у пункце B .
2. На прамой адзначаны пункты A , B і C так, што $AB = 14$ см, $BC = 32$ см, $AC = 18$ см. Вызначыце, які з пунктаў ляжыць паміж двума іншымі.



Рыс. 43

3. а) На адрэзку AB , роўным 56 см, адзначаны пункт M . Адрэзак AM на 4 см меншы за адрэзак MB . Знайдзіце адрэзак BM .
 б) Пункт P ляжыць на адрэзку EF , роўным 24 дм. Адрэзак EP у 3 разы большы за адрэзак PF . Знайдзіце адлегласць ад сярэдзіны адрэзка PF да пункта E .
4. На адрэзку AB адзначаны пункты K і M так, што пункт K ляжыць паміж пунктамі A і M , $3AM = 2MB$, $AK = 2KM$, адрэзак AK на 12 см большы за адрэзак KM . Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B .
5. Дадзены тры пункты A , B і C . Высветліце, ці могуць яны ляжаць на адной прамой, калі:
 а) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $AC = 8$ см;
 б) $AB = 6,8$ дм, $BC = 12,3$ дм, $AC = 5,5$ дм.
6. Як называецца кожная ломаная, паказаная на рысунку 43?
7. Пакажыце відарыс: а) трохзвённай простаї незамкнёнай ломанай; б) чатырохзвённай простаї замкнёнай ломанай; в) пяцізвённай няпростаї незамкнёнай ломанай.
8. Дадзена пяцізвённая незамкнёная ломаная. Кожнае наступнае звяно, пачынаючы з другога, у 2 разы большае за папярэдняе звяно. Даўжыня ломанай роўна 186 см. Знайдзіце даўжыню самага вялікага яе звяна.
9. Дадзена трохзвённая замкнёная ломаная ABC (рыс. 44). Пункты M , K , N — сярэдзіны яе звёнаў AB , BC і AC . Пункты P , E , G — сярэдзіны адрэзкаў MB , KC і AN . Знайдзіце даўжыню ломанай ABC , калі:
 а) $PB + EC + GA = 12$ см;
 б) $AP + BE + CG = 108$ см.



Рыс. 44

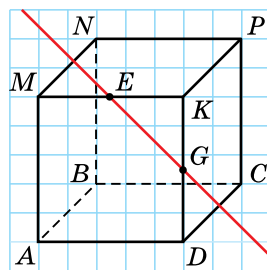
10*. На адрэзку AB адзначаны пункты M і K так, што пункт M ляжыць паміж пунктамі A і K . Знайдзіце адлегласць паміж сярэдзінамі адрэзкаў AM і KB , калі:

а) $AB = 32$ см, $MK = 12$ см;

б) $AB = a$, $MK = b$.

11*. На плоскасці адзначана 10 пунктаў, ніякія тры з якіх не ляжаць на адной прамой. Колькі існуе адрэзкаў, што злучаюць пары гэтых пунктаў? Рашыце гэту задачу для 100 пунктаў; для n пунктаў.

12*. На кантах MK і KD куба адзначаны пункты E і G (рыс. 45). З прамых AD , MN , AM , NP , BC і DC выберыце тыя, якія перасякае прамая EG . Запішыце ўсе простыя ломаныя з канцамі ў пунктах A і P , звёны якіх з'яўляюцца кантамі куба.



Рыс. 45



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

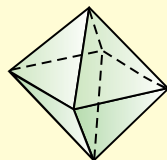
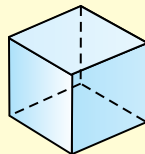
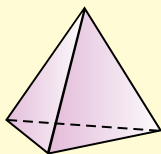
1. Аксіёму прамой.
2. Азначэнне паралельных прамых.
3. Азначэнне праменя, дадатковых праменяў.
4. Азначэнне адрэзка, роўных адрэзкаў; аксіёму вымярэння адрэзкаў.
5. Азначэнне адлегласці паміж пунктамі.
6. Азначэнне ломанай, замкнёнай ломанай, простае ломанай.
7. Азначэнне многавугольніка, перыметра многавугольніка.

Умеем

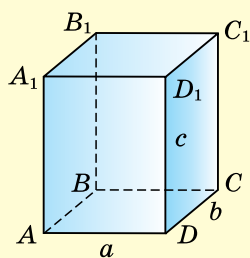
1. Будаваць прамень з пачаткам у дадзеным пункце і прамень, дадатковы да дадзенага.
2. Адкладаць на прамені ад яго пачатку адрэзак дадзенай даўжыні пры дапамозе лінейкі або цыркуля.

Геаметрыя 3D

Геаметрычнае цела, паверхня якога складаецца з канечнай колькасці многавугольнікаў, называецца *мнагаграннікам*. Мнагаграннікам з'яўляецца прамавугольны паралелепіпед, усе шэсць граней якога — прамавугольнікі (рыс. 46). Даўжыні трох яго кантаў, якія маюць агульную вяршыню, называюцца вымярэннямі прамавугольнага паралелепіпеда. Гэта яго даўжыня, шырыня і вышыня. Напрыклад, $AD = a$, $DC = b$ і $DD_1 = c$ — вымярэнні паралелепіпеда. Аб'ём паралелепіпеда знаходзяць па формуле $V = abc$.



мнагаграннікі



Рыс. 46

Задача. У прамавугольнага паралелепіпеда (гл. рыс. 46) перыметр грані AA_1D_1D роўны 20 см, грань $ABCD$ — квадрат з перыметрам 16 см. Знайдзіце:

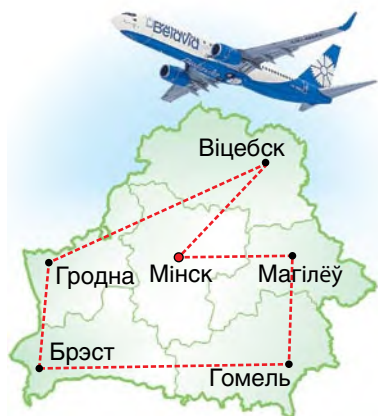
- даўжыню прасторавай ломанай $ABCC_1D_1A_1$;
- перыметр і плошчу грані DD_1C_1C ;
- аб'ём паралелепіпеда.

Мадэляванне

Самалёт кампаніі «Белавія» ажыццявіў палёт па маршруце Мінск — Магілёў — Гомель — Брэст — Гродна — Віцебск — Мінск (рыс. 47).

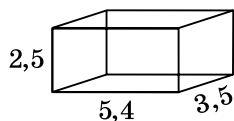
а) Вызначыце прыкладную даўжыню замкнёнай ломанай гэтага маршруту, выкарыстаўшы карту Беларусі або [Інтэрнэт](#).

б*) Высветліце, у які з гарадоў трэба вылецець з Мінска, каб, паслядоўна наведваючы названыя гарады па гадзіннікавай стрэлцы і вярнуўшыся ў Мінск, атрымаць самы кароткі маршрут.



Рыс. 47

Рэальная геаметрыя



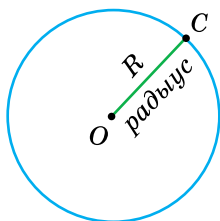
Ёсць 12 металічных труб даўжынёй 6 м кожная. Неабходна з гэтых труб зрабіць каркас для гаража ў форме прамавугольнага паралелепіпеда шырынёй 3,5 м, даўжынёй 5,4 м і вышынёй 2,5 м. Трубы разразаюць на адрэзкі патрэбнай даўжыні і мацуюць па вуглах каркаса.

Вызначыце: а) колькі труб пойдзе на каркас гаража пры самым эканомным варыянце разразання; б*) колькі працэнтаў ад выкарыстаных труб пойдзе ў адходы.

§ 4. Акружнасць і круг

Азначэнне. **Акружнасцю** называецца геаметрычная фігура, якая складаецца з усіх пунктаў плоскасці, роўна-аддаленых ад дадзенага пункта, які называецца *цэнтрам* акружнасці.

Радыусам акружнасці называецца адрэзак, які злучае цэнтр акружнасці з пунктам на акружнасці (або даўжыня гэтага адрэзка).



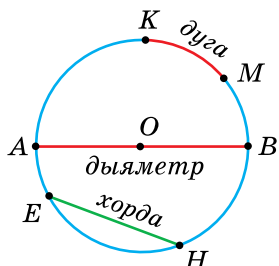
Рыс. 48

Хордай акружнасці называецца адрэзак, які злучае два пункты акружнасці.

Дыяметрам акружнасці называецца хорда, якая праходзіць праз цэнтр акружнасці.

Дугой акружнасці называецца частка акружнасці, абмежаваная двума пунктамі.

На рысунку 48 пункт O — цэнтр, адрэзак OC — радыус акружнасці. Радыйс абазначаюць літарай R (або r): $OC = R$. З азначэння акружнасці вынікае, што ўсе радыусы роўныя паміж сабой.



Рыс. 49

На рысунку 49 паказаны: хорда EH , дуга KM (абазначаецца: $\cup KM$), дыяметр AB . Дыяметр складаецца з двух радыусаў. Таму ўсе дыяметры акружнасці роўныя паміж сабой. Дыяметр AB складаецца з радыусаў OA і OB ,