

§ 5. Вугал. Віды вуглоў

Азначэнні. **Вугал** — гэта геаметрычная фігура, утвораная двума прамянямі, што выходзяць з аднаго пункта, і часткай плоскасці, якую яны абмяжоўваюць.

Два вуглы называюцца **роўнымі**, калі іх можна сумясціць накладаннем.

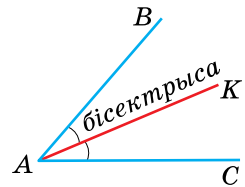
Бісектрысай вугла называецца прамень, які выходзіць з вяршыні вугла і дзеліць яго на два роўныя вуглы.

Азначэнне. **Разгорнутым** называецца вугал, стораны якога з'яўляюцца дадатковымі прамянямі.

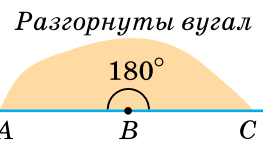
На рысунку 56 прамень AK — бісектрыса вугла BAC і $\angle BAK = \angle CAK$.

На рысунку 57 вугал ABC — разгорнуты, прамені BA і BC — дадатковыя. Другая (незафарбаваная) паўплоскасць адносна прамой AC таксама задае разгорнуты вугал ABC .

Вуглы вымяраюцца ў градусах, мінутах, секундах. **Градусам** называецца $\frac{1}{180}$ частка разгорнутага вугла і абазначаецца 1° ; разгорнуты вугал роўны 180° ; $\frac{1}{60}$ частка аднаго градуса называецца **мінутай** і абазначаецца $1'$; $\frac{1}{60}$ частка мінуты называецца **секундай** і абазначаецца $1''$.



Рыс. 56



Рыс. 57

Заданне 1

Знайдзіце суму і рознасць вуглоў α і β , калі:
 $\alpha = 62^\circ 50' 30''$,
 $\beta = 12^\circ 20' 40''$.

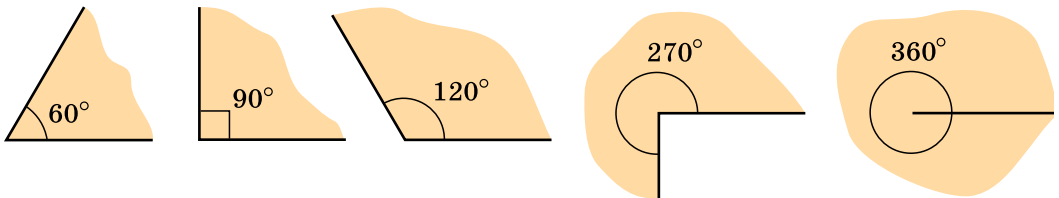
Вугал, роўны 5 градусаў 20 мінут і 35 секунд, запісваецца так: $5^\circ 20' 35''$.

Замест «градусная мера вугла роўна 20° » часта гавораць «вугал роўны 20° », замест «знайсці градусную меру вугла» гавораць «знайсці вугал».

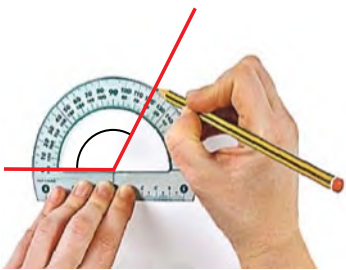
А цяпер выканайце **Заданне 1**.

Азначэнне. Вугал, роўны 90° , называецца **прамым**; вугал, меншы за 90° , — **вострым**; вугал, большы за 90° , але меншы за 180° , — **тупым**; вугал, роўны 360° , называецца **поўным** (яго стораны супадаюць).

На рысунку 58 паслядоўна паказаны: востры вугал, роўны 60° ; прамы вугал, роўны 90° ; тупы вугал, роўны 120° ; вугал, роўны 270° ; поўны вугал, роўны 360° .



Рыс. 58

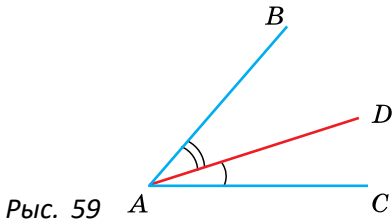


Градусная мера вугла з'яўляецца яго важнай характарыстыкай. Уласцівасці градуснай меры вугла: любы вугал мае градусную меру, выражаную некаторым дадатным лікам; роўным вуглам адпавядаюць роўныя градусныя меры, а большаму вуглу — большая градусная мера. І наадварот.

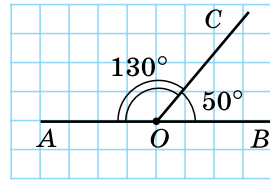
Аксіёма вымярэння вуглоў. Калі ўнутры вугла з яго вяршыні правесці прамень, то ён разаб'е дадзены вугал на два вуглы, сума градусных мер якіх роўна градуснай меры дадзенага вугла.

Аксіёма адкладання вуглоў. Ад любога праменя ў дадзеную паўплоскасць можна адкласці вугал дадзенай градуснай меры, і прытым толькі адзін.

На рысунку 59 прамень AD праходзіць унутры вугла BAC . Па аксіёме вымярэння вуглоў $\angle BAD + \angle CAD = \angle BAC$. Калі з вяршыні разгорнутага вугла AOB (рыс. 60) правесці пра-



Рыс. 59



Рыс. 60

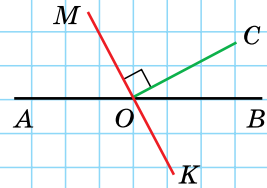
мень OC , які складзе са стараной OB вугал 50° , то са стараной OA прамень OC складзе вугал $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Два прамені з агульным пачаткам задаюць на плоскасці два вуглы. У далейшым будзем разглядаць меншы з гэтых двух вуглоў (калі яны неразгорнутыя). Такі вугал меншы за 180° .

А цяпер выканайце **Заданне 2**.

Заданне 2

Колькі вострых, тупых, прамых і разгорнутых вуглоў можна налічыць на рысунку?

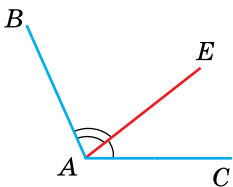


Заданні да § 5

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Унутры вугла BAC , роўнага 114° , з яго вяршыні праведзены прамень AE . Вугал BAE ў 2 разы большы за вугал EAC . Знайсці велічыню вугла BAE .



Рыс. 61

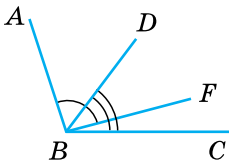
Рашэнне. Няхай $\angle EAC = x$. Тады $\angle BAE = 2x$ (рыс. 61). Па аксіёме вымярэння вуглоў $\angle EAC + \angle BAE = \angle BAC$. Адсюль $x + 2x = 114^\circ$, $3x = 114^\circ$, $x = \frac{114^\circ}{3} = 38^\circ$, $\angle BAE = 2 \cdot 38^\circ = 76^\circ$.

Адказ: 76° .

Заўвагі. 1. Магчымы іншы спосаб запісу рашэння, калі побач з літарай x пішуць знак градуса: $\angle MAC = x^\circ$, $\angle BAM = 2x^\circ$. Тады ва ўраўненні знак градуса пісаць не трэба: $x + 2x = 114$.

2. У далейшым пры рашэнні задач мы не будзем спасылацца на аксіёму вымярэння вуглоў.

Задача 2. Унутры вугла праведзены прамені BD і BF (рыс. 62). Знайсці велічыню вугла DBF , калі: а) $\angle ABC = 109^\circ$, $\angle ABF = 95^\circ$, $\angle CBD = 54^\circ$; б) $\angle ABC = \alpha$, $\angle ABF = \beta$, $\angle CBD = \gamma$.



Рыс. 62

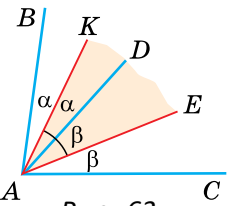
Рашэнне.

а) $\angle FBC = \angle ABC - \angle ABF = 109^\circ - 95^\circ = 14^\circ$,
 $\angle DBF = \angle CBD - \angle FBC = 54^\circ - 14^\circ = 40^\circ$.

б) Калі скласці вуглы ABF і CBD , то атрымаецца вугал ABC плюс вугал DBF . Адсюль
 $\angle DBF = \angle ABF + \angle CBD - \angle ABC = \beta + \gamma - \alpha$.

Адказ: а) 40° ; б) $\beta + \gamma - \alpha$.

Задача 3*. Прамень AD дзеліць вугал BAC на два вуглы: $\angle BAD$ і $\angle CAD$. Даказаць, што вугал паміж бісектрысамі AK і AE вуглоў BAD і CAD роўны палове вугла BAC (рыс. 63).



Рыс. 63

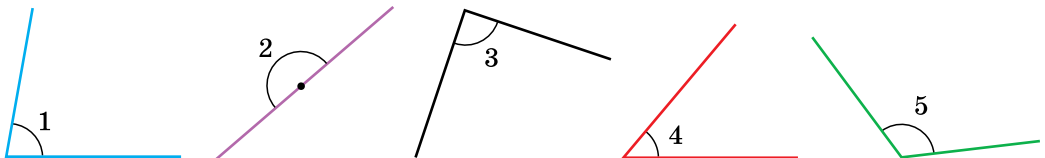
Доказ. Паколькі AK і AE — бісектрысы, то $\angle BAK = \angle DAK = \alpha$ і $\angle CAE = \angle DAE = \beta$. Тады $\angle BAC = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$, $\angle KAE = \alpha + \beta$. Значыць, $\angle KAE = \frac{1}{2}\angle BAC$. Што і трэба было даказаць.

Зайвага. У дадзенай задачы мы даказалі ўласціваць: «Калі ўнутры вугла з яго вяршыні правесці прамень, то вугал паміж бісектрысамі атрыманых вуглоў роўны палове дадзенага вугла».



**РАШАЕМ
САМАСТОЙНА**

20. На рысунку 64 паказаны вуглы, роўныя 50° , 80° , 90° , 120° , 180° . Назавіце гэтыя вуглы.



Рыс. 64

21. Дадзены вуглы: 1° , $80^\circ 52'$, 100° , 90° , 45° , 99° , 179° , 89° , 180° . Вызначыце, колькі сярод іх:

- а) вострых вуглоў; б) тупых вуглоў.

22. Виясно, що $\angle BAC = 68^\circ$, AM — бісектриса вугла BAC , AK — бісектриса вугла MAC . Знайдіть градусну міру вугла BAK .
23. Унутрі прямого вугла KMN проведено промені MA і MB , $\angle KMB = 72^\circ$, $\angle AMN = 48^\circ$. Знайдіть $\angle AMB$.
24. На рисунку 65 роїня вугли абазначаны дугами, квадрікам — прамы вугал. Знайдіть вугли, абазначаны пыталньікам.

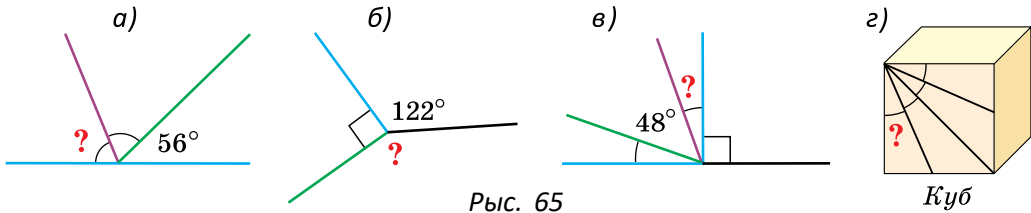


Рис. 65

Куб

25. Вугал BAC роїны 130° . Прамень AK прамодзіць унутры вугла BAC так, што вугал BAK на 30° меншы за вугал CAK . Знайдіть вугал BAK .
26. Вугал NAK роїны 48° . Прамень AB дзеліць вугал NAK на два вугли, прычым $\angle NAB : \angle KAB = 3 : 5$. Знайдіть вугал паміж бісектрисай вугла KAB і праменем AN .
27. З пункта C , абзначанага на прамой AB , у адну паўплоскасць праведзены прамені CD і CE так, што $\angle ACE = 156^\circ$, а $\angle DCB$ — прамы. Знайдіть вугал DCE .
- 28*. Вызначыце, які вугал утвараюць гадзіннікаявая і мінутная стрэлкі ў 10 г 10 мін (рыс. 66).
- 29*. Унутры вугла AOB размешчаны вугал COD (рыс. 67). Знайдіть вугал паміж бісектрисамі OK і OM вуглоў AOC і BOD , калі:
- а) $\angle AOB = 160^\circ$, $\angle COD = 40^\circ$; б) $\angle AOB = \alpha$, $\angle COD = \beta$.



Рис. 66

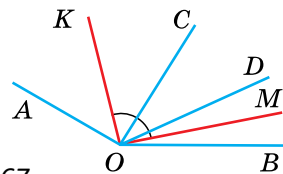


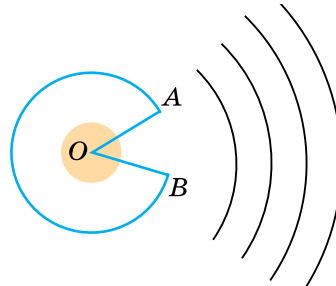
Рис. 67



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, як перакладаецца слова «градус» і што яшчэ, акрамя вуглоў, вымяраюць у градусах.

Мадэляванне

Круглая пляцоўка для кідання молата, абнесена металічнай сеткай, мае свабодны ад сеткі сектар. Праз яго вылятае спартыўны снарад (рыс. 68). Цэнтральны вугал гэтага сектара складае 12,5 % ад поўнага вугла. Знайдзіце вугал $\angle AOB$.

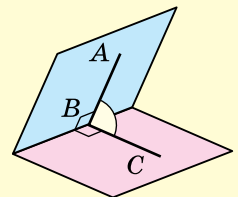


Рыс. 68

Цікава ведаць. Двухразовы чэмпіён свету беларускі кідальнік молата Іван Ціхан выйграў сярэбраны медаль на алімпійскіх гульнях у Рыа-дэ-Жанэйра ў 2016 г.

Геаметрыя 3D

У прасторы пры перасячэнні дзвюх плоскасцей утвараюцца *двухгранныя* вуглы. Дзве паўплоскасці з агульнай мяжой з'яўляюцца гранямі такога двухграннага вугла, а іх мяжа — яго кантам. Вымяраецца двухгранны вугал велічынёй *лінейнага* вугла, утворанага двума прамянямі, праведзенымі ў кожнай з паўплоскасцей з пункта на канце двухграннага вугла перпендыкулярна да гэтага канта. На рысунку 69 $\angle ABC$ — лінейны вугал паказанага двухграннага вугла.

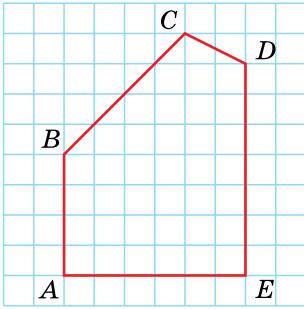


Рыс. 69

Задача. Знайдзіце велічыню двухграннага вугла, калі яго лінейны вугал складае 70 % прамога вугла.

Рэальная геаметрыя

Майстар вымераў вуглы паміж сценамі ў студыі пры дапамозе электроннага вугламера. Студыя мае форму пяцівугольніка. У майстра пасля вымярэння атрымаліся вуглы, роўныя 90° , 135° , 108° , 117° , 90° .



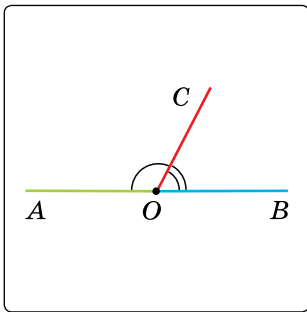
Перанясіце план студыі, паказаны на рысунку, у спытак і вызначыце пры дапамозе транспарцыра ўсе вуглы паміж суседнімі сценамі. Запішыце, чаму роўны вуглы A , B , C , D і E . Высветліце, ці не памыліўся майстар пры вымярэннях, калі вядома, што сума вуглоў любога пяцівугольніка роўна 540° .

§ 6. Сумежныя вуглы. Вертыкальныя вуглы

Азначэнне. Два вуглы называюцца **сумежнымі**, калі ў іх адна старана агульная, а дзве іншыя з'яўляюцца дадатковымі праменямі.

Калі на рысунку 70 прамені OA і OB дадатковыя, то вуглы AOC і BOC — сумежныя.

Тэарэма (уласцінасць сумежных вуглоў).
Сума сумежных вуглоў роўна 180° .



Рыс. 70

Дадзена: $\angle AOC$ і $\angle BOC$ — сумежныя.

Даказаць: $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$.

Доказ. З азначэння сумежных вуглоў вынікае, што прамені OA і OB з'яўляюцца дадатковымі і таму ўтвараюць разгорнуты вугал AOB , роўны 180° . Прамень OC праходзіць паміж старанамі гэтага вугла, і па аксіёме вымярэння вуглоў $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$. Таму $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$.

Тэарэма даказана.