

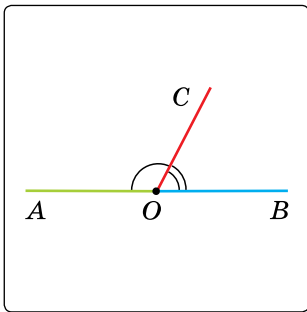
Перанясіце план студыі, паказаны на рысунку, у спытак і вызначыце пры дапамозе транспарцыра ўсе вуглы паміж суседнімі сценамі. Запішыце, чаму роўны вуглы A , B , C , D і E . Высветліце, ці не памыліўся майстар пры вымярэннях, калі вядома, што сума вуглоў любога пяцівугольніка роўна 540° .

§ 6. Сумежныя вуглы. Вертыкальныя вуглы

Азначэнне. Два вуглы называюцца **сумежнымі**, калі ў іх адна старана агульная, а дзве іншыя з'яўляюцца дадатковымі праменямі.

Калі на рысунку 70 прамені OA і OB дадатковыя, то вуглы AOC і BOC — сумежныя.

Тэарэма (уласцівасць сумежных вуглоў).
Сума сумежных вуглоў роўна 180° .



Рыс. 70

Дадзена: $\angle AOC$ і $\angle BOC$ — сумежныя.

Даказаць: $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$.

Доказ. З азначэння сумежных вуглоў вынікае, што прамені OA і OB з'яўляюцца дадатковымі і таму ўтвараюць разгорнуты вугал AOB , роўны 180° . Прамень OC праходзіць паміж старанамі гэтага вугла, і па аксіёме вымярэння вуглоў $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$. Таму $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$.

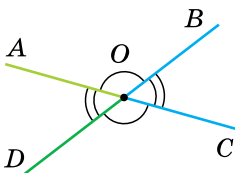
Тэарэма даказана.

Вынікі.

1. Калі сумежныя вуглы роўныя, то кожны з іх прамы.
2. Калі два вуглы роўныя, то роўныя і сумежныя з імі вуглы.

Зайвага. Усе тэарэмы курса геаметрыі 7—9-х класаў апісваюць уласцівасці фігур на плоскасці.

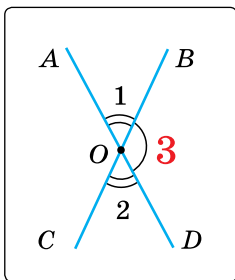
Азначэнне. Два вуглы называюцца **вертыкальнымі**, калі стораны аднаго вугла з’яўляюцца дадатковымі праменямі да старон другога.



Рыс. 71

Пры перасячэнні дзвюх прамых AC і DB у пункце O (рыс. 71) атрымліваецца, што прамені OA і OC , OB і OD — дадатковыя. Таму вуглы AOD і BOC — вертыкальныя. Вуглы AOB і DOC таксама вертыкальныя.

Тэарэма (уласцівасць вертыкальных вуглоў).
Вертыкальныя вуглы роўныя.

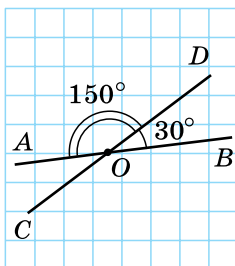


Рыс. 72

Дадзена: $\angle 1$ і $\angle 2$ — вертыкальныя (рыс. 72).

Даказаць: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказ. Вуглы 1 і 3 сумежныя, паколькі прамені OA і OD — дадатковыя па азначэнні вертыкальных вуглоў. Па ўласцівасці сумежных вуглоў $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Вуглы 2 і 3 таксама сумежныя, $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Паколькі $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$, $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$, то $\angle 1 = \angle 2$. Тэарэма даказана.



Рыс. 73

Вуглом паміж дзвюма перасякальнымі прамымі называецца найменшы з утвораных імі вуглоў. Калі пры перасячэнні дзвюх прамых AB і CD (рыс. 73) $\angle DOB = 30^\circ$, то $\angle AOD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$; $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle COB = \angle AOD$ як вертыкальныя. Вугал паміж прамымі AB і CD роўны 30° . Гавораць, што прамыя перасякаюцца пад вуглом 30° .

При пересяченні двох прямих утворюється чотири кути (не лічачи розгорнутих). Калі адзін з іх роўны 90° , то і астатнія роўны па 90° (дакажыце самастойна). Гавораць, што прамыя перасякаюцца пад прамым вуглом.

Вугал паміж паралельнымі прамымі лічыцца роўным 0° .

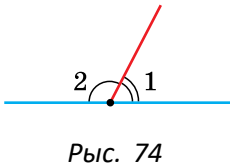


Заданні да § 6

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Сумежныя вуглы адносяцца як $2 : 3$. Знайсці велічыню кожнага з вуглоў.



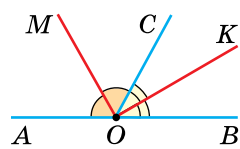
Рыс. 74

Рашэнне. Няхай $\angle 1$ і $\angle 2$ — дадзеныя сумежныя вуглы (рыс. 74). Згодна з умовай $\angle 1 = 2x$, $\angle 2 = 3x$ (градусную меру адной часткі прымаем за x). Па ўласцівасці сумежных вуглоў $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, г. зн. $2x + 3x = 180^\circ$, $5x = 180^\circ$, $x = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$, $\angle 1 = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$;

$\angle 2 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Адказ: 72° , 108° .

Задача 2. а) Знайсці вугал паміж бісектрысамі OK і OM сумежных вуглоў BOC і AOC (рыс. 75), калі $\angle BOC = 70^\circ$. б) Даказаць, што бісектрысы сумежных вуглоў утвараюць прамы вугал.



Рыс. 75

Рашэнне. а) Калі $\angle BOC = 70^\circ$, то $\angle AOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$; $\angle COK = 35^\circ$, $\angle COM = 55^\circ$; $\angle MOK = 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$.

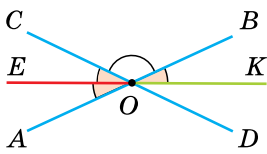
б) Паколькі OM і OK — бісектрысы, то $\angle COM = \frac{1}{2} \angle AOC$, $\angle COK = \frac{1}{2} \angle BOC$.

Разгледзім вугал MOK : $\angle MOK = \angle COM + \angle COK = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOC)$.

Па ўласцівасці сумежных вуглоў $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$. Тады $\angle MOK = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Пры рашэнні задачы 2 можна было спаслацца на ключавую задачу 3* да § 5.

Задача 3*. Даказаць, што бісектрысы вертыкальных вуглоў утвараюць разгорнуты вугал.



Рыс. 76

Рашэнне. Няхай OE і OK — бісектрысы вертыкальных вуглоў AOC і BOD (рыс. 76). Дакажам, што $\angle EOK$ — разгорнуты. Вядома, што бісектрыса дзеліць вугал папалам. Паколькі вертыкальныя вуглы роўныя, то роўныя і іх паловы. Таму $\angle AOE = \angle BOK$. $\angle AOE + \angle EOC + \angle COB = 180^\circ$, бо прамені OA і OB дадатковыя, і таму $\angle AOB$ — разгорнуты. Замяніўшы ў апошняй роўнасці $\angle AOE$ на роўны яму $\angle BOK$, атрымаем $\angle BOK + \angle EOC + \angle COB = 180^\circ$. Адсюль вынікае, што $\angle EOK$ — разгорнуты.

Заўвага. З рашэння задачы вынікае ўласцівасць: «Калі $\angle AOB$ — разгорнуты і $\angle AOE = \angle BOK$, то $\angle AOE$ і $\angle BOK$ — вертыкальныя».



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 30.** Адзін з сумежных вуглоў роўны:
- а) 40° ; б) 75° ; в) $140^\circ 20'$.
- Знайдзіце другі вугал.
- 31.** На рысунку 77 вуглы MON і KON — сумежныя, вугал MON на 70° большы за вугал KON . Знайдзіце $\angle MON$.
- 32.** На рысунку 78 $\angle ABM = 100^\circ$, $\angle CBK = 155^\circ$. Знайдзіце $\angle KBM$.
- 33.** На рысунку 79 сумежныя вуглы AOP і BOP адносяцца як $4 : 5$. Знайдзіце вугал паміж бісектрысай OE вугла BOP і праменем OA .
- 34.** На рысунку 80 AB і CD — дыяметры акружнасці, вугал AOD складае $\frac{1}{2}$ вугла AOC . Знайдзіце вугал BOD .

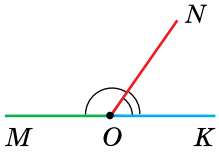


Рис. 77

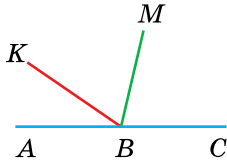


Рис. 78

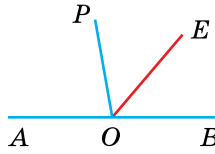


Рис. 79

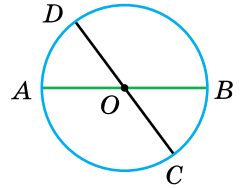


Рис. 80

- 35.** Адзін з вуглоў, утвораных пры перасячэнні дзвюх прамых, роўны:
- а) 20° ; б) 110° ; в) 90° .
- Знайдзіце астатнія тры вуглы.
- 36.** Знайдзіце вуглы 1, 2, 3 і 4 на рысунку 81.
- 37.** На рысунку 82 $\angle 1 + \angle 3 = 250^\circ$. Знайдзіце $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$.
- 38.** Сума вуглоў 1, 2 і 3 роўна 297° (рыс. 83). Знайдзіце суму вуглоў 2, 3 і 4.
- 39.** Вядома, што $2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 900^\circ$ (рыс. 84). Знайдзіце вугал φ (фі).

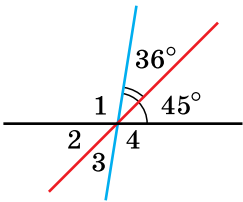


Рис. 81

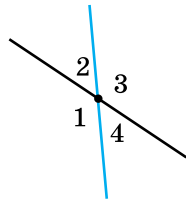


Рис. 82

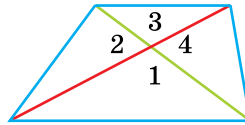


Рис. 83

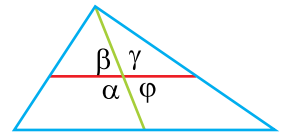


Рис. 84

- 40.** Вуглы 1 і 2 сумежныя. Знайдзіце вугал 1, калі:
- а) $\angle 1 - \angle 2 = 28^\circ$; б) $\angle 1 : \angle 2 = 7 : 2$;
 в) $\angle 1 = \frac{2}{3}\angle 2$; г) $5 \cdot \angle 1 - 7 \cdot \angle 2 = 0$.
- 41.** Прамавугольны аркуш кардону абрэзаны пад вуглом 38° да яго большай стараны. На рысунку 85, а паказана адрэзаная частка. На якім з рысункаў 85, б, 85, в або 85, г паказана другая частка аркуша?

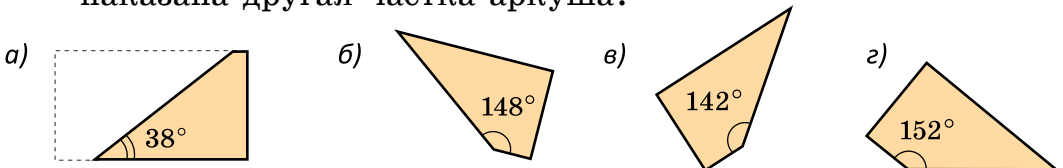
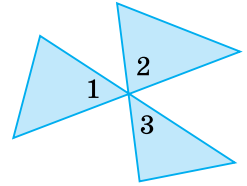


Рис. 85

42*. Знайдзіце суму вуглоў 1, 2 і 3 (рыс. 86).

43*. Пасля таго як адзін з сумежных вуглоў паваротам агульнай стараны вакол вяршыні павялічылі на 40 %, другі вугал паменшыўся на 60 %. Знайдзіце першапачатковую велічыню дадзеных сумежных вуглоў.



Рыс. 86

44*. Праз адзін пункт на плоскасці праходзяць чатыры прамыя, што дзеляць плоскасць на 8 вуглоў, тры з якіх адносяцца як 1 : 2 : 3, а адзін з вуглоў роўны суме трох названых. Знайдзіце кожны вугал.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнні: вугла, роўных вуглоў, бісектрысы вугла, разгорнутага вугла, градуса.
2. Які вугал называецца прамым, вострым, тупым, поўным.
3. Уласцівасць сумежных вуглоў. Уласцівасць вертыкальных вуглоў.

Умеем

1. Даказваць уласцівасць сумежных вуглоў.
2. Даказваць уласцівасць вертыкальных вуглоў.
3. Адкладаць пры дапамозе транспарціра вугал, роўны дадзенаму.

Мадэляванне



Выражце з паперы вугал, роўны 40° . Пры дапамозе перагінання паперы атрымайце вугал, роўны:

- а) 10° ; б) 30° ; в) 140° ; г) 35° .

Даследуйце, якія вуглы, што выражаюцца цэлым лікам градусаў, можна атрымаць з дадзенага вугла шляхам складання.

Гімнастыка розуму

Сямікласнік стаіць тварам да настаўніка фізкультуры. Настаўнік даў навучэнцу каманду павярнуцца 7 разоў налева, 8 разоў направа і 9 разоў кругом. Як цяпер адносна настаўніка стаіць навучэнец:

- а) левым бокам; б) правым бокам;
в) спінай; г) тварам?

