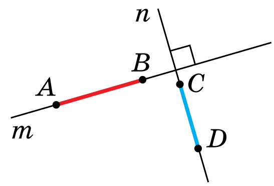
§ 7. Перпендыкулярныя прамыя

Азначэнне. Дзве прамыя называюцца **перпендыкулярнымі**, калі яны перасякаюцца пад прамым вуглом.

Пры перасячэнні дзвюх перпендыкулярных прамых утвараюцца 4 прамыя вуглы.

Адрэзкі і прамені называюцца перпендыкулярнымі, калі яны ляжаць на перпендыкулярных прамых. На рысунку 87 прамыя m і n перпендыкулярныя (часам гавораць «узаемна перпендыкулярныя»), г. зн. $m \perp n$. Тады перпендыкулярныя адрэзкі AB і CD, прамені BA і CD, адрэзак AB і прамая n, паколькі яны ляжаць на перпендыкулярных прамых.

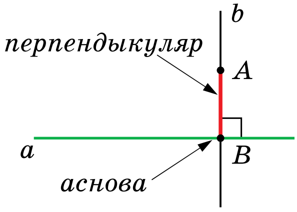


Рыс. 87

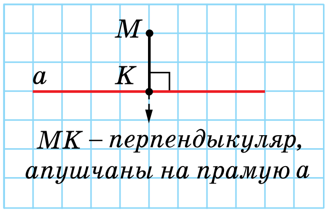
Азначэнне. **Перпендыкулярам** да дадзенай прамой называецца адрэзак, што ляжыць на прамой, перпендыкулярнай да дадзенай, адзін з канцоў якога (*аснова перпендыкуляра*) з'яўляецца пунктам перасячэння гэтых прамых.

Прамая b перпендыкулярна да прамой a (рыс. 88). Адрэзак AB — перпендыкуляр да прамой a, пункт B — аснова перпендыкуляра. Пункт B таксама называюць *праекцыяй* пункта A на прамую a.

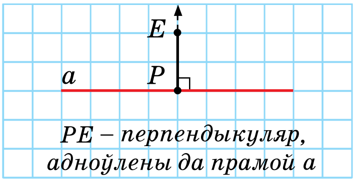
Калі з пункта M, які не ляжыць на прамой a, правесці перпендыкуляр MK да прамой a (рыс. 89), то атрымаецца



Рыс. 88



Рыс. 89

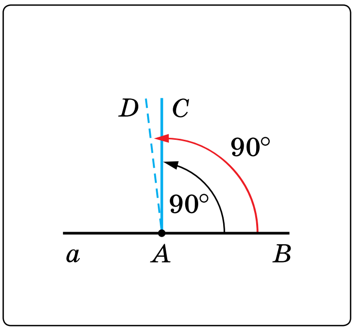


Рыс. 90

перпендыкуляр, апушчаны з пункта M на прамую a.

Калі з пункта P, які ляжыць на прамой a, правесці перпендыкуляр PE да прамой a (рыс. 90), то атрымаецца перпендыкуляр, ***узведзены да прамой a.***

Тэарэма. **Праз пункт, які ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці прамую, перпендыкулярную да гэтай прамой, і толькі адну.**



Рыс. 91

Дадзена: прамая a; пункт A; $A \in a$ (рыс. 91).

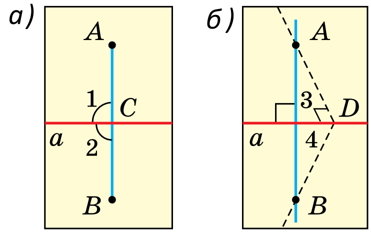
Даказаць: праз пункт A можна правесці прамую, перпендыкулярную да прамой a, і толькі адну.

Доказ. Па аксіёме адкладання вуглоў ад праменя AB у дадзеную паўплоскасць можна адкласці вугал BAC, роўны 90°, і прытым толькі адзін. Тады прамая AC перпендыкулярна да прамой a. Дапусцім, што існуе іншая прамая AD, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярна да прамой a. Тады $\angle BAD = 90°$ і ад праменя AB у дадзеную паўплоскасць будуць адкладзены два вуглы, роўныя 90°: $\angle BAC$ і $\angle BAD$. А гэта немагчыма па аксіёме адкладання вуглоў. Значыць, не існуе іншай прамой, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярна да прамой a.

Тэарэма. **Праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці прамую, перпендыкулярную да гэтай прамой, і прытым толькі адну.**

Дадзена: прамая a; пункт A, $A \notin a$ (рыс. 92).

Даказаць: праз пункт A можна правесці прамую, перпендыкулярную да прамой a, і прытым толькі адну.



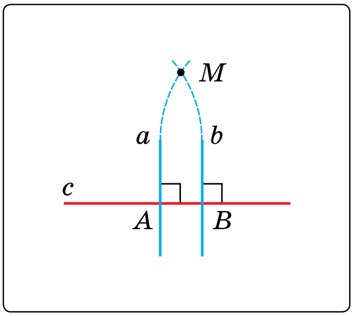
Рыс. 92

Доказ*. 1) Спачатку дакажам, што праз пункт A *можна* правесці прамую, перпендыкулярную да прамой a. Мысленна перагнём аркуш з чарцяжом па прамой a (сумясцім верхнюю паўплоскасць з ніжняй, павярнуўшы яе вакол прамой a) (рыс. 92, *а*). Пункт A зойме некаторае становішча, якое абазначым пунктам B. Вернем паўплоскасці ў ранейшае становішча і правядзём прамую AB. Паколькі вуглы 1 і 2 супадаюць пры накладанні паўплоскасцей, то яны роўныя. А паколькі гэтыя вуглы сумежныя, то кожны з іх роўны $90°$ і $AB \perp a$.

2) Цяпер дакажам, што AB — *адзіная* прамая, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярна да прамой a. Няхай прамая AD таксама перпендыкулярна да прамой a. Тады $\angle 3 = 90°$ (рыс. 92, *б*). Сумясцім паўплоскасці яшчэ раз. Вугал 3 супадзе з вуглом 4, значыць, $\angle 4 = 90°$. Тады $\angle ADB$ — разгорнуты, і праз пункты A і B будуць праходзіць дзве прамыя: раней праведзеная прамая і прамая, што праходзіць праз пункты A, D і B. А гэта немагчыма па аксіёме прамой. Такім чынам, прамая AD не перпендыкулярна да прамой a. Тэарэма даказана.

З дзвюх апошніх тэарэм вынікае, што на плоскасці праз любы пункт можна правесці прамую, перпендыкулярную да дадзенай прамой, і прытым толькі адну.

Тэарэма (аб дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй). **На плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй прамой, паралельныя паміж сабой.**



Рыс. 93

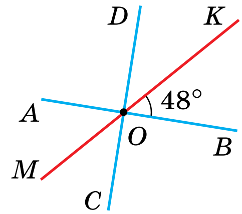
Дадзена: $a \perp c$, $b \perp c$ (рыс. 93).

Даказаць: $a \parallel b$.

Доказ. Калі дапусціць, што прамыя a і b перасякаюцца ў некаторым пункце M, то атрымаецца, што праз пункт M праходзяць дзве прамыя a і b, перпендыкулярныя да трэцяй прамой c, а гэта немагчыма. Такім чынам, прамыя a і b ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца, г. зн. паралельныя паміж сабой. Тэарэма даказана.

Заданні да § 7

РАШАЕМ САМАСТОЙНА



Рыс. 94

45. На рысунку 94 $AB \perp CD$, $\angle KOB = 48°$. Знайдзіце:

а) $\angle COM$; б) $\angle MOD$.

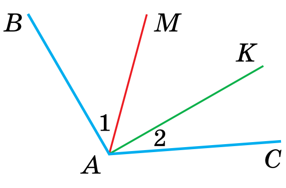
46. Вугал BAC роўны 40°. З пункта A праведзены прамень AK, перпендыкулярны да праменя AB, пункты K і B ляжаць па розныя бакі ад прамой AC. Знайдзіце, які вугал утварае бісектрыса вугла CAK з праменем AB.

47. Прамыя a і b перпендыкулярныя. Праз пункт іх перасячэння праведзена прамая c. Вызначыце колькасць тупых вуглоў, якія ўтварыліся пры гэтым.

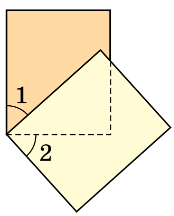
48. На рысунку 95 $AB \perp AK$, $\angle 2 : \angle 1 = 7 : 9$, AM — бісектрыса вугла BAK. Знайдзіце вугал MAC.

49. Два прамавугольнікі маюць агульную вяршыню (рыс. 96). Дакажыце, што вуглы 1 і 2 роўныя.

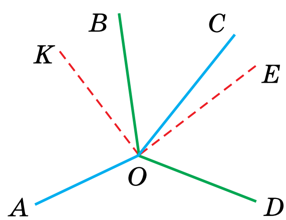
50*. Сума вуглоў AOD і BOC роўна 180°, OK — бісектрыса вугла AOC, OE — бісектрыса вугла BOD (рыс. 97). Дакажыце, што $OK \perp OE$.



Рыс. 95



Рыс. 96



Рыс. 97

Тэарэма, адваротная дадзенай*

Фармулёўка тэарэмы, як правіла, складаецца з дзвюх частак: таго, што дадзена, і таго, што трэба даказаць. Першая частка называецца ўмовай тэарэмы, другая — вывадам. Часта тэарэму фармулююць у форме: «Калі … (умова тэарэмы), то … (вывад тэарэмы)». Напрыклад, тэарэму аб уласцівасці сумежных вуглоў можна сфармуляваць так: «Калі вуглы сумежныя, то іх сума роўна 180°». «Вуглы сумежныя» — гэта ўмова тэарэмы, «сума гэтых двух вуглоў роўна 180°» — вывад.

Калі ўмову і вывад тэарэмы памяняць месцамі, то атрымаецца сцверджанне, адваротнае дадзенаму. Для названай вышэй тэарэмы атрымліваем: «Калі сума двух вуглоў роўна 180°, то гэтыя вуглы сумежныя». Але гэта сцверджанне няправільнае, паколькі можна прывесці прыклад двух вуглоў, напрыклад, роўных 60° і 120°, сума якіх роўна 180°, але якія не з'яўляюцца сумежнымі (пакажыце відарысы такіх вуглоў самастойна). Значыць, прыведзенае сцверджанне не з'яўляецца тэарэмай.

Калі ж правільнае і адваротнае сцверджанне, то яно называецца *тэарэмай, адваротнай дадзенай*. Напрыклад, вядомая тэарэма: «Калі сума лічбаў ліку дзеліцца на 3, то і лік дзеліцца на 3» — і ёй адваротная: «Калі лік дзеліцца на 3, то і сума лічбаў ліку дзеліцца на 3».

Часам прамую і адваротную тэарэмы аб'ядноўваюць, ужываючы пры гэтым словы «тады і толькі тады». Аб'яднаем дадзеныя вышэй тэарэмы: «Лік дзеліцца на 3 тады і толькі тады, калі сума яго лічбаў дзеліцца на 3».

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне перпендыкулярных прамых.
2. Азначэнне перпендыкуляра да прамой.
3. Тэарэму аб прамой, перпендыкулярнай да дадзенай.
4. Уласцівасць дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй.

Умеем

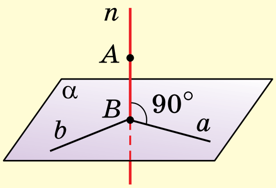
1. Пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка:

   а) апускаць з пункта, які не ляжыць на прамой, перпендыкуляр на дадзеную прамую;

   б) з пункта, які ляжыць на прамой, узводзіць перпендыкуляр дадзенай даўжыні да дадзенай прамой.
2. Даказваць тэарэму аб дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй.

Геаметрыя 3D

Няхай у прасторы прамая n перасякае плоскасць α у пункце B (рыс. 98). Калі прамая n перпендыкулярна да любой прамой плоскасці, якая праходзіць праз пункт B, то яна называецца прамой, перпендыкулярнай да плоскасці. Пішуць $n \perp \alpha$. Адрэзак AB называецца *перпендыкулярам да плоскасці* α.

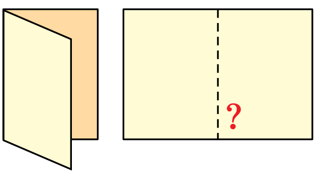


Рыс. 98

Каб прамая n была перпендыкулярна да плоскасці α, дастаткова, каб яна была перпендыкулярна да якіх-небудзь дзвюх прамых плоскасці, што праходзяць праз пункт B. Напрыклад, да прамых a і b.

Задача. *Знайдзіце ў навакольным асяроддзі і назавіце перпендыкуляры да якіх-небудзь плоскасцей.*

Мадэляванне



Рыс. 99

а) Перагніце прамавугольны аркуш паперы так, каб супалі яго ніжнія краі. Выпрастайце аркуш (рыс. 99). Растлумачце, чаму лінія перагібу перпендыкулярна да краю аркуша.

б) На аркушы паперы паказаны прамая a і пункт A (рыс. 100). Выкарыстаўшы толькі перагінанне аркуша паперы, атрымайце перпендыкуляр з дадзенага пункта да дадзенай прамой.

Прапануецца наступнае рашэнне:

1) перагінаем аркуш па прамой a так, каб пункт A быў бачны;

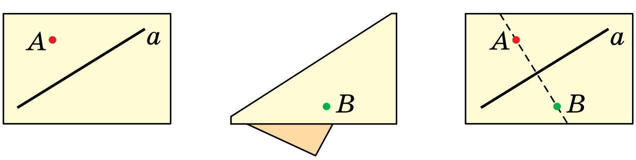
2) праколваем абедзве складзеныя часткі праз пункт A і атрымліваем на другой частцы аркуша пункт B;

3) выпрастаем аркуш;

4) складваем аркуш па прамой, якая праходзіць праз пункты A і B.

Растлумачце, чаму $AB \perp a$.

Прапануйце свой спосаб, звязаны з пунктам а).



Рыс. 100

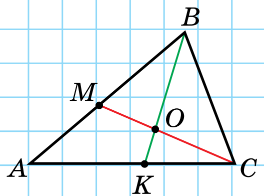
ЗАПАМІНАЕМ

1. Сума сумежных вуглоў роўна 180°.
2. Вертыкальныя вуглы роўныя.
3. На плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой.
4. На плоскасці праз любы пункт можна правесці прамую, перпендыкулярную да дадзенай прамой, і прытым толькі адну.

Правяраем сябе

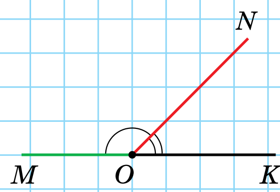
Заданне 1

Выпішыце ўсе пары сумежных вуглоў, усе пары вертыкальных вуглоў, паказаных на рысунку.



Заданне 2

$\angle NOK$ у 3 разы меншы за $\angle MON$. Знайдзіце вугал паміж бісектрысай вугла MON і праменем OK.



Заданне 3

Для вуглоў 1, 2, 3 і 4 сума нейкіх двух з іх на 100° большая за суму двух астатніх. Знайдзіце вуглы 1, 2, 3 і 4.