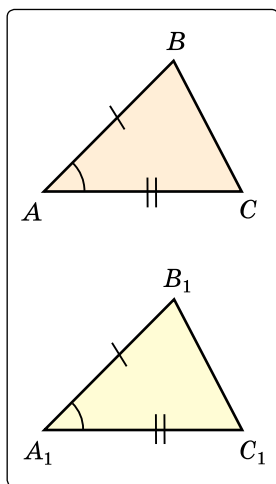


57. Перыметр трохвугольніка роўны 90 см. Адна са старон трохвугольніка на 2 см меншая за другую старану і ў 2 разы меншая за трэцюю. Знайдзіце стараны трохвугольніка.
58. На старане AD квадрата $ABCD$ пабудаваны роўнастаронні трохвугольнік ADK , дзе пункт K ляжыць унутры квадрата. Знайдзіце адносіну перыметра квадрата да перыметра многавугольніка $ABCDK$.
59. Перыметр трохвугольнага ўчастка роўны 36 м. Стараны ўчастка адносяцца як $2 : 3 : 4$. Знайдзіце даўжыню кожнай стараны ўчастка.
60. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік ABC . На старане AB адзначана яго сярэдзіна M . На адрэзку MB адзначана яго сярэдзіна K . Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC , калі $MK = 12$ см.
61. У прамавугольнай сістэме каардынат адзначаны пункты $A(-4; 4)$, $B(-4; 0)$, $C(3; 0)$, пункт $O(0; 0)$ — пачатак каардынат. Класіфікуйце трохвугольнікі ABO , AOC і ABC адносна старон і адносна вуглоў.
- 62*. Дакажыце, што калі кожную старану трохвугольніка павялічыць у 3 разы, то і яго перыметр павялічыцца таксама ў 3 разы, а калі павялічыць у k разоў, то і перыметр павялічыцца ў k разоў.

§ 9. Першая і другая прыметы роўнасці трохвугольнікаў

Пры высвятленні, ці роўныя трохвугольнікі, няма неабходнасці выяўляць роўнасць усіх іх адпаведных старон і вуглоў шляхам накладання або вымярэння. Наступныя дзве тэарэмы гарантуюць роўнасць трохвугольнікаў пры роўнасці некаторых адпаведных старон і вуглоў.

Тэарэма (першая прымета роўнасці трохвугольнікаў). Калі дзве стараны і вугал паміж імі аднаго трохвугольніка адпаведна роўны дзвюм старанам і вуглу паміж імі другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.



Рыс. 108

Дадзена:

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рыс. 108).

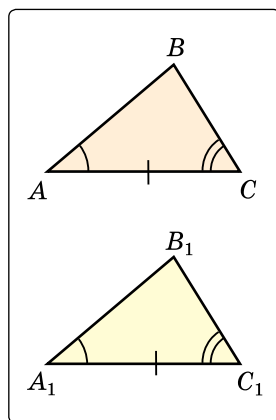
Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказ. Накладзём трохвугольнік ABC на трохвугольнік $A_1B_1C_1$ так, каб супалі роўныя вуглы A і A_1 , прамень AB супаў з праменем A_1B_1 , а прамень AC супаў з праменем A_1C_1 . Паколькі адрэзкі AB і A_1B_1 роўныя, то яны супадуць пры накладанні, вяршыня B супадзе з вяршыняй B_1 . Аналагічна супадуць роўныя адрэзкі AC і A_1C_1 , вяршыня C супадзе з вяршыняй C_1 . Трохвугольнікі супадуць цалкам, бо супадуць іх вяршыні. Такім чынам, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Тэарэма даказана.

Гавораць, што дзве стараны і вугал паміж імі задаюць трохвугольнік адназначна.

Тэарэма (другая прымета роўнасці трохвугольнікаў). Калі старана і два прылеглыя да яе вуглы аднаго трохвугольніка адпаведна роўны старане і двум прылеглым да яе вуглам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.



Рыс. 109

Дадзена:

$AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рыс. 109).

Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказ. Накладзём трохвугольнік ABC на трохвугольнік $A_1B_1C_1$ так, каб супалі роўныя стараны AC і A_1C_1 , вугал A супаў з роўным вуглом A_1 , а вугал C — з роўным вуглом C_1 . Тады прамень AB супадзе з праменем A_1B_1 , прамень CB — з праменем C_1B_1 , а вяршыня B супадзе з вяршыняй B_1 (пункт B будзе належаць і прамой A_1B_1 , і прамой C_1B_1 і таму супадзе з пунктам іх перасячэння B_1). Трох-

вугольнікі супадуць цалкам, паколькі супадуць іх вяршыні. Такім чынам, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

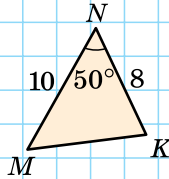
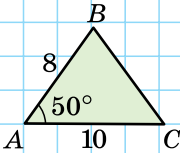
Тэарэма даказана.

Гавораць, што старана і два прылеглыя да яе вуглы задаюць трохвугольнік адназначна.

А цяпер выканайце **Заданне 1** і **Заданне 2**.

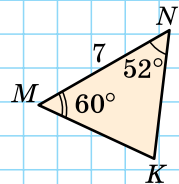
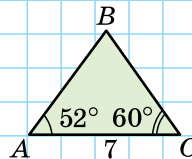
Заданне 1

Які вугал трохвугольніка MNK роўны вуглу B трохвугольніка ABC ? Растлумачце адказ.



Заданне 2

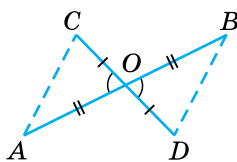
Якая старана трохвугольніка MNK роўна старане AB трохвугольніка ABC ? Растлумачце адказ.



Заданні да § 9

РАШАЕМ РАЗАМ ключавыя задачы

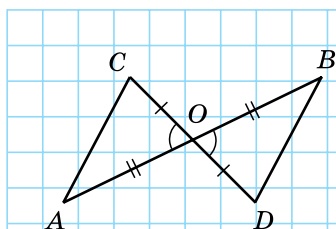
Задача 1. Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў іх сярэдзінах. Даказаць, што адлегласці паміж пунктамі A і C , B і D роўныя.



Рыс. 110

Доказ. Няхай O — пункт перасячэння адрэзкаў AB і CD (рыс. 110). Разгледзім $\triangle AOC$ і $\triangle BOD$. У іх $AO = OB$, $CO = OD$ па ўмове, $\angle AOC = \angle BOD$ як вертыкальныя. Трэхвугольнікі роўныя па дзвюх старанам і вугле паміж імі, г. зн. па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Стораны AC і BD роўныя, паколькі ў роўных трохвугольніках супраць роўных вуглоў ляжаць роўныя стораны.

Дадзім магчымае кароткае афармленне рашэння задачы.



Дадзена: $AO = OB$, $CO = OD$.

Даказаць: $AC = BD$.

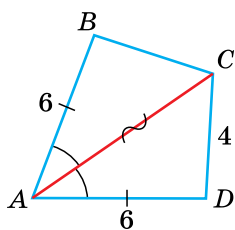
Доказ.

1) $\triangle AOC$ і $\triangle BOD$:

$AO = OB$, $CO = OD$ па ўмове,
 $\angle AOC = \angle BOD$ як вертыкальныя,
 $\triangle AOC = \triangle BOD$ па 1-й прымеце.

2) $AC = BD$. \square

Задача 2. Дадзена простая замкнёная ломаная $ABCD$, у якой $AB = AD = 6$ см, $CD = 4$ см і прамень AC з'яўляецца бісектрысай вугла BAD . Знайсці даўжыню ломанай $ABCD$.



Рыс. 111

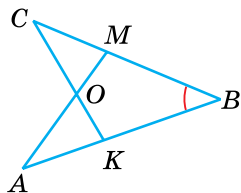
Рашэнне. У трохвугольнікаў ABC і ADC старана AC — агульная (рыс. 111), $AB = AD$ па ўмове, $\angle BAC = \angle DAC$, бо AC — бісектрыса вугла BAD . Гэтыя трохвугольнікі роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Адсюль $BC = CD$ як адпаведныя стораны ў двух роўных трохвугольніках.

Даўжыня ломанай $ABCD$:

$AB + BC + CD + AD = 6 + 4 + 4 + 6 = 20$ (см).

Адказ: 20 см.

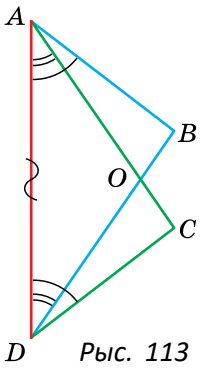
Задача 3. На старанах вугла B адкладзены адрэзкі: $BA = BC$, $AK = CM$ (рыс. 112). Даказаць, што $\angle A = \angle C$.



Рыс. 112

Доказ. Разгледзім трохвугольнікі ABM і CBK . У іх $\angle B$ — агульны, $AB = CB$ па ўмове, $MB = KB$, паколькі $MB = CB - CM$, $KB = AB - AK$ (калі ад роўных адрэзкаў адняць роўныя, атрымаюцца роўныя адрэзкі). Трохвугольнікі ABM і CBK роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle A = \angle C$ (у роўных трохвугольніках супраць роўных старон ляжаць роўныя вуглы).

Задача 4. На рысунку 113 $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle CAD = \angle BDA$. Дакажаць роўнасць трохвугольнікаў AOB і DOC .



Рыс. 113

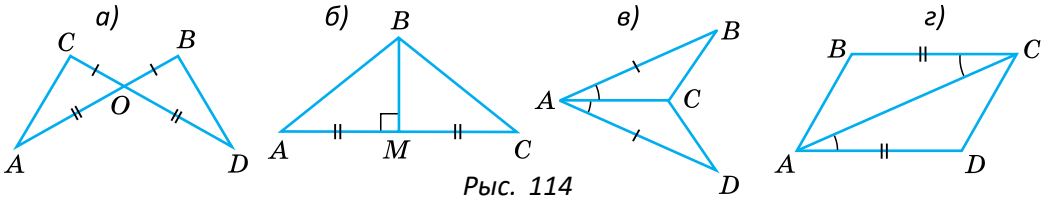
Доказ. Паколькі $\triangle ABD = \triangle DCA$ па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў (старана AD — агульная, вуглы пры старане AD адпаведна роўныя па ўмове), то $AB = DC$, $\angle B = \angle C$. Паколькі $\angle BAO = \angle BAD - \angle CAD$, $\angle CDO = \angle CDA - \angle BDA$, то $\angle BAO = \angle CDO$ (калі ад роўных вуглоў адняць роўныя, атрымаюцца роўныя вуглы). Тады $\triangle AOB = \triangle DOC$ па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

63. Выкарыстаўшы даныя на рысунках 114, а—г, дакажыце, што:

- а) $\triangle AOC = \triangle DOB$; б) $\triangle ABM = \triangle CBM$;
- в) $\triangle ACB = \triangle ACD$; г) $\triangle ABC = \triangle ADC$.

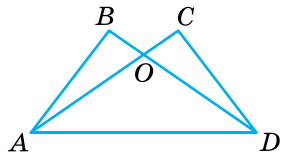


Рыс. 114

64. На рысунку 115 $AC = DB$, $\angle CAD = \angle BDA$. Дакажыце, што:

- а) $\angle B = \angle C$; б) $\angle BAC = \angle CDB$.

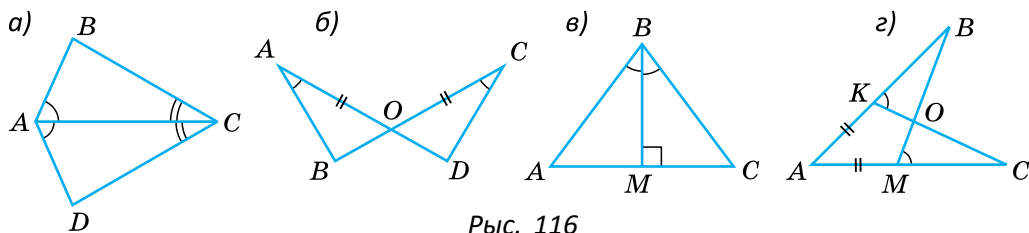
65. У простае замкнёнай ломанай $ABCD$, $BC = AD = 10$ дм, $\angle ACB = \angle CAD$, $AB = 8$ дм. Знайдзіце даўжыню ломанай $ABCD$.



Рыс. 115

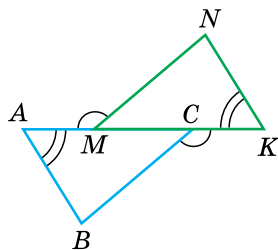
66. Выкарыстаўшы даныя на рысунках 116, а—г, дакажыце, што:

- а) $\triangle ABC = \triangle ADC$;
- б) $\triangle AOB = \triangle COD$ (дзе $AO = CO$);
- в) $\triangle ABM = \triangle CBM$;
- г) $\triangle ABM = \triangle ACK$; $\triangle KBO = \triangle MCO$.



Рыс. 116

67. Дадзены чатырохвугольнік $ABCD$, у якога $AB = 9$ см, $AD = 12$ см, $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. Знайдзіце перыметр гэтага чатырохвугольніка.
68. Дадзены адрэзак AD . У адной паўплоскасці адносна прамой AD ляжаць пункты B і C такія, што $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle BAC = \angle CDB$. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў AC і CD , калі $AB = 5$ см, $BD = 6$ см.
69. AB і CD — дыяметры адной акружнасці з цэнтрам O . Дакажыце, што:
- хорда AC роўна хордзе BD ;
 - $\triangle ADC = \triangle DAB$.
70. На рысунку 117 $\angle BAC = \angle NKM$, $\angle AMN = \angle KCB$, $AM = KC$. Дакажыце, што:
- $\triangle ABC = \triangle KNM$;
 - $AN = KB$.
- 71*. Роўныя адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O так, што $OD = OB$. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў ABC і CDA .



Рыс. 117

- 72*. На старанах вугла A адкладзены роўныя адрэзкі AB і AC . На адрэзку AB адзначаны пункт M , на адрэзку AC — пункт K так, што $\angle ABK = \angle ACM$. Адрэзкі BK і CM перасякаюцца ў пункце O . Дакажыце, што $\triangle MOB = \triangle KOC$.
- 73*. Пры дапамозе прыкладу пакажыце, што калі ў $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle B = \angle B_1$, то гэтыя трохвугольнікі не абавязкова роўныя.
- 74*. На каардынатнай плоскасці пабудуйце $\triangle AOB$ і $\triangle A_1OB_1$, дзе $A(5; 1)$, $B(2; 6)$, $A_1(-5; -1)$, $B_1(-2; -6)$. Дакажыце, што $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Як знайсці перыметр трохвугольніка, многавугольніка.
2. Якія трохвугольнікі называюцца роўнымі.
3. Першую і другую прыметы роўнасці трохвугольнікаў.

Умеем

1. Даказваць першую і другую прыметы роўнасці трохвугольнікаў.
2. Будаваць чарцёж трохвугольніка па дадзеных памерах яго старон і вуглоў пры дапамозе лінейкі і транспарціра.

§ 10. Вышыня, медыяна і бісектрыса трохвугольніка

У трохвугольніка, акрамя трох старон, трох вяршынь і трох вуглоў, ёсць таксама іншыя элементы — *вышыня, медыяна і бісектрыса*.

Азначэнне. **Вышынёй** трохвугольніка (рыс. 118, *а*) называецца перпендыкуляр, апущаны з вяршыні трохвугольніка на процілеглую старану або на яе прадаўжэнне (адрэзак BH).

Азначэнне. **Медыянай** трохвугольніка (рыс. 118, *б*) называецца адрэзак, які злучае вяршыню трохвугольніка з сярэдзінай процілеглай стараны (адрэзак BM).

Азначэнне. **Бісектрысай** трохвугольніка (рыс. 118, *в*) называецца адрэзак бісектрысы вугла трохвугольніка, які злучае вяршыню трохвугольніка з пунктам перасячэння бісектрысы з процілеглай стараной (адрэзак BK).