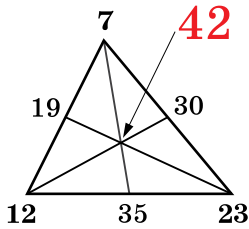


Гімнастыка розуму

Рыс. 125

У вяршынях трохвугольніка запішам па адным адвольным ліку. Напрыклад, лікі 12; 7 і 23 (рыс. 125). Знойдзем сумы лікаў, якія стаяць каля канцоў кожнай стараны. Запішам атрыманыя сумы пасярэдзіне гэтых старон: $12 + 7 = 19$, $12 + 23 = 35$ і $23 + 7 = 30$.

Далей правядзём медыяны і знойдзем сумы лікаў, запісаных каля канцоў кожнай медыяны. Атрымаем: $7 + 35 = 42$, $12 + 30 = 42$, $23 + 19 = 42$. Усе тры сумы аднолькавыя і роўны 42!

Нарысуйце ў сшытку трохвугольнік і запішыце ў яго вяршынях тры свае лікі. Выканайце апісаныя вышэй аперацыі і знайдзіце сумы лікаў, запісаных каля канцоў кожнай медыяны. Калі вы ўсё рабілі правільна, то атрымаеце тры аднолькавыя сумы. Як вы гэта растлумачыце?

§ 11. Раўнабедраны трохвугольнік

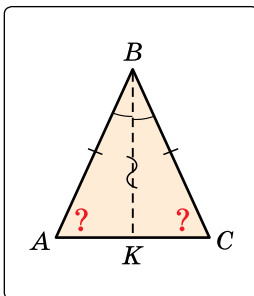
Азначэнне. Трохвугольнік называецца **раўнабедраным**, калі ў яго дзве стараны роўныя.

Роўныя стараны называюцца **бакавымі** старанамі, трэцяя старана — **асновай**, вяршыня, процілеглая аснове, — **вяршыняй** раўнабедранага трохвугольніка.

Разгледзім некаторыя ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка і адну з яго прымет.

Тэарэма (аб уласцівасці вуглоў пры аснове).

У раўнабедраным трохвугольніку вуглы пры аснове роўныя.



Рыс. 126

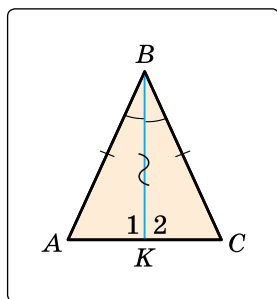
Дадзена: $\triangle ABC$, $AB = BC$ (рыс. 126).

Даказаць: $\angle A = \angle C$.

Доказ. Правядзём бісектрысу BK трохвугольніка ABC . Трохвугольнікі ABK і CBK роўныя па дзвюх старанам і вугле паміж імі: старана BK — агульная, $AB = BC$ па ўмове, вуглы ABK і CBK роўныя па азначэнні бісектрысы. З роўнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае, што $\angle A = \angle C$. Тэарэма даказана.

Тэарэма (аб уласцівасці бісектрысы раўнабедранага трохвугольніка).

У раўнабедраным трохвугольніку бісектрыса, праведзеная да асновы, з'яўляецца яго медыянай і вышынёй.



Рыс. 127

Дадзена: $\triangle ABC$, $AB = BC$, BK — бісектрыса (рыс. 127).

Даказаць: BK — медыяна і вышыня.

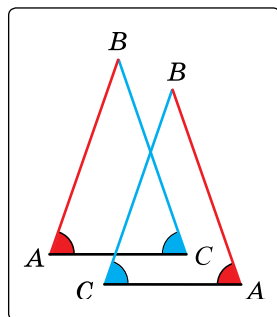
Доказ. Трохвугольнікі ABK і CBK роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі (гл. папярэднюю тэарэму). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $AK = KC$ і $\angle 1 = \angle 2$. Паколькі вуглы 1 і 2 сумежныя, то іх сума роўна 180° , таму $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$. Значыць, BK — медыяна і вышыня.

Тэарэма даказана.

Заўвага. Паколькі з вяршыні трохвугольніка можна правесці толькі адну бісектрысу, адну вышыню і адну медыяну, то змешчаную вышэй тэарэму можна сфармуляваць так: «*Бісектрыса, вышыня і медыяна раўнабедранага трохвугольніка, праведзеныя з вяршыні да асновы, супадаюць*». Гэта значыць, што калі па ўмове задачы дадзена вышыня раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, то паводле дадзенай тэарэмы яна будзе таксама бісектрысай і медыянай. Аналагічна, калі дадзена медыяна раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, то яна будзе вышынёй і бісектрысай.

Тэарэма (прымета раўнабедранага трохвугольніка).

Калі ў трохвугольніку два вуглы роўныя, то ён раўнабедраны.



Рыс. 128

Дадзена: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle C$.

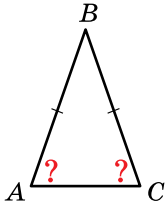
Даказаць: $AB = BC$.

Доказ. Мысленна перавернем трохвугольнік ABC адваротным бокам (рыс. 128) і накладзём перавернуты трохвугольнік на трохвугольнік ABC так, каб вугал C супаў з вуглом A , вугал A супаў з вуглом C . Тады перавернуты трохвугольнік сумесціцца з дадзеным і старана BC сумесціцца са стара-

ной AB . Такім чынам, $AB = BC$, г. зн. $\triangle ABC$ — раўнабедраны. Тэарэма даказана.

Даказаная прымета раўнабедранага трохвугольніка з'яўляецца тэарэмай, адваротнай тэарэме аб уласцівасці вуглоў пры аснове раўнабедранага трохвугольніка (рыс. 129).

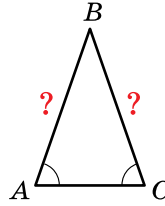
Тэарэма. *Калі трохвугольнік раўнабедраны, то вуглы пры яго аснове роўныя.*



Дадзена:
 $\triangle ABC$,
 $AB = BC$.

Даказаць:
 $\angle A = \angle C$.

Адваротная тэарэма. *Калі ў трохвугольніку два вуглы роўныя, то ён раўнабедраны.*



Дадзена:
 $\triangle ABC$,
 $\angle A = \angle C$.

Даказаць:
 $AB = BC$.

Рыс. 129

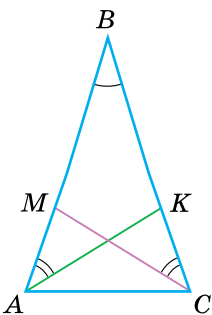
Нагадаем, што любая тэарэма складаецца з умовы — таго, што дадзена, і вываду — таго, што трэба даказаць. У тэарэмы, адваротнай дадзенай, умовай з'яўляецца вывад дадзенай тэарэмы, а вывадам — умова дадзенай тэарэмы.



Заданні да § 11

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць, што ў раўнабедраным трохвугольніку бісектрысы, праведзеныя да бакавых старон, роўныя паміж сабой.*

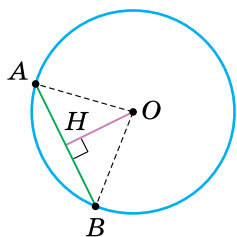


Рыс. 130

Доказ. Няхай у трохвугольніку ABC $AB = BC$, AK і CM — бісектрысы (рыс. 130). Трэба даказаць, што $AK = CM$. Разгледзім $\triangle АКВ$ і $\triangle СМВ$. У іх $\angle B$ — агульны, $AB = BC$ па ўмове, $\angle ВАК = \angle ВСМ$ як паловы роўных вуглоў A і C пры аснове раўнабедранага трохвугольніка. Тады $\triangle АКВ = \triangle СМВ$ па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў, адкуль $AK = CM$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Другім спосабам доказу будзе разгляд $\triangle AKC$ і $\triangle CMA$ і доказ іх роўнасці.

Задача 2. *Даказаць, што перпендыкуляр, праведзены з цэнтра акружнасці да хорды, дзеліць гэту хорду папалам.*



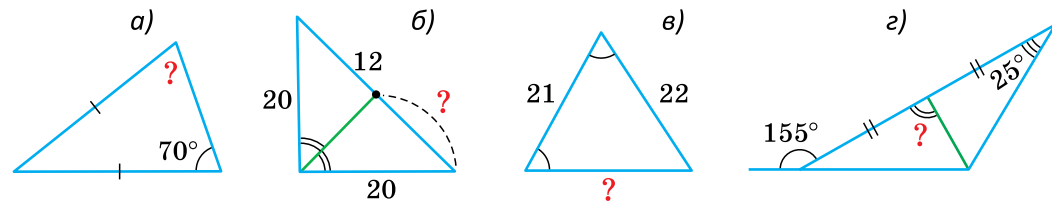
Рыс. 131

Доказ. Няхай O — цэнтр акружнасці, AB — хорда, OH — перпендыкуляр да хорды AB (рыс. 131). Адрэзкі OA і OB роўныя як радыусы. Таму трохвугольнік AOB — раўнабедраны, а OH — яго вышыня, праведзеная да асновы. Мы ведаем, што вышыня раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, з'яўляецца і медыянай. А медыяна дзеліць старану трохвугольніка папалам, г. зн. $AH = HB$. Што і трэба было даказаць.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

83. Знайдзіце адрэзак або вугал, абазначаныя пыталнікам (рыс. 132). Растлумачце свой адказ.



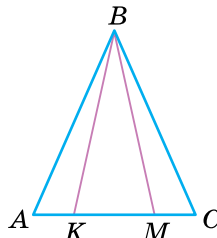
Рыс. 132

84. Дадзены трохвугольнік ABC , у якога $\angle A = \angle B$, $AB + BC = 12$ см, $AC + BC = 16$ см. Знайдзіце перыметр $\triangle ABC$.

85. У трохвугольніку ABC $AC = AB = 12$ м, $P_{ABC} = 32$ м, AK — вышыня трохвугольніка. Знайдзіце адрэзак CK .

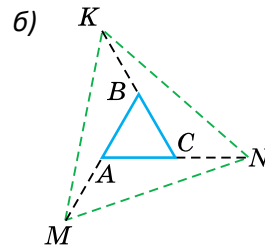
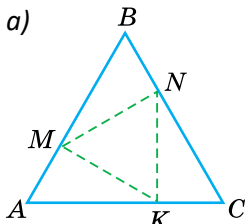
86. Трохвугольнік ABC — роўнастаронні, CK — яго бісектрыса, $AK = 7,5$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC .

87. На рысунку 133 трохвугольнік ABC — раўнабедраны, дзе $AB = BC$. Дакажыце, што трохвугольнік KBM таксама раўнабедраны, калі:
а) $AK = CM$; б) $AM = CK$; в) $\angle AVK = \angle CBM$.



Рыс. 133

88. Дакажыце, што сярэдзіны старон раўнабедранага трохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі іншага раўнабедранага трохвугольніка.
89. Дакажыце ўласцівасць вуглоў роўнастаронняга трохвугольніка: «У роўнастароннім трохвугольніку ўсе вуглы роўныя паміж сабой». Сфармулюйце сцверджанне, адваротнае дадзенаму (прымету роўнастаронняга трохвугольніка). Дакажыце яе.
90. Аснова раўнабедранага трохвугольніка адносіцца да яго бакавой стараны як $2 : 3$. Перыметр трохвугольніка роўны 72 см. Знайдзіце аснову трохвугольніка.
91. У раўнабедраным трохвугольніку MNK ($KM = KN$) праведзена бісектрыса KE , роўная 24 см. Перыметр трохвугольніка KEN роўны 56 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка MNK .
92. Дакажыце, што медыяны раўнабедранага трохвугольніка, праведзеныя да бакавых старон, роўныя паміж сабой.
93. Трохвугольнік ABC — раўнабедраны, $AB = BC$. На прамені AC за пункт C адкладзены адрэзак CM , на прамені CA за пункт A адкладзены адрэзак AK такі, што $AK = CM$. Дакажыце, што трохвугольнік MVK раўнабедраны.
94. Дакажыце, што дыяметр акружнасці, які праходзіць праз сярэдзіну хорды (што не з'яўляецца дыяметрам), перпендыкулярны гэтай хордзе.
- 95*. У трохвугольніку MNK праведзена бісектрыса ME . Вядома, што $\angle MKN + \angle NME = \angle MNK + \angle KME$, $KE = 4$ см, $MN = 9$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка MNK .
- 96*. Трохвугольнік ABC — роўнастаронні (рыс. 134, а, б). Дакажыце, што трохвугольнік MNK — роўнастаронні, калі:
а) $MB = 2AM$, $NC = 2BN$, $AK = 2KC$;
б) $AM = AB$, $CN = AC$, $BK = BC$.



Рыс. 134

97*. У раўнабедраным трохвугольніку ABC праведзены бісектрысы AK і CM да бакавых старон. Бісектрысы перасякаюцца ў пункце O . Дакажыце, што $\triangle AOM = \triangle COK$.



98*. Адна старана пралёта моста ўяўляе сабой аб'яднанне сямі роўных раўнабедраных трохвугольнікаў, звараных з металічных бэлек (рыс. 135). Перыметр аднаго такога трохвугольніка роўны 11 м. На выраб адной стараны пралёта моста пайшло 59 м металічных бэлек. Вызначыце даўжыню (па нізе) усяго пралёта.



Рыс. 135

99*. На старанах вугла A адкладзены роўныя адрэзкі AB і AC . На адрэзку AB адзначаны пункт M , на адрэзку AC — пункт K так, што $\angle ABK = \angle ACM$. Адрэзкі BK і CM перасякаюцца ў пункце O . Дакажыце, што трохвугольнік $МОК$ раўнабедраны.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнні вышыні, медыяны і бісектрысы трохвугольніка.
2. Азначэнне раўнабедранага трохвугольніка, назвы яго старон і вуглоў.
3. Уласцівасць вуглоў раўнабедранага трохвугольніка.
4. Уласцівасць бісектрысы раўнабедранага трохвугольніка.
5. Прымету раўнабедранага трохвугольніка, звязаную з вугламі.

Умеем

1. Даказваць тэарэму аб уласцівасці вуглоў раўнабедранага трохвугольніка.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці бісектрысы раўнабедранага трохвугольніка.
- 3*. Даказваць прымету раўнабедранага трохвугольніка.