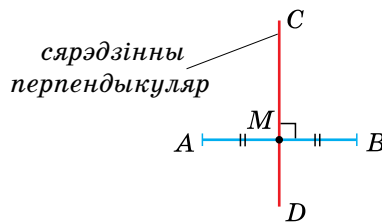


§ 14. Сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка

Азначэнне. **Сярэдзінным перпендыкулярам** да адрэзка называецца прамая, якая перпендыкулярна да гэтага адрэзка і праходзіць праз яго сярэдзіну.

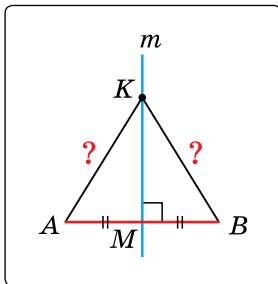
Прамая CD — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB , г. зн. $CD \perp AB$ і $AM = MB$ (рыс. 152).



Рыс. 152

Тэарэма (аб сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка). Любы пункт сярэдзіннага перпендыкуляра да адрэзка роўнаадалены ад канцоў гэтага адрэзка. Калі пункт роўнаадалены ад канцоў адрэзка, то ён ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да гэтага адрэзка.

У дадзенай тэарэме два сцверджанні: прамое і яму адваротнае. Дакажам кожнае з гэтых сцверджанняў асобна.

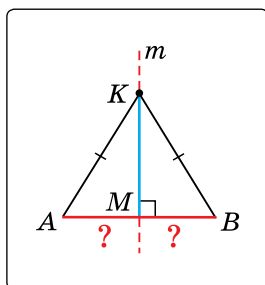


Рыс. 153

1) Дадзена: m — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB , $K \in m$ (рыс. 153).

Даказаць: $KA = KB$.

Доказ. Па азначэнні сярэдзіннага перпендыкуляра $KM \perp AB$, $AM = MB$. Тады ў трохвугольніку AKB вышыня KM з'яўляецца медыянай. Па прымеце раўнабедранага трохвугольніка $\triangle AKB$ — раўнабедраны, таму $KA = KB$.



Рыс. 154

2) Дадзена: $KA = KB$ (рыс. 154).

Даказаць: $K \in m$, дзе m — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB .

Доказ. Правядзём у раўнабедраным трохвугольніку AKB вышыню KM , якая па ўласціvasці раўнабедранага трохвугольніка будзе і медыянай. Атрымаем $KM \perp AB$, $AM = MB$. Прамая m , што змяшчае вышыню KM , — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB . Тэарэма даказана.

Геаметрычным месцам пунктаў плоскасці (або прасторы) называецца мноства ўсіх пунктаў плоскасці (або прасторы), якія маюць агульную ўласцівасць.

З даказанай тэарэмы вынікае, што сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка — гэта геаметрычнае месца пунктаў плоскасці, роўнаадаленых ад канцоў адрэзка.

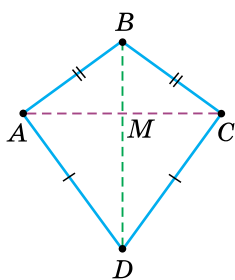


Заданні да § 14

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. У чатырохвугольніку $ABCD$ $AB = BC$, $AD = DC$ (рыс. 155). Даказаць, што $AC \perp BD$.

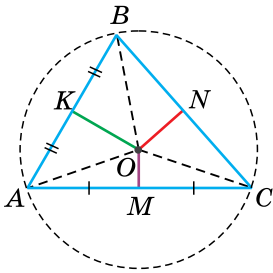


Рыс. 155

Доказ. 1-ы спосаб. З роўнасці трохвугольнікаў ABD і CBD па трох старанах вынікае, што $\angle ABD = \angle CBD$. У раўнабедраным трохвугольніку ABC бісектрыса BM з'яўляецца і вышыняй. Таму $AC \perp BD$.

2-і спосаб. Пункты B і D роўнаадалены ад канцоў адрэзка AC , таму яны ляжаць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка AC . Паколькі праз два пункты праходзіць адзіная прамая, то BD — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AC . Адсюль $AC \perp BD$ і $AM = MC$.

Задача 2 (1-ы адметны пункт трохвугольніка). Даказаць, што сярэдзінны перпендыкуляр да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце.



Рыс. 156

Доказ. Няхай два сярэдзінныя перпендыкуляры да старон AC і AB перасякаюцца ў пункце O (рыс. 156). Пункт O ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры OM , таму $OA = OC$. Пункт O ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры OK , таму $OA = OB$. Адсюль $OB = OC$. Паколькі пункт O роўнаадалены ад канцоў адрэзка BC , то ён ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка BC .

Такім чынам, трэці сярэдзінны перпендыкуляр пройдзе праз пункт O , і ўсе тры сярэдзінныя перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце.

Зайвагі. 1. Калі ножку цыркуля паставіць у пункт O і пабудаваць акружнасць радыусам OA , то яна пройдзе праз усе вяршыні трохвугольніка з прычыны таго, што $OA = OB = OC$. Такая акружнасць называецца *апісанай каля трохвугольніка*. У дадзенай задачы мы даказалі, што цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць у пункце перасячэння сярэдзінных перпендыкуляраў да яго старон.

2. Пункт перасячэння сярэдзінных перпендыкуляраў да старон трохвугольніка — гэта яшчэ адзін адметны пункт трохвугольніка, акрамя ўжо вядомых вам пунктаў перасячэння бісектрыс, медыян, вышынь.

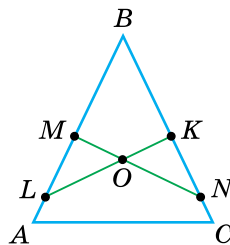


РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 119.** Пункт M ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка AB , $AM + MB = 15$ м. Знайдзіце адрэзак MA .
- 120.** Прамая a перпендыкулярна да адрэзка AB і праходзіць праз яго сярэдзіну K . Пункт M належыць прамой a , $\angle AMB = 84^\circ$. Знайдзіце $\angle BMK$.
- 121.** Сярэдзінны перпендыкуляр да стараны AC трохвугольніка ABC перасякае старану BC у пункце K . Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABK , калі $AB = 5$ см, $BC = 7$ см.
- 122.** Пункты M і K ляжаць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка AB па розныя бакі ад прамой AB , $MA = 16$ см, $KB = 12$ см. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $AMBK$.

123. Дакажыце, што сярэдзінны перпендыкуляр да хорды акружнасці праходзіць праз цэнтр акружнасці.

124. Сярэдзінныя перпендыкуляры KL і MN да бакавых старон BC і AB раўнабаднага трохвугольніка ABC перасякаюцца ў пункце O (рыс. 157). Дакажыце, што:



Рыс. 157

а) $MN = KL$; б) $MO = KO$.

125. Дзве акружнасці рознага радыуса з цэнтрамі ў пунктах O_1 і O_2 перасякаюцца ў пунктах A і B . Дакажыце, што лінія цэнтраў O_1O_2 перпендыкулярна да агульнай хорды AB гэтых акружнасцей.

126*. Знайдзіце геаметрычнае месца вяршынь раўнабадных трохвугольнікаў з дадзенай асновай.

127*. Па адзін бок ад прамой a размешчаны пункты A і B . На прамой a знайдзіце пункт M такі, каб адлегласці ад пункта M да пунктаў A і B былі роўныя.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Прыметы раўнабаднага трохвугольніка.
2. Тэарэму аб сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка.
3. Адрэзкія пункты трохвугольніка.

Умеем

1. Даказаць тэарэму «Калі ў трохвугольніку вышыня з'яўляецца медыянай, то трохвугольнік раўнабадраны».
2. Даказаць тэарэму «Калі ў трохвугольніку вышыня з'яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік раўнабадраны».
- 3*. Даказаць тэарэму «Калі ў трохвугольніку медыяна з'яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік раўнабадраны».
- 4*. Даказаць тэарэму аб сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка.

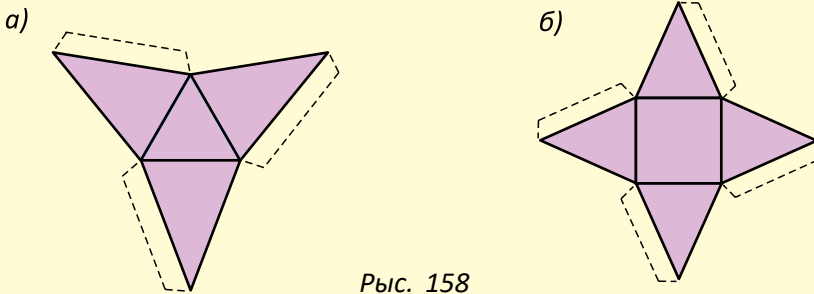
Геаметрыя 3D

Са шчыльнай паперы зрабіце разгортку:

а) трохвугольнай піраміды, у якой у аснове ляжыць роўнастаронні трохвугольнік са стараной 10 см, а ўсе бакавыя грані — раўнабедраныя трохвугольнікі з бакавой стараной, роўнай 13 см (рыс. 158, а);

б) чатырохвугольнай піраміды, у якой у аснове ляжыць квадрат са стараной 9 см, а ўсе бакавыя грані — раўнабедраныя трохвугольнікі з бакавой стараной, роўнай 12 см (рыс. 158, б).

Склеіце піраміды па дадзеных разгортках, злучыўшы разам вяршыні раўнабедраных трохвугольнікаў.



Рыс. 158

Мадэляванне



Маша вучыцца ў будаўнічым каледжы. На практычных занятках ёй даручылі прасвідраваць адтуліну ў цэнтры металічнага круга. Каб знайсці цэнтр круга, дзяўчына начарціла хорду, затым пры дапамозе рулеткі адзначыла яе сярэдзіну. Выкарыстаўшы вугольнік, яна пабудавала перпендыкуляр да гэтай хорды з асновай у яе сярэдзіне (рыс. 159). Дапамажыце дзяўчыне працягнуць дзеянні і знайсці цэнтр круга.



Рыс. 159

Складзіце матэматычную мадэль задання, якая тлумачыць дзеянні Машы і даказвае правільнасць выбранага алгарытму.

ЗАПАМІНАЕМ

- Тры прыметы роўнасці трохвугольнікаў:
 - па дзвюх старанах і вугле паміж імі;
 - па старане і двух прылеглых да яе вуглах;
 - па трох старанах.
- Вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўныя.

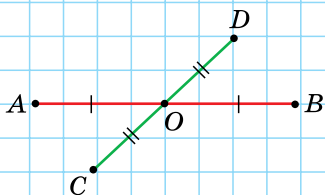
3. Бісектрыса раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная з вяршыні да асновы, з'яўляецца яго вышыняй і медыянай.
4. Калі два вуглы трохвугольніка роўныя, то трохвугольнік раўнабедраны (прымета раўнабедранага трохвугольніка).
5. Калі вышыня трохвугольніка з'яўляецца яго медыянай ці бісектрысай або медыяна з'яўляецца яго бісектрысай, то трохвугольнік раўнабедраны (прыметы раўнабедранага трохвугольніка).
6. Любы пункт сярэдзіннага перпендыкуляра да адрэзка роўнаадалены ад канцоў гэтага адрэзка. Калі пункт роўнаадалены ад канцоў адрэзка, то ён ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да гэтага адрэзка.
7. Усе тры сярэдзінныя перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце (1-ы адметны пункт трохвугольніка).

Правяраем сябе

Заданне 1

Па рысунку дакажыце, што:

- а) $AC = BD$, $AD = BC$,
- б) $\angle CAD = \angle DBC$.



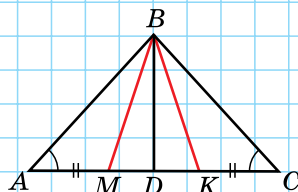
Заданне 2

Вядома, што $\angle A = \angle C$,

$AM = CK$, $BD \perp AC$.

Дакажыце, што:

- а) $\triangle ABM = \triangle CBK$;
- б) $\triangle MBD = \triangle KBD$.



Заданне 3

Па рысунку дакажыце, што:

- а) $AC \perp BD$;
- б) $BO = OD$.

