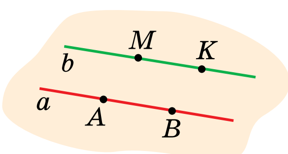
§ 15. Прыметы паралельнасці прамых

15.1. Дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй

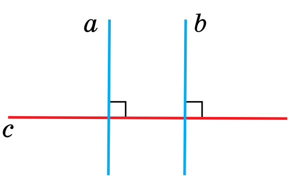
Паралельнасць прамых — адно з асноўных паняццяў геаметрыі. Паралельнасць часта сустракаецца ў жыцці. Паглядзеўшы навокал, можна пераканацца, што мы жывём у свеце паралельных ліній. Гэта краі парты, слупы наўсцяж дарогі, палоскі «зебры» на пешаходным пераходзе.

Азначэнне. Дзве прамыя называюцца **паралельнымі**, калі яны ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.



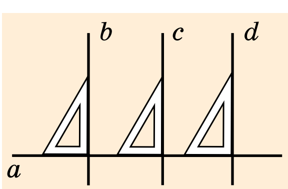
Рыс. 160

Прамені і *адрэзкі* называюцца *паралельнымі*, калі яны ляжаць на паралельных прамых. Калі прамыя a і b паралельныя, г. зн. $a \parallel b$ (рыс. 160), то паралельныя адрэзкі AB і MK, адрэзак MK і прамая a, прамені AB і KM.



Рыс. 161

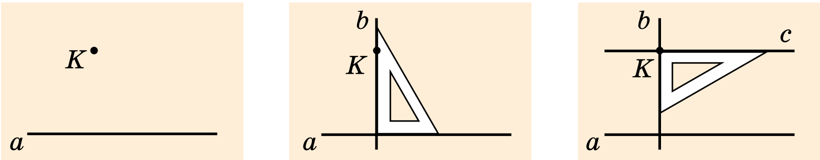
Вы ўжо ведаеце тэарэму аб паралельных прамых на плоскасці: «*Дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой*». Іншымі словамі, калі $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$ (рыс. 161). Дадзеная тэарэма дазваляе рашыць дзве важныя практычныя задачы.



Рыс. 162

Першая задача заключаецца ў правядзенні некалькіх паралельных прамых.

Няхай дадзена прамая a (рыс. 162). Пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка будуюць прамую b, перпендыкулярную да прамой a. Затым ссоўваюць трохвугольнік



Рыс. 163

уздоўж прамой a і будуюць другую перпендыкулярную прамую c, затым — трэцюю прамую d і г. д. Паколькі прамыя b, c, d перпендыкулярныя да адной прамой a, то з вышэй названай тэарэмы вынікае, што $b \parallel c$, $c \parallel d$, $b \parallel d$.

Другая задача — правядзенне прамой, якая паралельна дадзенай і праходзіць праз пункт, што не ляжыць на дадзенай прамой.

Па рысунку 163 растлумачце працэс правядзення прамой c, якая паралельна прамой a і праходзіць праз пункт K.

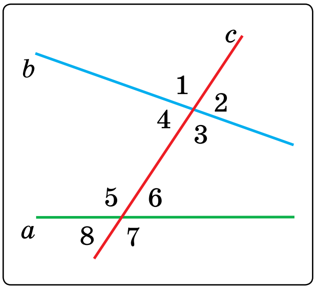
З пабудовы вынікае: паколькі $a \perp b$ і $c \perp b$, то $a \parallel c$. Рашэнне другой задачы даказвае тэарэму аб існаванні прамой, паралельнай дадзенай, якая сцвярджае:

Праз пункт, што не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці прамую, паралельную дадзенай.

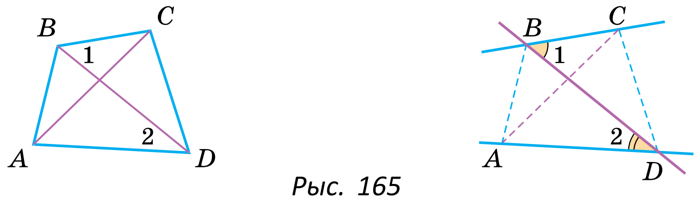
15.2. Накрыжлеглыя, адпаведныя і аднастароннія вуглы

Пры перасячэнні дзвюх прамых a і b трэцяй прамой c, якая называецца *сякучай*, утвараецца 8 вуглоў (рыс. 164).

Некаторыя пары гэтых вуглоў маюць спецыяльныя назвы: $\angle 3$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 6$ — ***унутраныя накрыжлеглыя вуглы***; $\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 1$ і $\angle 7$ — ***знешнія накрыжлеглыя вуглы***; $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 8$ — ***адпаведныя вуглы***; $\angle 3$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 5$ — ***унутраныя аднастароннія вуглы***; $\angle 2$ і $\angle 7$, $\angle 1$ і $\angle 8$ — ***знешнія аднастароннія вуглы***.



Рыс. 164



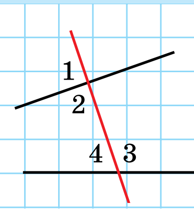
Рыс. 165

На рысунку 165 адзначаны вуглы 1 і 2. Яны з’яўляюцца ўнутранымі накрыжлеглымі вугламі пры прамых BC і AD і сякучай BD. У гэтым лёгка пераканацца, прадоўжыўшы адрэзкі BC, AD і BD. Адкажыце: якімі па ўзаемным размяшчэнні з’яўляюцца $\angle ABC$ і $\angle BAD$ адносна прамых BC і AD і сякучай AB?

А цяпер выканайце **Заданне 1**.

Заданне 1

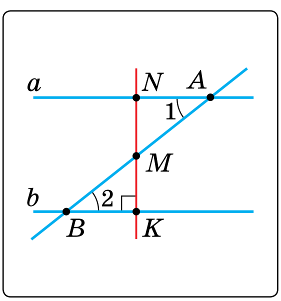
Сярод вуглоў 1, 2, 3 і 4 назавіце накрыжлеглыя, адпаведныя і аднастароннія вуглы.



15.3. Прыметы паралельнасці прамых

З названымі парамі вуглоў звязаны наступныя прыметы паралельнасці прамых.

Тэарэма (першая прымета паралельнасці прамых). **Калі пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя.**



Рыс. 166

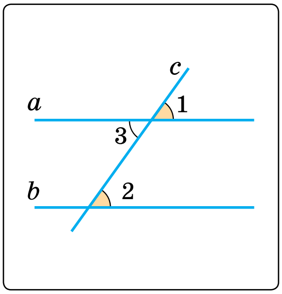
Дадзена: a і b — прамыя, AB — сякучая, $\angle 1 = \angle 2$ (рыс. 166).

Даказаць: $a \parallel b$.

Доказ. З сярэдзіны M адрэзка AB апусцім перпендыкуляр MK на прамую b. Адкладзём адрэзак $AN = BK$ і правядзём адрэзак NM (гл. рыс. 166). Трохвугольнікі BKM і ANM роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Адсюль $\angle ANM = \angle BKM = 90°$,

$\angle AMN = \angle BMK$ і таму $\angle NMK$ — разгорнуты (гл. с. 44, заўвага да задачы 3*). Прамыя a і b паралельныя як дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй (прамой NK).
Тэарэма даказана.

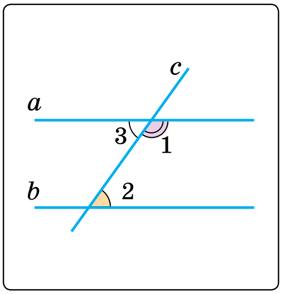
Тэарэма (другая прымета паралельнасці прамых). **Калі пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай адпаведныя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя.**



Рыс. 167

Дадзена: $\angle 1 = \angle 2$ (рыс. 167).
Даказаць: $a \parallel b$.
Доказ. Вуглы 1 і 3 роўныя як вертыкальныя. А паколькі вуглы 1 і 2 роўныя па ўмове, то вуглы 2 і 3 роўныя паміж сабой. Але вуглы 2 і 3 — унутраныя накрыжлеглыя пры прамых a і b і сякучай c. А мы ведаем, што калі ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя. Значыць, $a \parallel b$. Тэарэма даказана.

Тэарэма (трэцяя прымета паралельнасці прамых). **Калі пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°, то прамыя паралельныя.**



Рыс. 168

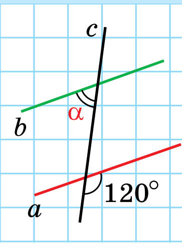
Дадзена: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рыс. 168).
Даказаць: $a \parallel b$.
Доказ. Вуглы 1 і 3 — сумежныя, таму іх сума роўна 180°. А паколькі сума вуглоў 1 і 2 роўна 180° па ўмове, то вуглы 2 і 3 роўныя паміж сабой. Але вуглы 2 і 3 — унутраныя накрыжлеглыя пры прамых a і b і сякучай c. А мы ведаем, што калі ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя. Значыць, $a \parallel b$.
Тэарэма даказана.

Сфармулюйце і дакажыце аналагічныя прыметы для знешніх накрыжлеглых і знешніх аднастаронніх вуглоў.

А цяпер выканайце **Заданне 2.**

Заданне 2

Колькі градусаў павінен складаць вугал α, каб прамыя a і b былі паралельнымі?

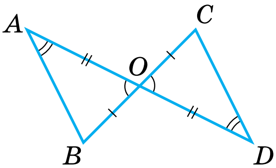


Заданні да § 15

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

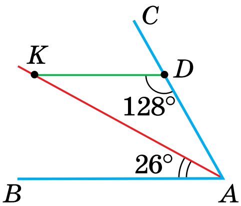
Задача 1. *Даказаць, што калі адрэзкі AD і BC перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то прамыя AB і CD паралельныя.*



Рыс. 169

Доказ. Няхай O — пункт перасячэння адрэзкаў AD і BC (рыс. 169). Трохвугольнікі AOB і DOC роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі ($\angle AOB = \angle DOC$ як вертыкальныя, $BO = OC$, $AO = OD$ па ўмове). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle BAO = \angle CDO$. Паколькі гэтыя вуглы — накрыжлеглыя пры прамых AB і CD і сякучай AD, то $AB \parallel CD$ па прымеце паралельнасці прамых.

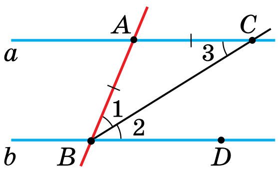
Задача 2. *На бісектрысе вугла BAC адзначаны пункт K, а на старане AC — пункт D,* $\angle BAK = 26°$, $\angle ADK = 128°$. *Даказаць, што адрэзак KD паралельны праменю AB.*



Рыс. 170

Доказ. Паколькі AK — бісектрыса вугла BAC (рыс. 170), то $\angle BAC = 2 \cdot \angle BAK = 2 \cdot 26° = 52°$. Вуглы ADK і BAC — унутраныя аднастароннія пры прамых KD і BA і сякучай AC. А паколькі $\angle ADK + \angle BAC = 128° + 52° = 180°$, то $KD \parallel AB$ па прымеце паралельнасці прамых.

Задача 3. *Бісектрыса BC вугла ABD адсякае на прамой a адрэзак AC, роўны адрэзку AB. Даказаць, што прамыя a і b паралельныя* (рыс. 171).

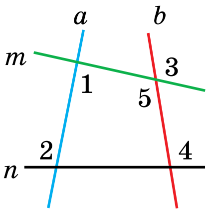


Рыс. 171

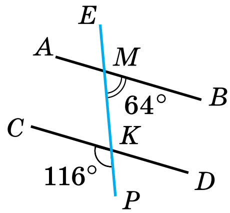
Доказ. Паколькі BC — бісектрыса вугла ABD, то $\angle 1 = \angle 2$. Паколькі трохвугольнік BAC раўнабедраны ($AB = AC$ па ўмове), то $\angle 1 = \angle 3$ як вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка. Тады $\angle 2 = \angle 3$. Але вуглы 2 і 3 з'яўляюцца накрыжлеглымі пры прамых a і b і сякучай BC. А калі накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя. Такім чынам, $a \parallel b$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

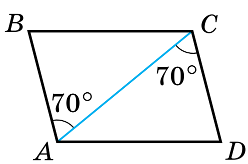
128. Сярод вуглоў 1, 2, 3, 4 і 5 (рыс. 172) вызначыце накрыжлеглыя, адпаведныя і аднастароннія вуглы.



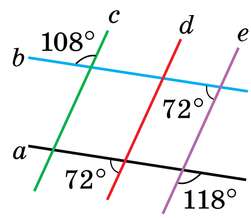
Рыс. 172



Рыс. 173



Рыс. 174

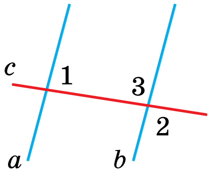


Рыс. 175

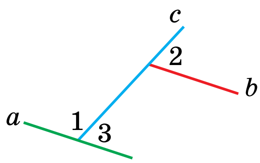
129. Высветліце, якія з паказаных на рысунках 173—175 прамых паралельныя і чаму.

130. У чатырохвугольніку $ABCD$ $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Дакажыце, што $BC \parallel AD$.

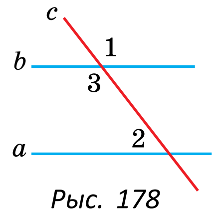
131. Дакажыце, што $a \parallel b$ (рыс. 176—178), калі:
а) $\angle 1 = 87°$, $\angle 2 = 93°$; б) $\angle 1 = 116°$, $\angle 2 = 64°$;
в) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.



Рыс. 176

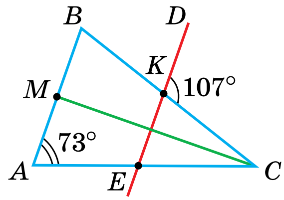


Рыс. 177



Рыс. 178

132. Бісектрыса CM трохвугольніка ABC дзеліць старану AB напалам, $\angle BAC = 73°$, $\angle DKC = 107°$ (рыс. 179). Дакажыце, што $ED \parallel AB$.



Рыс. 179

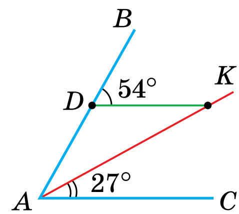
133. У $\triangle ABC$ праведзена бісектрыса AM, да якой праведзены сярэдзінны перпендыкуляр, што перасякае прамую AB у пункце E. Дакажыце, што $EM \parallel AC$.

134. З пунктаў A і B прамой a у адну паўплоскасць праведзены прамені AK і BM так, што вугал KAB складае 20 % вугла MBA, а вугал MBA складае $\frac{5}{6}$ разгорнутага вугла. Ці перасякаюцца прамыя AK і BM?

135. На рысунку 180 AK — бісектрыса вугла BAC. Дакажыце, што $DK \parallel AC$, калі:

а) $\angle BDK = 54°$, $\angle KAC = 27°$;

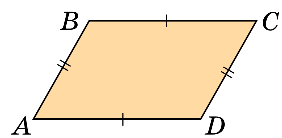
б) $\angle BDK = 2\angle KAC$.



Рыс. 180

136*. Дакажыце, што прамыя AB і CD, размешчаныя ў каардынатнай плоскасці, паралельныя, калі $A(-6;\ 0)$, $B(0;\ -4)$, $C(6;\ 0)$, $D(0;\ 4)$.

137*. *Паралелаграмам называецца чатырохвугольнік, у якога процілеглыя стораны паралельныя.* Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніку процілеглыя стораны роўныя (рыс. 181), то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.



Рыс. 181

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

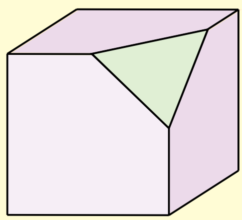
1. Азначэнне паралельных прамых.
2. Тэарэму аб дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй.
3. Назвы некаторых пар вуглоў, што ўтвараюцца пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай.
4. Прыметы паралельнасці прамых.

Умеем

1. Праводзіць пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка паралельныя прамыя.
2. Праводзіць пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка прамую, якая паралельна дадзенай прамой і праходзіць праз пункт, што не ляжыць на дадзенай прамой.
3. Вызначаць на рысунку пары накрыжлеглых, адпаведных і аднастаронніх вуглоў.
4. Даказваць прыметы паралельнасці прамых.

Геаметрыя 3D

1. У куба адрэзалі вугал (рыс. 182). Колькі ўсяго вяршынь, кантаў і граней у атрыманага мнагагранніка? Калі $В$ — колькасць вяршынь, $Г$ — колькасць граней, $К$ — колькасць кантаў, то чаму будзе роўны лік $В + Г - К$? Знакамітая формула вялікага матэматыка Леанарда Эйлера (XVII ст.) сцвярджае, што для любога мнагагранніка $В + Г - К = 2$. Праверце гэту формулу для паралелепіпеда, для трохвугольнай і чатырохвугольнай пірамід.



Рыс. 182

2. Вызначыце, колькі ў паказанага на рысунку мнагагранніка пар паралельных кантаў, дзе кожная пара паралельных кантаў належыць якой-небудзь адной грані.

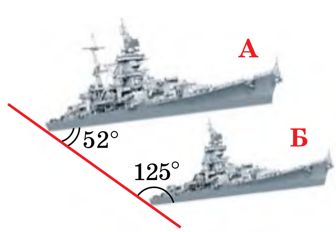
3*. Нарысуйце разгортку гэтага мнагагранніка.

Мадэляванне

Каманда *«Дзесяць градусаў лева руля»* на караблі азначае паварот судна на 10° улева ад курсу.

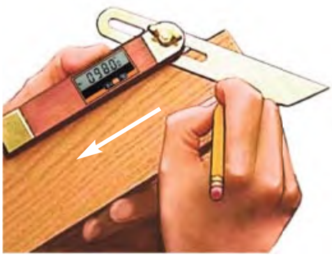
а) Якую каманду павінен даць камандзір карабля «Б» (рыс. 183) рулявому, каб караблі «А» і «Б» ішлі паралельнымі курсамі?

б) Калі камандзір карабля «А» дасць каманду «пяць градусаў лева руля», то якую каманду пасля гэтага павінен даць камандзір карабля «Б», каб караблі ішлі паралельнымі курсамі?



Рыс. 183

Рэальная геаметрыя



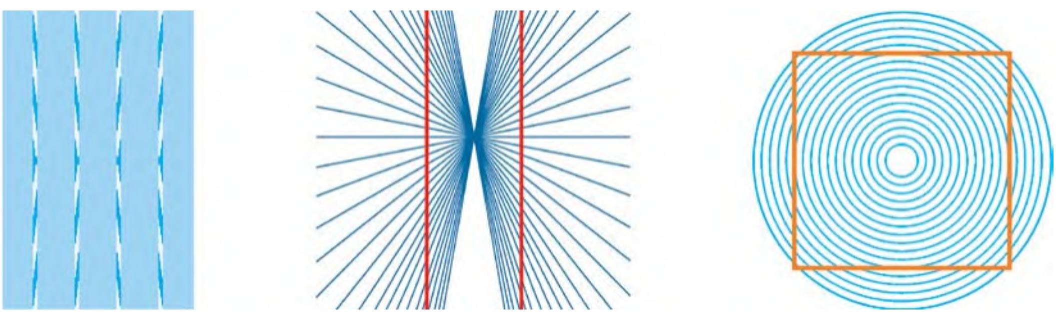
Рыс. 184

На рысунку 184 паказаны вугламер — інструмент для нанясення паралельных ліній на рэйцы ці дошцы. Прыбор складаецца з дзвюх частак, змацаваных шрубай. Першая частка нерухомая, яна прыціскаецца да дошкі, а другая паварочваецца на неабходны вугал, градусная мера якога адлюстроўваецца на экране вугламера. Заціснуўшы шрубу, замацоўваюць патрэбны вугал. Ссоўваючы нерухомую частку вугламера ўздоўж дошкі, наносяць паралельныя лініі разметкі, па якіх затым распілоўваюць дошку. Растлумачце, згодна з якой тэарэмай лініі, што атрымліваюцца, будуць паралельнымі.

Гімнастыка розуму

Вызначыце візуальна, г. зн. на вока, на якім з рысункаў паказаны паралельныя адрэзкі (рыс. 185).

Прыклаўшы лінейку, пераканайцеся, што ўсе лініі з’яўляюцца прамымі, хоць здаюцца скрыўленымі.



Рыс. 185

§ 16. Аксіёма паралельных прамых

Вы ўжо ведаеце, што на плоскасці праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, *можна* правесці прамую, паралельную дадзенай (гл. § 15). З пятага пастулата Эўкліда (*пастулат* — аксіяматычнае дапушчэнне) вынікае, што такая прамая — адзіная.

На працягу двух тысячагоддзяў вакол сцверджання аб адзінасці паралельнай прамой разыгрывалася захапляльная і