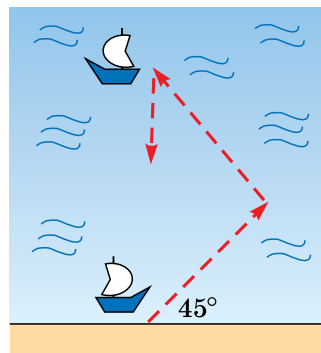


Рэальная геаметрыя

Яхта выйшла ў мора курсам, які склаў з лініяй берага 45° (рыс. 236). Прайшоўшы 4 км, яна павярнула на 80° улева і прайшла яшчэ 4 км. Пасля гэтага яхта накіравалася ў пункт свайго выхаду. Вызначыце вугал, які склаў курс яхты, што ішла да берага, з лініяй берага.



Пры дапамозе **Інтэрнэту** знайдзіце цікавыя біяграфічныя факты з жыцця і навуковай дзейнасці вучонага Блеза Паскаля.

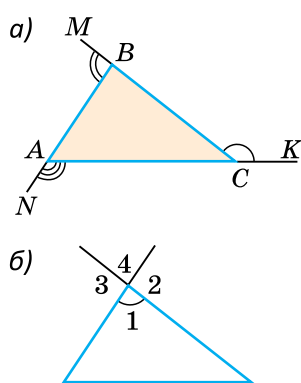


Рыс. 236

§ 20. Знешні вугал трохвугольніка

Вуглы трохвугольніка называюцца яшчэ яго ўнутранымі вугламі. Акрамя ўнутраных вуглоў, у трохвугольніка ёсць і знешнія вуглы.

Азначэнне. **Знешнім вуглом** трохвугольніка называецца вугал, сумежны з яго ўнутраным вуглом.

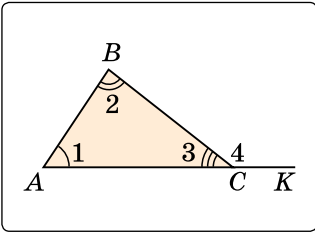


Рыс. 237

На рысунку 237, а вуглы BCK , ABM , CAN — знешнія, паколькі кожны з іх з'яўляецца сумежным з адным з унутраных вуглоў трохвугольніка ABC .

Пры кожнай вяршыні трохвугольніка адзін вугал унутраны і два знешнія. На рысунку 237, б вугал 1 — унутраны, вуглы 2 і 3 — роўныя знешнія вуглы. Вугал 4 не з'яўляецца знешнім, паколькі ён не з'яўляецца сумежным з унутраным вуглом 1.

Тэарэма. Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух унутраных вуглоў, не сумежных з ім.



Рыс. 238

Дадзена: $\triangle ABC$, $\angle 4$ — знешні (рыс. 238).

Даказаць: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

Доказ. Паколькі сума вуглоў трохвугольніка роўна 180° , то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \angle 3$. Паколькі сума сумежных вуглоў роўна 180° , то $\angle 4 = 180^\circ - \angle 3$.

Адсюль $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$. Тэарэма даказана.

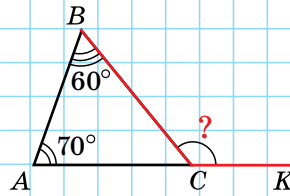
Вынік.

Знешні вугал трохвугольніка большы за любы ўнутраны вугал, не сумежны з ім.

А цяпер выканайце **Заданне**.

Заданне

Знайдзіце $\angle BCK$ двума спосабамі.

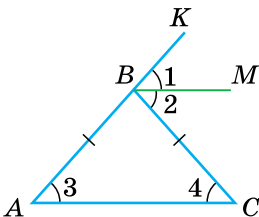


Заданні да § 20

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Даказаць, што бісектрыса знешняга вугла пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка паралельна аснове.

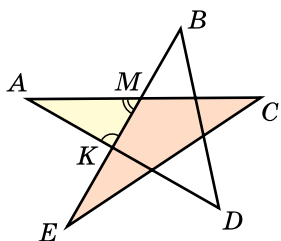


Рыс. 239

Доказ. Няхай дадзены $\triangle ABC$, $AB = BC$, BM — бісектрыса знешняга вугла KBC , $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle KBC$ (рыс. 239). Па ўласцівасці знешняга вугла трохвугольніка $\angle KBC = \angle 3 + \angle 4$. Паколькі $\triangle ABC$ раўнабедраны, то $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \angle KBC$. Таму $\angle 2 =$

$\angle 4$. Паколькі ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы 2 і 4 роўныя (пры прамых BM і AC і сякучай BC), то прамыя BM і AC паралельныя.

Задача 2. Дакажаць, што сума вуглоў A, B, C, D і E «зорачкі» роўна 180° (рыс. 240).



Рыс. 240

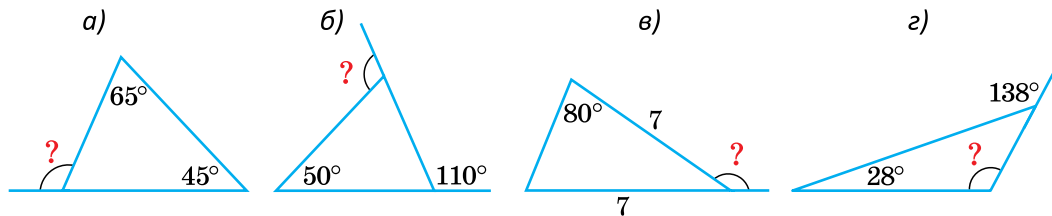
Рашэнне. Разгледзім трохвугольнік AMK . Сума яго вуглоў роўна 180° . Вугал AME — знешні для трохвугольніка EMC , таму $\angle AME = \angle C + \angle E$. Аналагічна, вугал AKB — знешні для трохвугольніка KBD , таму $\angle AKB = \angle B + \angle D$.

Паколькі $\angle A + \angle AMK + \angle AKM = 180^\circ$, то $\angle A + (\angle C + \angle E) + (\angle B + \angle D) = 180^\circ$.



**РАШАЕМ
САМАСТОЙНА**

192. Знайдзіце вугал, абазначаны пыталнікам (рыс. 241).



Рыс. 241

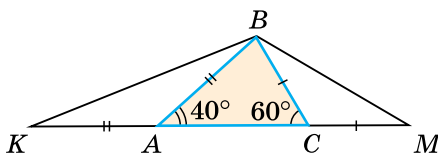
193. Знайдзіце вугал пры аснове раўнабедранага трохвугольніка, калі знешні вугал пры яго вяршыні роўны:

- а) 110° ; б) 73° ; в) α .

194. Вуглы трохвугольніка адносяцца як $2 : 3 : 4$. Знайдзіце адносінку адпаведных знешніх вуглоў трохвугольніка, узятых па адным пры кожнай вяршыні.

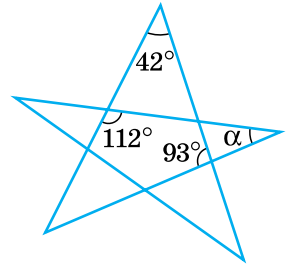
195. Сума знешняга вугла пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка і ўнутранага вугла пры аснове роўна 216° . Знайдзіце вуглы трохвугольніка.

196. У трохвугольніку ABC $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AK = AB$, $CM = CB$ (рыс. 242). Знайдзіце велічыню найбольшага вугла трохвугольніка KBM .



Рыс. 242

197. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC , $\angle C = 90^\circ$, CK — вышыня трохвугольніка ABC , CM — бісектрыса трохвугольніка ACK . Дакажыце, што трохвугольнік BMC — раўнабедраны.
198. У акружнасці з цэнтрам O праведзены дыяметр AB і хорда AC . Дакажыце, што $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle COB$.
- 199*. У трохвугольніку ABC $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, вышыні AK і CM перасякаюцца ў пункце H . Знайдзіце вугал MHK .
- 200*. У трохвугольніку ABC бісектрыса BK і вышыня AN перасякаюцца ў пункце O . Вугал AOB у 2 разы большы за вугал ABC . Знайдзіце вугал ABC .
- 201*. На аснове AC раўнабедранага трохвугольніка ABC адзначаны пункт D , і выявілася, што $AD = BD$, $DC = BC$. Знайдзіце вуглы трохвугольніка ABC .
- 202*. Знайдзіце $\angle \alpha$ (рыс. 243) (калі на чарцяжы неабходна вылучыць чатыры або больш вуглоў, то іх пазначаюць адной дугой).



Рыс. 243



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

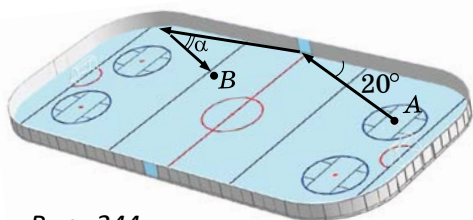
1. Тэарэму аб суме вуглоў трохвугольніка.
2. Уласцівасць вуглоў роўнастаронняга трохвугольніка.
3. Уласцівасць вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка.
4. Азначэнне і ўласцівасць знешняга вугла трохвугольніка.

Умеем

1. Паказваць відарысы знешніх вуглоў дадзенага трохвугольніка.
2. Даказваць тэарэму аб суме вуглоў трохвугольніка.
3. Даказваць тэарэму аб уласцівасці знешняга вугла трохвугольніка.

Рэальная геаметрыя

Хакеіст пасылае шайбу з пункта A пад вуглом 20° да правага борта. Шайба адбіваецца ад борта, трапляе ў зону праціўніка і, адбіўшыся другі раз ад борта за варотамі, выходзіць у пункт B пад удар нападаючага.



Рыс. 244

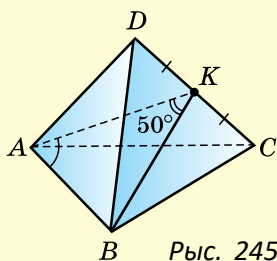
Вызначыце вугал α , выкарыстаўшы закон фізікі: вугал падзення роўны вуглу адбіцця. З гэтага закону вынікае, што вугал паміж траекторыяй пасланай шайбы і бортам роўны вуглу паміж траекторыяй адбітай шайбы і гэтым бортам.

Цікава ведаць. У Рэспубліцы Беларусь вялікая ўвага надаецца папулярызацыі хакея. Пры ўдзеле Прэзідэнцкага спартыўнага клуба праходзіць рэспубліканскі турнір аматарскіх падлеткавых каманд «Залатая шайба», міжнародны Калядны турнір на прыз Прэзідэнта Рэспублікі Беларусь.



Геаметрыя 3D

Задача 1. $DABC$ — правільная трохвугольная піраміда, пункт K — сярэдзіна канта DC , $\angle AKB = 50^\circ$. Знайдзіце $\angle KAB$ (рыс. 245).



Рыс. 245

Рашэнне. Паколькі піраміда правільная, то трохвугольнікі ADC і BDC — роўныя раўнабедраныя, $AD = BD$, $BD = CD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Тады $\triangle ADK = \triangle BDK$ па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Адсюль $AK = BK$, $\triangle AKB$ — раўнабедраны, $\angle KAB = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$.

Адказ: 65° .

Задача 2. Зрабіце чарцёж правільнай піраміды $DABC$. Адзначце сярэдзіну M канта AD і знайдзіце вуглы трохвугольніка BMC , калі вядома, што $AB = BM$.

§ 21. Суадносіны паміж старанамі і вугламі трохвугольніка

Можна заўважыць, што ў трохвугольніку даўжыні старон звязаны з велічынямі процілеглых вуглоў наступным чынам: большай старане адпавядае большы процілеглы вугал, а меншай старане — меншы. Так, у трохвугольніку ABC старана AC — большая, старана AB — сярэдняя, стара-