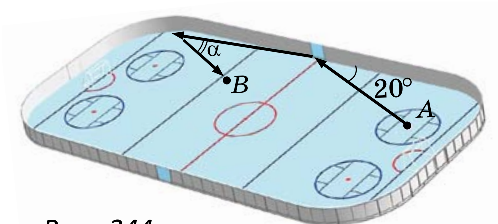


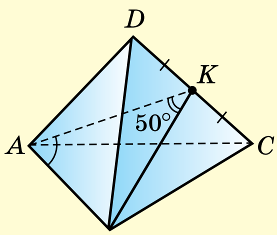
Рыс. 244

Вызначыце вугал α, выкарыстаўшы закон фізікі: вугал падзення роўны вуглу адбіцця. З гэтага закону вынікае, што вугал паміж траекторыяй пасланай шайбы і бортам роўны вуглу паміж траекторыяй адбітай шайбы і гэтым бортам.

Цікава ведаць. У Рэспубліцы Беларусь вялікая ўвага надаецца папулярызацыі хакея. Пры ўдзеле Прэзідэнцкага спартыўнага клуба праходзіць рэспубліканскі турнір аматарскіх падлеткавых каманд «Залатая шайба», міжнародны Калядны турнір на прыз Прэзідэнта Рэспублікі Беларусь.

Геаметрыя 3D

Задача 1. *DABC — правільная трохвугольная піраміда, пункт K — сярэдзіна канта DC,* $\angle AKB = 50°$. *Знайдзіце* $\angle KAB$ (рыс. 245).



Рыс. 245

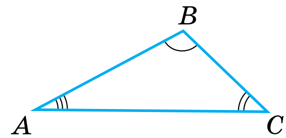
Рашэнне. Паколькі піраміда правільная, то трохвугольнікі *ADC* і *BDC* — роўныя раўнабедраныя, $AD = BD$, $BD = CD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Тады $\triangle ADK = \triangle BDK$ па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Адсюль $AK = BK$, $\triangle AKB$ — раўнабедраны, $\angle KAB = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$.

Адказ: 65°.

Задача 2. *Зрабіце чарцёж правільнай піраміды DABC. Адзначце сярэдзіну M канта AD і знайдзіце вуглы трохвугольніка BMC, калі вядома, што* $AB = BM$.

§ 21. Суадносіны паміж старанамі і вугламі трохвугольніка

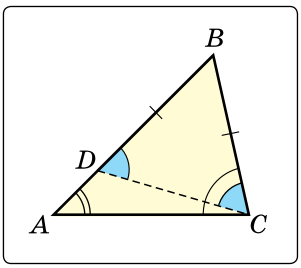
Можна заўважыць, што ў трохвугольніку даўжыні старон звязаны з велічынямі процілеглых вуглоў наступным чынам: большай старане адпавядае большы процілеглы вугал, а меншай старане — меншы. Так, у трохвугольніку *ABC* старана *AC* — большая, старана *AB* — сярэдняя, старана BC — меншая, $\angle B$ — большы, $\angle C$ — сярэдні, $\angle A$ — меншы (рыс. 246). Гэта гіпотэза знаходзіць пацверджанне ў наступнай тэарэме.



Рыс. 246

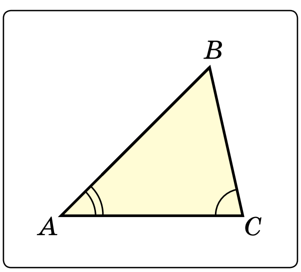
Тэарэма (аб суадносінах паміж старанамі і вугламі ў трохвугольніку).
У трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал, а супраць большага вугла ляжыць большая старана.

Тэарэма складаецца з двух сцверджанняў. Дакажам кожнае з іх.
1) *У трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал.*



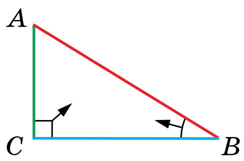
Рыс. 247

Дадзена: $\triangle ABC$, $AB > BC$ (рыс. 247).
Даказаць: $\angle C > \angle A$.
Доказ. На большай старане BA ад вяршыні B адкладзём адрэзак BD, роўны меншай старане BC, і правядзём адрэзак CD. Атрымаем раўнабедраны $\triangle DBC$, у якога вуглы пры аснове роўныя, г. зн. $\angle BDC = \angle BCD$. Але $\angle BDC$ — знешні для трохвугольніка ADC, і таму $\angle BDC$ большы за $\angle A$. Значыць, і $\angle BCD$ большы за $\angle A$. А паколькі $\angle C$ большы за $\angle BCD$, то $\angle C$ і падаўна большы за $\angle A$. Сцверджанне доказана.
2) *У трохвугольніку супраць большага вугла ляжыць большая старана.*



Рыс. 248

Дадзена: $\triangle ABC$, $\angle C > \angle A$ (рыс. 248).
Даказаць: $AB > BC$.
Доказ. Прыменім метад доказу ад адваротнага. Няхай $\angle C > \angle A$, а $AB \leqslant BC$. Калі $AB < BC$, то па першай частцы тэарэмы $\angle C < \angle A$. Атрымалі супярэчнасць з умовай. Калі $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — раўнабедраны, і тады $\angle A = \angle C$. Зноў атрымалі супярэчнасць. Значыць, $AB > BC$. Сцверджанне даказана.



Рыс. 249

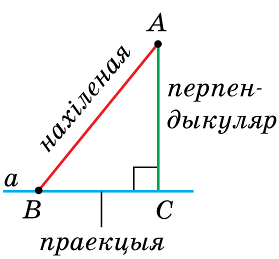
Вынік 1.

Катэт прамавугольнага трохвугольніка меншы за гіпатэнузу.

Вынік 1 справядлівы, паколькі катэт ляжыць супраць вострага вугла, а гіпатэнуза — супраць прамога, які большы за востры (рыс. 249).

А цяпер выканайце **Заданне 1.**

Азначэнне. Калі AC — **перпендыкуляр** да прамой a, пункт B належыць прамой a і не супадае з пунктам C, то адрэзак AB называецца **нахіленай**, праведзенай з пункта A да прамой a (рыс. 250). Пункт B называецца **асновай нахіленай**. Адрэзак BC, які злучае аснову нахіленай і аснову перпендыкуляра, называецца **праекцыяй** нахіленай AB на прамую a.



Рыс. 250

Вынік 2.

Калі з аднаго пункта да прамой праведзены перпендыкуляр і нахіленая, то перпендыкуляр і праекцыя нахіленай меншыя за гэту нахіленую.

Вынік 2 справядлівы, паколькі ў прамавугольным трохвугольніку катэт меншы за гіпатэнузу.

Азначэнне. **Адлегласцю ад пункта да прамой** называецца даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з пункта на прамую.

Калі пункт ляжыць на прамой, то гэта адлегласць роўна 0.

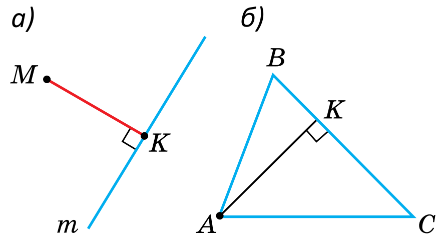
З выніка 2 выцякае, што даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з дадзенага пункта на прамую, — гэта найменшая з адлегласцей ад дадзенага пункта да пунктаў прамой.

На рысунку 251, *а* адлегласць ад пункта M да прамой m роўна даўжыні перпендыкуляра MK.

Адлегласць ад вяршыні A трохвугольніка ABC да прамой BC, якая змяшчае процілеглую старану, роўна вышыні AK трохвугольніка (рыс. 251, *б*).

У матэматыцы за адлегласць паміж фігурамі прымаецца найменшая з адлегласцей паміж пунктамі гэтых фігур.

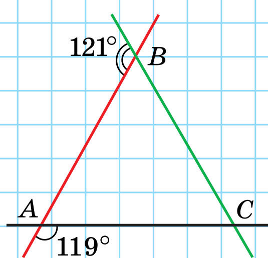
А цяпер выканайце **Заданне 2**.



Рыс. 251

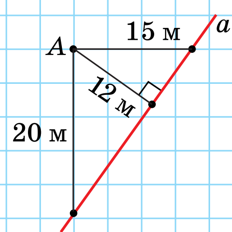
Заданне 1

У $\triangle ABC$ вызначыце большую старану.



Заданне 2

Знайдзіце адлегласць ад пункта A да прамой a.

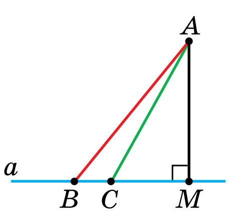


Заданні да § 21

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Адрэзак AM — перпендыкуляр да прамой a. Пункты B і C ляжаць на прамой a па адзін бок ад пункта M* (рыс. 252). *Даказаць, што калі* $CM < BM$, *то* $AC < AB$.

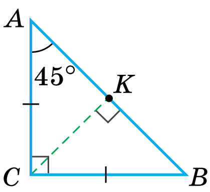


Рыс. 252

Доказ. Паколькі $\triangle AMC$ — прамавугольны, то $\angle ACM$ — востры. Тады сумежны да яго вугал ACB — тупы. У трохвугольніку ABC вугал ACB — большы, таму $\angle ACB > \angle ABC$. Паколькі ў трохвугольніку супраць большага вугла ляжыць большая старана, то $AC < AB$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Рышыўшы дадзеную задачу пры ўмове, што пункты B і C ляжаць на прамой a па розныя бакі ад пункта M, вы дакажаце ўласцівасць: «*Калі нахіленыя праведзены з аднаго пункта да адной прамой, то большай праекцыі адпавядае большая нахіленая, а меншай — меншая*».

Задача 2. *Дадзены раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай 12 см. Знайсці адлегласць ад вяршыні прамога вугла да прамой, якая змяшчае гіпатэнузу.*



Рыс. 253

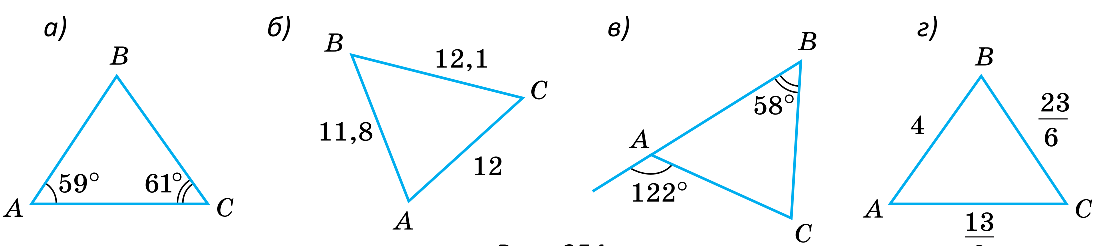
Рашэнне. Няхай у трохвугольніку ABC $AC = BC$, $\angle C = 90°$, $AB = 12$ см (рыс. 253). Па ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка $\angle A = \angle B = 45°$. Правядзём вышыню CK. Даўжыня адрэзка CK — шуканая адлегласць. У раўнабедраным трохвугольніку ACB вышыня CK, апушчаная на аснову AB, будзе медыянай і бісектрысай. Таму $AK = KB = \frac{1}{2}AB = 6$ см, $\angle ACK = \frac{1}{2}\angle ACB = 45°$. У прамавугольным $\triangle ACK$ $\angle ACK = \angle CAK = 45°$. Таму $\triangle ACK$ — раўнабедраны і $CK = AK = 6$ см. Адказ: 6 см.

Заўвага. У далейшым будзем карыстацца тым, што вышыня раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палове гіпатэнузы.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

203. Запішыце стораны і вуглы трохвугольніка ABC у парадку нарастання (рыс. 254).

204. У трохвугольніку ABC, дзе $AB < BC < AC$, адзін з вуглоў у 2 разы меншы за другі і ў 3 разы меншы за трэці. Знайдзіце вугал A.



Рыс. 254

205. Дакажыце, што для нахіленых, праведзеных з аднаго пункта да адной прамой, справядлівае сцверджанне:
а) роўным нахіленым, праведзеным з аднаго пункта да адной прамой, адпавядаюць роўныя праекцыі;
б) большай нахіленай адпавядае большая праекцыя.

206. Трохвугольнік ABC — роўнастаронні, M — унутраны пункт адрэзка BC. Дакажыце, што $AM < AB$.

207. У трохвугольніку MNK медыяна ME роўна 12 см, $\angle NME = \angle KME$. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да прамой KN.

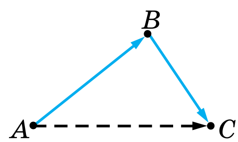
208*. Дакажыце, што сума вышынь трохвугольніка меншая за яго перыметр.

209*. У трохвугольніку ABC ($AB < BC$) BH — вышыня, BM — медыяна. Дакажыце, што:
а) $\angle ABH < \angle CBH$; б) $\angle ABM > \angle CBM$.

210*. Дакажыце, што калі з адной вяршыні нераўнабедранага трохвугольніка правесці вышыню, медыяну і бісектрысу, то бісектрыса будзе ляжаць паміж вышынёй і медыянай.

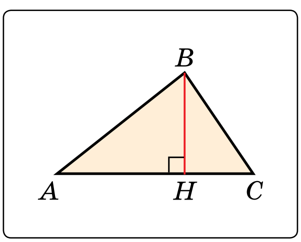
§ 22. Няроўнасць трохвугольніка

Вопыт нам падказвае, што шлях з пункта A ў пункт C па прамой AC карацейшы, чым па ломанай ABC (рыс. 255), г. зн. $AC < AB + BC$. Дакажам гэта.



Рыс. 255

Тэарэма (аб няроўнасці трохвугольніка).
Любая старана трохвугольніка меншая за суму дзвюх іншых яго старон.



Рыс. 256

Дадзена: $\triangle ABC$ (рыс. 256).
Даказаць: $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$.
Доказ. Няхай AC — найбольшая старана трохвугольніка ABC. Правядзём вышыню BH. З прамавугольнага трохвугольніка AHB вынікае $AH < AB$ (катэт меншы за