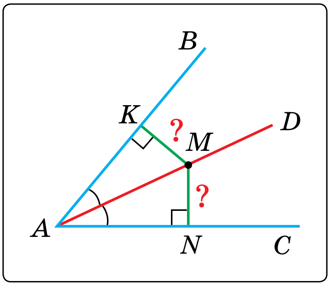
§ 24. Уласцівасць пунктаў бісектрысы вугла

Па азначэнні бісектрыса вугла дзеліць вугал папалам. У бісектрысы ёсць яшчэ адна важная ўласцівасць.

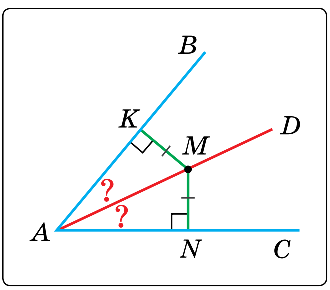
Тэарэма (аб уласцівасці пунктаў бісектрысы вугла). **Любы пункт бісектрысы вугла роўнааддалены ад старон вугла. Калі пункт унутры вугла роўнааддалены ад старон вугла, то ён ляжыць на бісектрысе гэтага вугла.**

У дадзенай тэарэме два сцверджанні: прамое і яму адваротнае. Дакажам кожнае з гэтых сцверджанняў асобна.



Рыс. 271

1) Дадзена: AD — бісектрыса $\angle BAC$, $M \in AD$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$ (рыс. 271).
Даказаць: $MK = MN$.
Доказ. Прамавугольныя трохвугольнікі AKM і ANM роўныя па гіпатэнузе і вострым вугле (гіпатэнуза AM — агульная, $\angle KAM = \angle NAM$, паколькі AD — бісектрыса). Катэты MK і MN роўныя як адпаведныя ў двух роўных трохвугольніках.



Рыс. 272

2) Дадзена: $\angle BAC$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$, $MK = MN$, $M \in AD$ (рыс. 272).
Даказаць: прамень AD — бісектрыса $\angle BAC$.
Доказ. Прамавугольныя трохвугольнікі AKM і ANM роўныя па катэце і гіпатэнузе (гіпатэнуза AM — агульная, $MK = MN$ па ўмове). Вуглы KAM і NAM роўныя як адпаведныя ў двух роўных трохвугольніках, адкуль прамень AD — бісектрыса $\angle BAC$.
Тэарэма даказана.

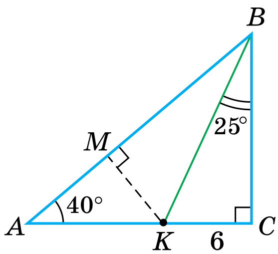
З даказанай тэарэмы вынікае, што *бісектрыса з'яўляецца геаметрычным месцам пунктаў плоскасці, якія знаходзяцца ўнутры вугла і роўнааддалены ад старон вугла*.

Заданні да § 24

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У прамавугольным трохвугольніку* ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$ (рыс. 273). *На катэце* AC *адзначаны пункт* K *так, што* $KC = 6$ *см і* $\angle KBC = 25°$. *Знайсці адлегласць ад пункта* K *да прамой* AB.

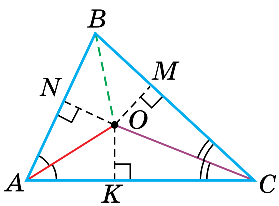


Рыс. 273

Р а ш э н н е. Шуканая адлегласць роўна даўжыні перпендыкуляра KM да прамой AB. Паколькі $\angle ABC = 90° - \angle A = 90° - 40° = 50°$, то $\angle ABK = 50° - 25° = 25°$. Значыць, BK — бісектрыса вугла ABC. Паколькі любы пункт бісектрысы вугла роўнааддалены ад старон вугла, то $KM = KC = 6$ см.

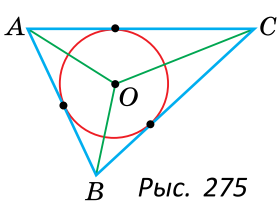
А д к а з: 6 см.

Задача 2 (2-і адметны пункт трохвугольніка). *Даказаць, што бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце.*



Рыс. 274

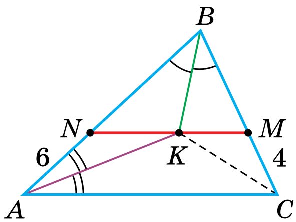
Д о к а з. Правядзём у $\triangle ABC$ бісектрысы вуглоў A і C. Няхай O — пункт іх перасячэння (рыс. 274). Паколькі пункт O ляжыць на бісектрысе AO вугла A, то ён роўнаадддалены ад старон вугла A, г. зн. роўныя перпендыкуляры ON і OK да старон вугла A. Паколькі пункт O ляжыць на бісектрысе CO вугла C, ён роўнаадддалены ад старон вугла C, г. зн. роўныя перпендыкуляры OK і OM да старон вугла C. Тады $OK = OM = ON$. Паколькі перпендыкуляры ON і OM роўныя, то пункт O роўнаадддалены ад старон вугла B. Пункт, роўнаадддалены ад старон вугла, ляжыць на бісектрысе гэтага вугла. Таму бісектрыса вугла B пройдзе праз пункт O, і, значыць, усе тры бісектрысы перасякуцца ў адным пункце.



Рыс. 275

Заўвага. Пункт перасячэння бісектрыс трохвугольніка з'яўляецца цэнтрам упісанай у яго акружнасці (рыс. 275), якая датыкаецца да ўсіх трох старон трохвугольніка (мае з кожнай са старон толькі адзін агульны пункт).

Задача 3. *У трохвугольніку ABC бісектрысы вуглоў A і B перасякаюцца ў пункце K. Праз пункт K праведзены адрэзак NM, паралельны старане AC з канцамі на старанах AB і BC адпаведна; $AN = 6$ см, $MC = 4$ см. Знайсці адрэзак NM.*



Рыс. 276

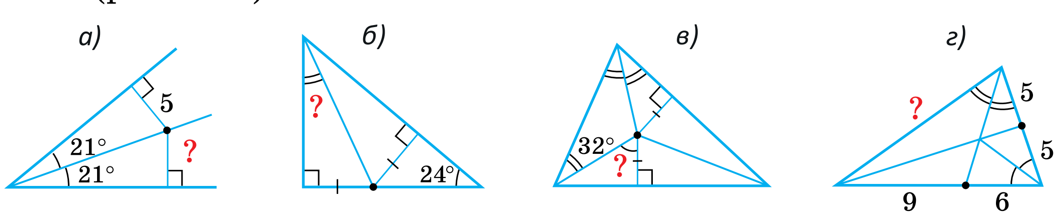
Рашэнне. Паколькі бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то CK — бісектрыса вугла C (рыс. 276). Разгледзім трохвугольнік ANK: $\angle NAK = \angle CAK$, паколькі AK — бісектрыса, $\angle CAK = \angle AKN$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых NM і AC і сякучай AK, адкуль $\angle NAK = \angle AKN$ і трохвугольнік ANK — раўнабедраны па прымеце раўнабедранага трохвугольніка. Тады $NK = AN = 6$ см. Аналагічна даказваем, што трохвугольнік KMC — раўнабедраны і $KM = MC = 4$ см. Шуканы адрэзак $NM = NK + KM = 6 + 4 = 10$ (см).

Адказ: 10 см.

Заўвага. З разважанняў, прыведзеных пры рашэнні задачы 3, вынікае, што калі $NM \parallel AC$ і адрэзак NM праходзіць праз пункт перасячэння бісектрыс, то перыметр трохвугольніка NBM роўны $AB + BC$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

230. Знайдзіце адрэзак або вугал, абазначаныя пытальнікам (рыс. 277).



Рыс. 277

231. Пункт K знаходзіцца на роўнай адлегласці ад старон вугла BAC, роўнага $52°$. Знайдзіце вугал AKB, калі $KB \perp AB$.

232. Дадзены трохвугольнік ABC, у якога $AC = BC$. На яго старане AC адзначаны пункт M, роўнааддалены ад прамых AB і BC, $\angle ABM = 35°$. Знайдзіце вугал C.

233. У прамавугольным трохвугольніку ABC з вяршыні прамога вугла C праведзена бісектрыса CE. З пункта E на стораны CA і CB апушчаны адпаведна перпендыкуляры EK і EM. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $KCME$, калі $EK = 7{,}5$ см.

234. Дакажыце, што адлегласці ад сярэдзіны асновы раўнабедранага трохвугольніка да прамых, якія праходзяць праз бакавыя стораны, роўныя паміж сабой.

235. У трохвугольніку ABC бісектрысы AK і CM перасякаюцца ў пункце O так, што $AO = CO$. Дакажыце, што прамыя BO і AC перпендыкулярныя.

236*. У трохвугольніку ABC бісектрысы, праведзеныя з вяршынь B і C, і медыяна, праведзеная з вяршыні A, перасякаюцца ў пункце O, $\angle BOC = 130°$. Знайдзіце $\angle ABC$.

237*. Дадзены вугал BAC, AK — яго бісектрыса. Пункт M ляжыць унутры вугла BAK. Дакажыце, што адлегласць ад пункта M да прамой AB меншая за адлегласць ад пункта M да прамой AC.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Пяць прымет роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў.
2. Тэарэму аб уласцівасці пунктаў бісектрысы вугла.

Умеем

1. Даказваць прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці пунктаў бісектрысы вугла.

§ 25. Уласцівасць катэта прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°

Тэарэма (аб катэце, які ляжыць супраць вугла ў 30°). **Катэт прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°, роўны палове гіпатэнузы.**