Если выполнение задания 3 вызвало у вас затруднение, получите дополнительную информацию в **Интернете**, сделав запрос «прямоугольный параллелепипед».

Гимнастика ума

Определите, какая из фигур *B*, *C* или *D* равна фигуре *A* (рис. 23).

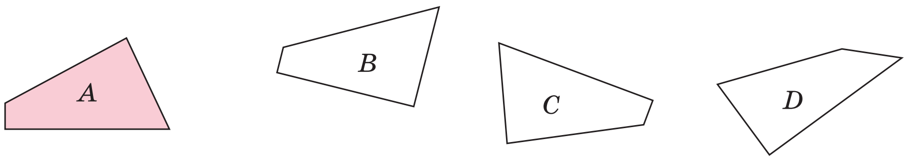


Рис. 23

§ 3. Прямая. Луч. Отрезок. Ломаная

3.1. Прямая

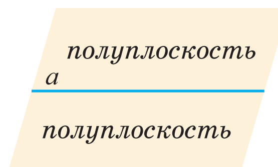


Рис. 24

Рис. 25

Прямая бесконечна (в обе стороны) и разбивает плоскость на две *полуплоскости*, для которых прямая является *границей* (рис. 24). Граница принадлежит полуплоскостям. На рисунке 25 точка *C* лежит на прямой между точками *A* и *B*, которые лежат по разные стороны от точки *C*. Точки *C* и *B* лежат по одну сторону от точки *A*. *Из трех точек на прямой одна и только одна точка лежит между двумя другими.*

Если на плоскости отметить две точки *A* и *B*, то через них всегда можно провести прямую *AB* (рис. 26, *а*). Через одну точку можно провести бесконечно много прямых (рис. 26, *б*), через три точки не всегда можно провести прямую (рис. 26, *в*). Через две точки можно провести бесконечно много окружностей (рис. 26, *г*), а прямую — только одну!

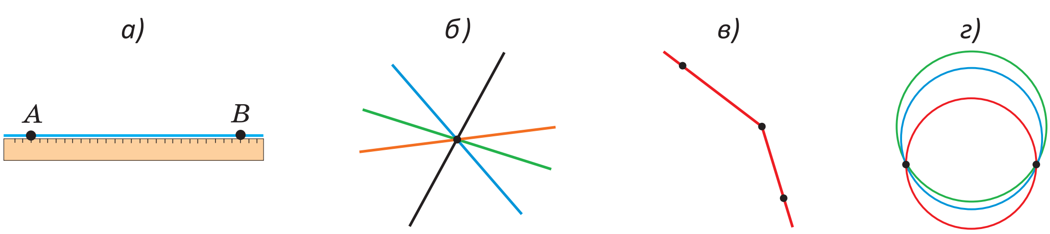


Рис. 26

Аксиома прямой. **Через любые две точки плоскости можно провести прямую, и притом только одну.**

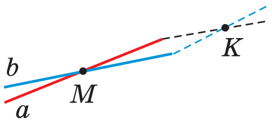


Рис. 27

Из аксиомы следует, что если две прямые (a и b) имеют общую точку (M), то это единственная общая точка (рис. 27). Если предположить, что существует еще одна общая точка (K), то тогда через две точки (M и K) пройдут две прямые, что по аксиоме прямой невозможно.

Определение. Две прямые называются **пересекающимися**, если они имеют общую точку.

Определение. Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

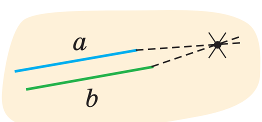


Рис. 28

Если прямые a и b параллельны, то отрезки, изображающие эти прямые, никогда не пересекутся, сколько бы их ни продолжали (рис. 28).

3.2. Луч

Определение. **Лучом** называется часть прямой, ограниченная одной точкой.

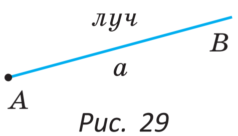


Рис. 29

Точка, ограничивающая луч, принадлежит лучу и называется *началом луча*. Луч бесконечен (в одну сторону). Он обозначается одной малой буквой, или двумя большими буквами латинского алфавита, причем на первом месте всегда записывается начало луча. Вторая точка может быть не отмечена на луче. Она указывает направление луча, например как точка B на луче AB (рис. 29).

Определение. Два луча называются **дополнительными** (противоположными), если они имеют общее начало и лежат на одной прямой.

На рисунке 30 изображены дополнительные лучи OM и OK. Они дополняют друг друга до прямой. Чтобы построить луч, дополнительный данному, достаточно продлить данный луч за его начало вдоль прямой, на которой лежит данный луч. Любая точка прямой разбивает ее на два дополнительных луча.

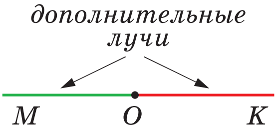


Рис. 30

3.3. Отрезок

Определение. **Отрезком** называется часть прямой, ограниченная двумя точками.

Точки, ограничивающие отрезок, принадлежат отрезку и называются концами отрезка, остальные точки отрезка — его внутренними точками. На рисунке 31 изображен отрезок AB с концами A и B. Точка M — внутренняя точка отрезка AB.

Рис. 31

Если концы отрезка лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, то этот отрезок пересекает прямую, если в одной полуплоскости — то не пересекает. На рисунке 32 концы отрезка AB лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a, и он пересекает прямую a. Концы же отрезка CD лежат в одной полуплоскости, и он не пересекает прямую a.

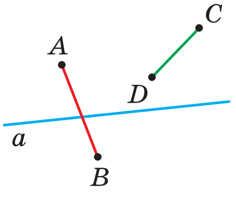


Рис. 32

Если при наложении отрезков их концы совпадут, то по аксиоме прямой эти отрезки совпадут всеми своими точками.

Определение. Два отрезка называются **равными**, если их можно совместить наложением.

Важной характеристикой отрезка является его *длина*. Свойства длины отрезка: каждый отрезок имеет длину, выраженную положительным числом; равным отрезкам соответствуют равные длины, большему отрезку — бо́льшая длина. И наоборот.

Аксиома измерения отрезков. **Если на отрезке взять точку, то она разобьет данный отрезок на два отрезка, сумма длин которых равна длине данного отрезка.**

Аксиома откладывания отрезков. **На любом луче от его начала можно отложить отрезок данной длины, и притом только один.**

Рис. 33

На рисунке 33 точка C лежит на отрезке AB. По аксиоме измерения отрезков следует, что $AC + CB = AB$.

Рис. 34

Серединой отрезка называется точка, которая делит отрезок на два равных отрезка. На рисунке 34 точка M — середина отрезка EF, то есть $EM = MF$.

Определение. **Расстоянием между двумя точками** называется длина отрезка, соединяющего эти точки.

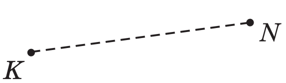


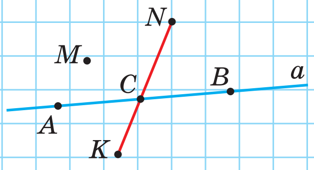
Рис. 35

На рисунке 35 расстояние между точками K и N равно длине отрезка KN.

А теперь выполните **Задание 1**.

Задание 1

Назовите все отрезки (изображенные и которые можно изобразить) с концами в отмеченных на рисунке точках. Укажите общее число этих отрезков.



3.4. Ломаная

На рисунке 36 отрезки AB, BC, CD, DE и EF последовательно соединены своими концами: отрезок BC соединен с отрезком AB, отрезок CD соединен с отрезком BC и так далее. Полученная фигура представляет собой ломаную $ABCDEF$. Указанные отрезки называются *звеньями* ломаной, а точки A, B, C, D, E и F — *вершинами* ломаной.

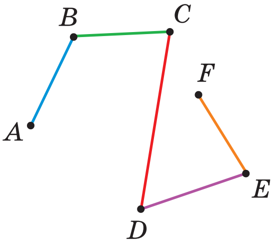
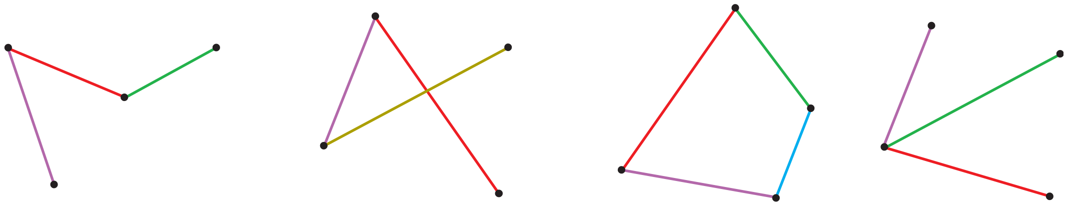


Рис. 36

Определение. **Ломаной** называется геометрическая фигура, образованная отрезками, последовательно соединенными своими концами, у которой никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. **Длиной ломаной** называется сумма длин ее звеньев.

Определение. Ломаная называется **замкнутой**, если начало ее первого звена совпадает с концом последнего. В противном случае она называется **незамкнутой**. Ломаная называется **простой**, если она не имеет самопересечений и никакие два ее звена, кроме соседних, не имеют общих точек. В противном случае она называется **непростой** (рис. 37).



простая незамкнутая ломаная *непростая незамкнутая ломаная* *простая замкнутая ломаная* *не ломаная*

Рис. 37

Простая замкнутая ломаная на плоскости называется *многоугольником*. Звенья этой ломаной называются сторонами этого многоугольника, а вершины — вершинами многоугольника. *Периметром* многоугольника называется сумма длин его сторон. Часть плоскости, ограниченная многоугольником, называется *плоским* многоугольником. Далее, рассматривая плоские многоугольники, слово «плоский» употреблять не будем. Отрезок, соединяющий вершины многоугольника, не принадлежащие одной стороне, называется его *диагональю*. Если у многоугольника три стороны, то у него три вершины и три угла, и он называется треугольником (рис. 38, *а*), если четыре стороны — четырехугольником, если пять — пятиугольником (рис. 38, *б*) и так далее.

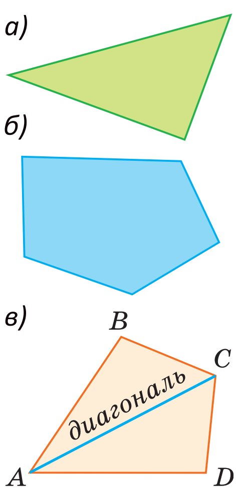


Рис. 38

На рисунке 38, *в* изображен четырехугольник $ABCD$ со сторонами AB, BC, CD и AD. У него четыре угла: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ и две диагонали: AC и BD. Периметр этого четырехугольника:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

При записи многоугольника его вершины записываются *последовательно*, начиная с любой вершины и в любом направлении. Например, $CBAD$ — это тот же четырехугольник $ABCD$.

Самые известные четырехугольники — это прямоугольник и квадрат. У прямоугольника все углы прямые, а противоположные стороны равны. Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны. На рисунке 39 $ABCD$ — прямоугольник, $MNPK$ — квадрат. Позже мы дадим определение прямоугольника и квадрата и рассмотрим их свойства подробно. А пока будем пользоваться указанными представлениями.

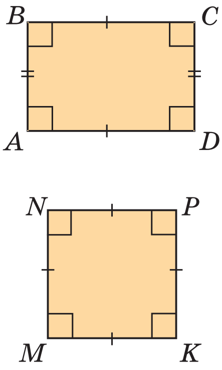
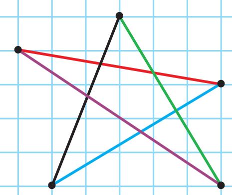


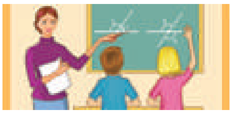
Рис. 39

А теперь выполните **Задание 2.**

Задание 2

Какую ломаную представляет собой «звездочка» с вершинами в отмеченных точках?





Задания к § 3

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *На отрезке AB, равном 24 см, взята точка C. Отрезок AC на 6 см больше отрезка CB. Найти длину отрезка AC.*

Рис. 40

Решение.

Пусть $CB = x$ см, тогда $AC = (x + 6)$ см.

По аксиоме измерения отрезков $AC + CB = AB$ (рис. 40). То есть $(x + 6) + x = 24$, $2x + 6 = 24$, $2x = 24 - 6$, $2x = 18$, $x = \frac{18}{2} = 9$, откуда

$AC = 9 + 6 = 15$ (см).

Ответ: 15 см.

Замечание. В дальнейшем при решении задач не будем ссылаться на аксиому измерения отрезков.

Задача 2. *На отрезке AB отмечены точки C и D* (рис. 41). *Найти длину отрезка CD, если: а) $AB = 36$ см, $AD = 23$ см, $BC = 19$ см; б) $AB = a$, $AD = b$, $BC = c$.*

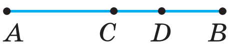


Рис. 41

Решение.

а) $DB = AB - AD = 36 - 23 = 13$ (см),
$CD = BC - DB = 19 - 13 = 6$ (см).

б) Если сложить отрезки AD и BC, то получится отрезок AB плюс отрезок CD. Отсюда $CD = AD + BC - AB = b + c - a$.

Ответ: а) 6 см; б) $b + c - a$.

Задача 3*. *На отрезке AB, равном 42 см, взята точка M. Найти расстояние между серединами отрезков AM и MB.*

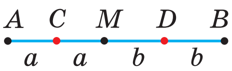


Рис. 42

Решение.

Пусть C — середина отрезка AM, D — середина отрезка MB. Обозначим $AC = CM = a$, $MD = DB = b$ (рис. 42).

Тогда $AB = 2a + 2b = 2(a + b)$, а $CD = a + b$.

Следовательно, $CD = \frac{1}{2}AB = 21$ см.

Ответ: 21 см.

Замечания. 1. В данной задаче мы доказали свойство: «*Если на отрезке отмечена точка, то расстояние между серединами полученных отрезков равно половине данного отрезка*».

2. Утверждения, которые будут доказаны нами в ключевых задачах, могут в дальнейшем использоваться как известные свойства.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Отметьте в тетради четыре точки A, B, C и D, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Изобразите прямые, которые можно провести через пары этих точек. Запишите эти прямые. Запишите лучи с началом в точке B.

2. На прямой отмечены точки A, B и C так, что $AB = 14$ см, $BC = 32$ см, $AC = 18$ см. Определите, какая из точек лежит между двумя другими.

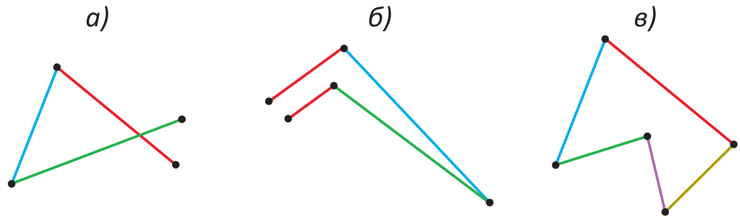


Рис. 43

3. а) На отрезке AB, равном 56 см, взята точка M. Отрезок AM на 4 см меньше отрезка MB. Найдите длину отрезка BM. б) Точка P лежит на отрезке EF, равном 24 дм. Отрезок EP в 3 раза больше отрезка PF. Найдите расстояние от середины отрезка PF до точки E.

4. На отрезке AB отмечены точки K и M так, что точка K лежит между точками A и M, $3AM = 2MB$, $AK = 2KM$, отрезок AK на 12 см больше отрезка KM. Найдите расстояние между точками A и B.

5. Даны три точки A, B и C. Выясните, могут ли они лежать на одной прямой, если:
а) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $AC = 8$ см;
б) $AB = 6{,}8$ дм, $BC = 12{,}3$ дм, $AC = 5{,}5$ дм.

6. Как называется каждая ломаная, изображенная на рисунке 43?

7. Изобразите: а) трехзвенную простую незамкнутую ломаную; б) четырехзвенную простую замкнутую ломаную; в) пятизвенную непростую незамкнутую ломаную.

8. Дана пятизвенная незамкнутая ломаная. Каждое последующее звено, начиная со второго, в 2 раза больше предыдущего звена. Длина ломаной равна 186 см. Найдите длину самого большого ее звена.

9. Дана трехзвенная замкнутая ломаная ABC (рис. 44). Точки M, K, N — середины ее звеньев AB, BC и AC. Точки P, E, G — середины отрезков MB, KC и AN. Найдите длину ломаной ABC, если:
а) $PB + EC + GA = 12$ см;
б) $AP + BE + CG = 108$ см.

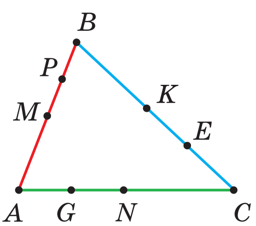


Рис. 44

10*. На отрезке AB отмечены точки M и K так, что точка M лежит между точками A и K. Найдите расстояние между серединами отрезков AM и KB, если:

а) $AB = 32$ см, $MK = 12$ см;
б) $AB = a$, $MK = b$.

11*. На плоскости отмечено 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует отрезков, соединяющих пары этих точек? Решите эту задачу для 100 точек; для n точек.

12*. На ребрах MK и KD куба взяты точки E и G (рис. 45). Из прямых AD, MN, AM, NP, BC и DC запишите те, которые пересекает прямая EG. Запишите все простые ломаные с концами в точках A и P, звенья которых являются ребрами куба.

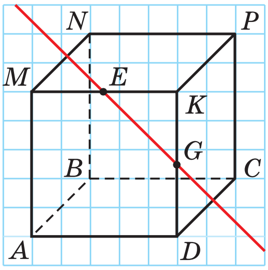
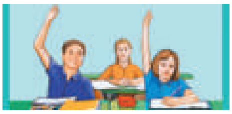


Рис. 45



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

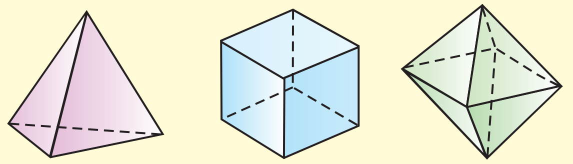
1. Аксиому прямой.
2. Определение параллельных прямых.
3. Определение луча, дополнительных лучей.
4. Определение отрезка, равных отрезков; аксиому измерения отрезков.
5. Определение расстояния между точками.
6. Определение ломаной, замкнутой ломаной, простой ломаной.
7. Определение многоугольника, периметра многоугольника.

Умеем

1. Строить луч с началом в данной точке и луч, дополнительный данному.
2. Откладывать на луче от его начала отрезок данной длины при помощи линейки или циркуля.

Геометрия 3D

Геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называется *многогранником*.



многогранники

Многогранником является прямоугольный параллелепипед, все шесть его граней — прямоугольники (рис. 46). Длины трех его ребер, имеющих общую вершину, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда. Это его длина, ширина и высота. Например, $AD = a$, $DC = b$ и $DD_1 = c$ — измерения параллелепипеда. Объем прямоугольного параллелепипеда находится по формуле $V = abc$.

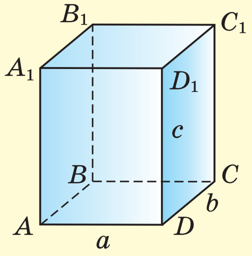


Рис. 46

Задача. *У прямоугольного параллелепипеда* (*см. рис.* 46) *периметр грани* AA_1D_1D *равен* 20 *см, грань* $ABCD$ *— квадрат с периметром* 16 *см. Найдите*:

а) *длину пространственной ломаной* $ABCC_1D_1A_1$;

б) *периметр и площадь грани* DD_1C_1C;

в) *объем параллелепипеда.*

Моделирование

Самолет компании «Белавиа» совершил полет по маршруту Минск — Могилев — Гомель — Брест — Гродно — Витебск — Минск (рис. 47).

а) Определите примерную длину замкнутой ломаной этого маршрута, воспользовавшись картой Беларуси или **Интернетом**.

б*) Выясните, в какой из городов следует вылететь из Минска, чтобы, последовательно посетив указанные города по часовой стрелке и вернувшись в Минск, получить самый короткий маршрут.

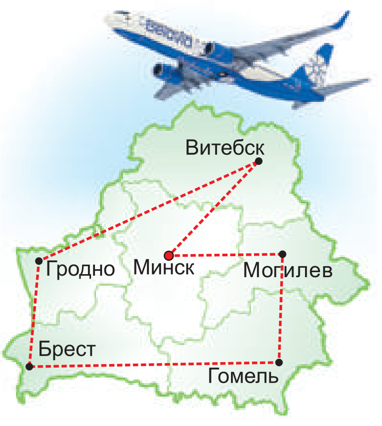
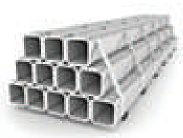
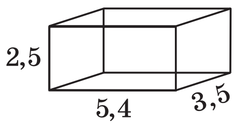


Рис. 47

Реальная геометрия





Есть 12 металлических труб длиной 6 м каждая. Необходимо из этих труб сделать каркас для гаража в форме прямоугольного параллелепипеда шириной 3,5 м, длиной 5,4 м и высотой 2,5 м. Трубы разрезают на отрезки нужной длины и крепят по углам каркаса.

Определите: а) сколько труб пойдет на каркас гаража при самом экономном варианте разрезания; б*) сколько процентов от использованных труб составят отходы.

§ 4. Окружность и круг

Определение. **Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется *центром* окружности.

Радиусом окружности называется отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой на окружности (или длина этого отрезка).

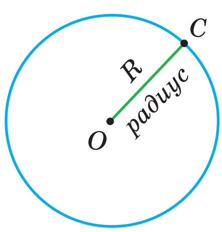


Рис. 48

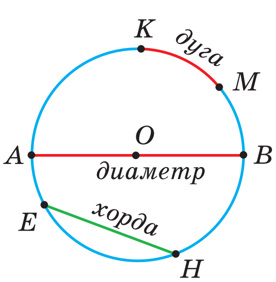


Рис. 49

Хордой окружности называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр окружности.

Дугой окружности называется часть окружности, ограниченная двумя точками.

На рисунке 48 точка O — центр, отрезок OC — радиус окружности. Радиус обозначают буквой R (или r): $OC = R$. Из определения окружности следует, что все радиусы одной окружности равны между собой.

На рисунке 49 изображены: хорда EH, дуга KM (обозначается: $\cup KM$), диаметр AB. Диаметр состоит из двух радиусов. Поэтому диаметры окружности равны между собой. Например, диаметр AB состоит из ра-