

§ 5. Угол. Виды углов

Определения. Угол — это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки, и частью плоскости, которую они ограничивают.

Два угла называются **равными**, если их можно совместить наложением.

Биссектрисой угла называется луч, который выходит из вершины угла и делит его на два равных угла.

Определение. **Развернутым** углом называется угол, стороны которого являются дополнительными лучами.

На рисунке 56 луч AK — биссектриса угла BAC и $\angle BAK = \angle CAK$.

На рисунке 57 угол ABC — развернутый, лучи BA и BC — дополнительные. Другая (незакрашенная) полуплоскость относительно прямой AC также задает развернутый угол ABC .

Углы измеряются в градусах, минутах, секундах. **Градусом** называется $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла и обозначается 1° ; развернутый угол равен 180° ; $\frac{1}{60}$ часть одного градуса называется **минутой** и обозначается $1'$; $\frac{1}{60}$ часть минуты называется **секундой** и обозначается $1''$.

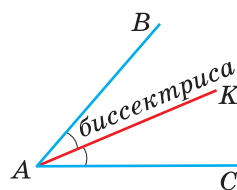


Рис. 56

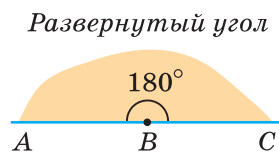


Рис. 57

Угол, равный 5 градусам 20 минут и 35 секунд, записывается так: $5^\circ 20' 35''$.

Вместо «градусная мера угла равна 20° » часто говорят «угол равен 20° », вместо «найти градусную меру угла» говорят «найти угол».

А теперь выполните **Задание 1**.

Задание 1

Найдите сумму и разность углов α и β , если
$\alpha = 62^\circ 50' 30''$,
$\beta = 12^\circ 20' 40''$.

Определение. Угол, равный 90° , называется **прямым**; угол, меньший 90° , — **острым**; угол, больший 90° , но меньший 180° , — **тупым**; угол, равный 360° , называется **полным** (его стороны совпадают).

На рисунке 58 последовательно изображены: острый угол, равный 60° ; прямой угол, равный 90° ; тупой угол, равный 120° ; угол, равный 270° ; полный угол, равный 360° .

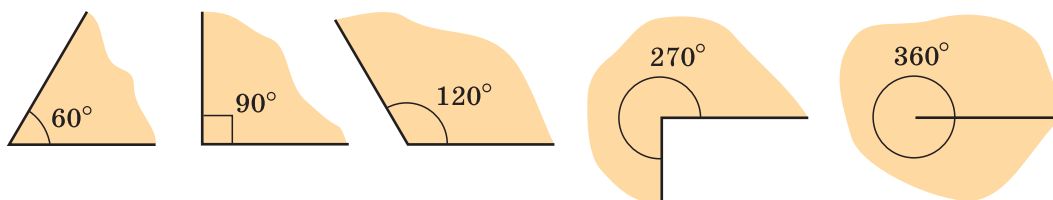
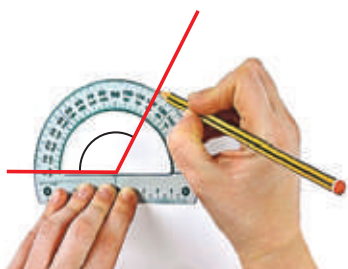


Рис. 58



Градусная мера угла является его важной характеристикой. Свойства градусной меры угла: любой угол имеет градусную меру, выраженную некоторым положительным числом; равным углам соответствуют равные градусные меры, а большему углу — большая градусная мера. И наоборот.

Аксиома измерения углов. Если внутри угла из его вершины провести луч, то он разобьет данный угол на два угла, сумма градусных мер которых равна градусной мере данного угла.

Аксиома откладывания углов. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол данной градусной меры, и притом только один.

На рисунке 59 луч AD проходит внутри угла BAC . По аксиоме измерения углов $\angle BAD + \angle CAD = \angle BAC$. Если из вершины развернутого угла AOB (рис. 60) провести луч OC , который

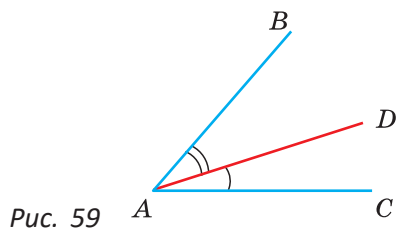


Рис. 59

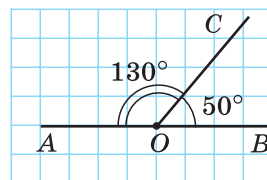


Рис. 60

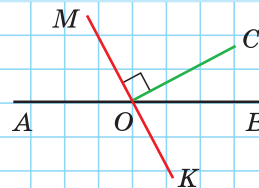
составит со стороной OB угол 50° , то со стороной OA луч OC составит угол $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Два луча с общим началом задают на плоскости два угла. В дальнейшем будем рассматривать меньший из этих двух углов (если они не развернутые). Такой угол меньше 180° .

А теперь выполните **Задание 2**.

Задание 2

Сколько острых, тупых, прямых и развернутых углов можно насчитать на рисунке?



Задания к § 5

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. Внутри угла BAC , равного 114° , из его вершины проведено луч AE . Угол BAE в 2 раза больше угла EAC . Найдите величину угла BAE .

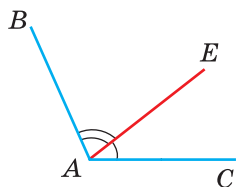


Рис. 61

Решение. Пусть $\angle EAC = x$. Тогда $\angle BAE = 2x$ (рис. 61). По аксиоме измерения углов $\angle EAC + \angle BAE = \angle BAC$. Отсюда $x + 2x = 114^\circ$, $3x = 114^\circ$, $x = \frac{114^\circ}{3} = 38^\circ$, $\angle BAE = 2 \cdot 38^\circ = 76^\circ$.
Ответ: 76° .

Замечания. 1. Возможен другой способ записи решения, когда рядом с буквой x пишут знак градуса: $\angle MAC = x^\circ$, $\angle BAM = 2x^\circ$. Тогда в уравнении знак градуса писать не нужно: $x + 2x = 114$.

2. В дальнейшем при решении задач не будем ссылаться на аксиому измерения углов.

Задача 2. Внутри угла ABC проведены лучи BD и BF (рис. 62). Найдите величину угла DBF , если: а) $\angle ABC = 109^\circ$, $\angle ABF = 95^\circ$, $\angle CBD = 54^\circ$; б) $\angle ABC = \alpha$, $\angle ABF = \beta$, $\angle CBD = \gamma$.

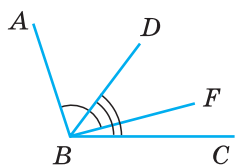


Рис. 62

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \angle FBC &= \angle ABC - \angle ABF = 109^\circ - 95^\circ = 14^\circ, \\ \angle DBF &= \angle CBD - \angle FBC = 54^\circ - 14^\circ = 40^\circ. \end{aligned}$$

б) Если сложить углы ABF и CBD , то получится угол ABC плюс угол DBF . Отсюда $\angle DBF = \angle ABF + \angle CBD - \angle ABC = \beta + \gamma - \alpha$.

Ответ: а) 40° ; б) $\beta + \gamma - \alpha$.

Задача 3*. Луч AD делит угол BAC на два угла: $\angle BAD$ и $\angle CAD$. Доказать, что угол между биссектрисами AK и AE углов BAD и CAD равен половине угла BAC (рис. 63).

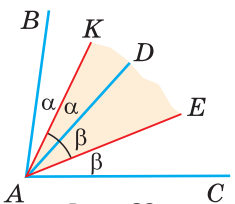


Рис. 63

Доказательство. Так как AK и AE — биссектрисы, то $\angle BAK = \angle DAK = \alpha$ и $\angle CAE = \angle DAE = \beta$. Тогда $\angle BAC = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$, $\angle KAE = \alpha + \beta$. Следовательно, $\angle KAE = \frac{1}{2} \angle BAC$. Что и требовалось доказать.

Замечание. В данной задаче мы доказали свойство: «Если внутри угла из его вершины провести луч, то угол между биссектрисами полученных углов равен половине данного угла».



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

20. На рисунке 64 изображены углы, равные 50° , 80° , 90° , 120° , 180° . Укажите эти углы.

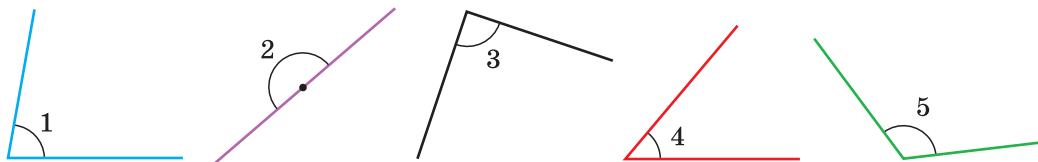


Рис. 64

21. Даны углы: 1° , $80^\circ 52'$, 100° , 90° , 45° , 99° , 179° , 89° , 180° . Определите, сколько среди них:

- а) острых углов; б) тупых углов.

22. Известно, что $\angle BAC = 68^\circ$, AM — биссектриса угла BAC , AK — биссектриса угла MAC . Найдите градусную меру угла BAK .
23. Внутри прямого угла KMN проведены лучи MA и MB , $\angle KMB = 72^\circ$, $\angle AMN = 48^\circ$. Найдите $\angle AMB$.
24. На рисунке 65 равные углы обозначены дугами, квадратиком — прямой угол. Найдите углы, обозначенные знаком вопроса.

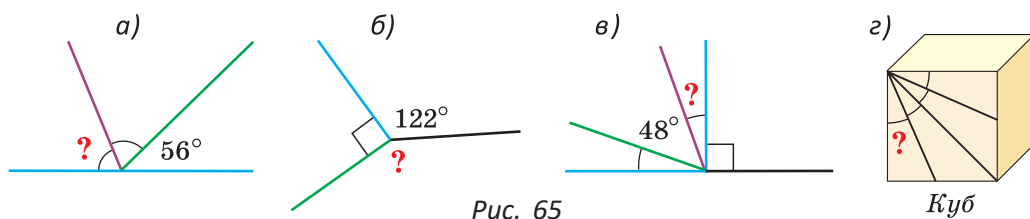


Рис. 65

Куб

25. Угол BAC равен 130° . Луч AK проходит внутри угла BAC так, что угол BAK на 30° меньше угла CAK . Найдите угол BAK .
26. Угол NAK равен 48° . Луч AB делит угол NAK на два угла, причем $\angle NAB : \angle KAB = 3 : 5$. Найдите угол между биссектрисой угла KAB и лучом AN .
27. Из точки C , взятой на прямой AB , в одну полуплоскость проведены лучи CD и CE так, что $\angle ACE = 156^\circ$, а $\angle DCB$ — прямой. Найдите угол DCE .
- 28*. Определите, какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 10 ч 10 мин (рис. 66).
- 29*. Внутри угла AOB расположен угол COD (рис. 67). Найдите угол между биссектрисами OK и OM углов AOC и BOD , если:
- а) $\angle AOB = 160^\circ$, $\angle COD = 40^\circ$; б) $\angle AOB = \alpha$, $\angle COD = \beta$.



Рис. 66

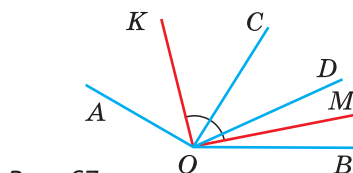


Рис. 67



При помощи **Интернета** выясните, как переводится слово «градус» и что еще, кроме углов, измеряют в градусах.

Моделирование

Круглая площадка для метания молота, обнесенная металлической сеткой, имеет свободный от сетки сектор. Через него вылетает спортивный снаряд (рис. 68). Центральный угол этого сектора составляет 12,5 % от полного угла. Найдите угол AOB .

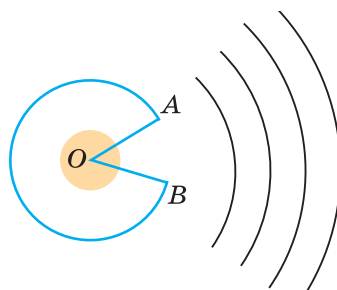


Рис. 68

Интересно знать. Двукратный чемпион мира белорусский метатель молота Иван Тихон выиграл серебряную медаль на олимпийских играх в Рио-де-Жанейро в 2016 г.

Геометрия 3D

В пространстве при пересечении двух плоскостей образуются *двугранные* углы. Две полуплоскости с общей границей являются гранями такого двугранного угла, а их граница — его ребром. Измеряется двугранный угол величиной *линейного* угла, образованного двумя лучами, проведенными в каждой из полуплоскостей из точки на ребре двугранного угла перпендикулярно этому ребру. На рисунке 69 $\angle ABC$ — линейный угол изображенного двугранного угла.

Задача. Найдите величину двугранного угла, если его линейный угол составляет 70 % прямого угла.

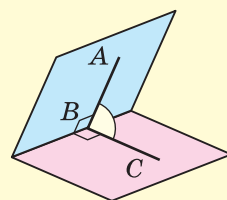
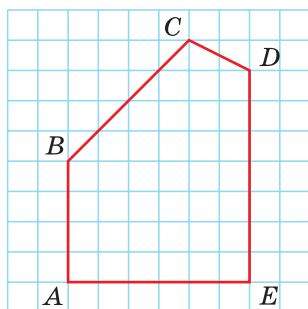


Рис. 69

Реальная геометрия

Мастер измерил углы между стенами в студии при помощи электронного угломера. Студия имеет форму пятиугольника. У мастера после измерения получились углы, равные 90° , 135° , 108° , 117° , 90° .



Перенесите план студии, изображенный на рисунке, в тетрадь и определите при помощи транспортира все углы между соседними стенами. Запишите, чему равны углы A , B , C , D и E . Выясните, не ошибся ли мастер при измерениях, если известно, что сумма углов любого пятиугольника равна 540° .

§ 6. Смежные углы. Вертикальные углы

Определение. Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Если на рисунке 70 лучи OA и OB дополнительные, то углы AOC и BOC — смежные.

Теорема (свойство смежных углов).
Сумма смежных углов равна 180° .

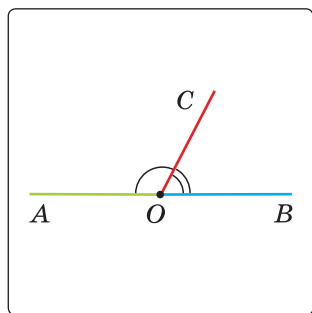


Рис. 70

Дано: $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

Доказать: $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$.

Доказательство. Из определения смежных углов следует, что лучи OA и OB являются дополнительными и поэтому образуют развернутый угол AOB , равный 180° . Луч OC проходит между сторонами этого угла, и по аксиоме измерения углов $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$. Поэтому $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$.

Теорема доказана.