

Перенесите план студии, изображенный на рисунке, в тетрадь и определите при помощи транспортира все углы между соседними стенами. Запишите, чему равны углы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ . Выясните, не ошибся ли мастер при измерениях, если известно, что сумма углов любого пятиугольника равна  $540^\circ$ .

## § 6. Смежные углы. Вертикальные углы

**Определение.** Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Если на рисунке 70 лучи  $OA$  и  $OB$  дополнительные, то углы  $AOC$  и  $BOC$  — смежные.

**Теорема (свойство смежных углов).**  
Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .

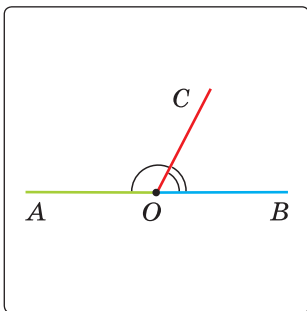


Рис. 70

Дано:  $\angle AOC$  и  $\angle BOC$  — смежные.

Доказать:  $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ .

**Доказательство.** Из определения смежных углов следует, что лучи  $OA$  и  $OB$  являются дополнительными и поэтому образуют развернутый угол  $AOB$ , равный  $180^\circ$ . Луч  $OC$  проходит между сторонами этого угла, и по аксиоме измерения углов  $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ . Поэтому  $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ .

Теорема доказана.

**Следствия.**

1. Если смежные углы равны, то каждый из них прямой.
2. Если два угла равны, то равны и смежные с ними углы.

*Замечание.* Все теоремы курса геометрии 7—9-х классов описывают свойства фигур на плоскости.

**Определение.** Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными лучами к сторонам другого.

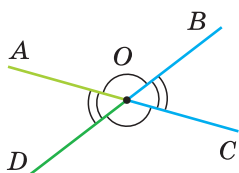


Рис. 71

При пересечении двух прямых  $AC$  и  $DB$  в точке  $O$  (рис. 71) получается, что лучи  $OA$  и  $OC$ ,  $OB$  и  $OD$  — дополнительные. Поэтому углы  $AOD$  и  $BOC$  — вертикальные. Углы  $AOB$  и  $DOC$  также вертикальные.

**Теорема (свойство вертикальных углов).**

**Вертикальные углы равны.**

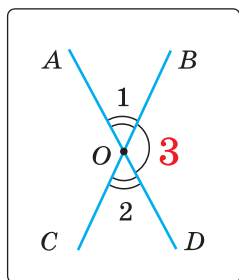


Рис. 72

Дано:  $\angle 1$  и  $\angle 2$  — вертикальные (рис. 72).

Доказать:  $\angle 1 = \angle 2$ .

**Доказательство.** Углы 1 и 3 смежные, так как лучи  $OA$  и  $OD$  — дополнительные по определению вертикальных углов. По свойству смежных углов  $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ . Углы 2 и 3 также смежные,  $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ . Так как  $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$ ,  $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$ , то  $\angle 1 = \angle 2$ . Теорема доказана.

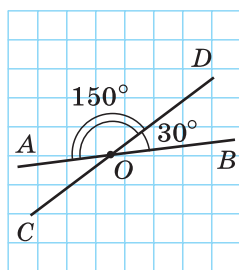


Рис. 73

*Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется меньший из образованных ими углов. Если при пересечении прямых  $AB$  и  $CD$  (рис. 73)  $\angle DOB = 30^\circ$ , то  $\angle AOD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ;  $\angle AOC = \angle BOD$ ,  $\angle COB = \angle AOD$  как вертикальные. Угол между прямыми  $AB$  и  $CD$  равен  $30^\circ$ . Говорят, что прямые пересекаются под углом  $30^\circ$ .

При пересечении двух прямых образуются четыре угла (не считая развернутых). Если один из них равен  $90^\circ$ , то и остальные равны по  $90^\circ$  (докажите самостоятельно). Говорят, что прямые пересекаются под прямым углом.

Угол между параллельными прямыми считается равным  $0^\circ$ .



## Задания к § 6

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Смежные углы относятся как 2 : 3. Найти величину каждого из углов.



Рис. 74

Решение. Пусть  $\angle 1$  и  $\angle 2$  — данные смежные углы (рис. 74). Согласно условию  $\angle 1 = 2x$ ,  $\angle 2 = 3x$  (градусную меру одной части принимаем за  $x$ ). По свойству смежных углов  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ , то есть  $2x + 3x = 180^\circ$ ,  $5x = 180^\circ$ ,  $x = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ ,  $\angle 1 = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$ ;  $\angle 2 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ .

Ответ:  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ .

**Задача 2.** а) Найти угол между биссектрисами  $OK$  и  $OM$  смежных углов  $BOC$  и  $AOC$  (рис. 75), если  $\angle BOC = 70^\circ$ . б) Доказать, что биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

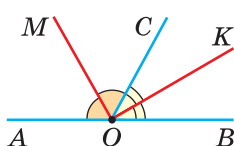


Рис. 75

Решение. а) Если  $\angle BOC = 70^\circ$ , то  $\angle AOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ;  $\angle COK = 35^\circ$ ,  $\angle COM = 55^\circ$ ;  $\angle MOK = 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$ .

б) Так как  $OM$  и  $OK$  — биссектрисы, то  $\angle COM = \frac{1}{2} \angle AOC$ ,  $\angle COK = \frac{1}{2} \angle BOC$ .

Рассмотрим угол  $MOK$ :  $\angle MOK = \angle COM + \angle COK = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOC)$ .

По свойству смежных углов  $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ .

Тогда  $\angle MOK = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ . Что и требовалось доказать.

*Замечание.* При решении задачи 2 можно было сослаться на ключевую задачу 3\* к § 5.

**Задача 3\*.** Доказать, что биссектрисы вертикальных углов образуют развернутый угол.

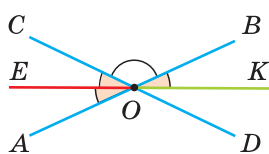


Рис. 76

Решение. Пусть  $OE$  и  $OK$  — биссектрисы вертикальных углов  $AOC$  и  $BOD$  (рис. 76). Докажем, что  $\angle EOK$  — развернутый. Известно, что биссектриса делит угол пополам. Так как вертикальные углы равны, то равны и их половины. Поэтому  $\angle AOE = \angle BOK$ .  $\angle AOE + \angle EOC + \angle COB = 180^\circ$ , так как лучи  $OA$  и  $OB$  дополнительные, и поэтому  $\angle AOB$  — развернутый. Заменяя в последнем равенстве  $\angle AOE$  на равный ему  $\angle BOK$ , получим  $\angle BOK + \angle EOC + \angle COB = 180^\circ$ . Отсюда следует, что  $\angle EOK$  — развернутый.

*Замечание.* Из решения задачи следует свойство: «Если  $\angle AOB$  — развернутый и  $\angle AOE = \angle BOK$ , то  $\angle AOE$  и  $\angle BOK$  — вертикальные».



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 30.** Один из смежных углов равен:  
а)  $40^\circ$ ;    б)  $75^\circ$ ;    в)  $140^\circ 20'$ .  
Найдите другой угол.
- 31.** На рисунке 77 углы  $MON$  и  $KON$  — смежные, угол  $MON$  на  $70^\circ$  больше угла  $KON$ . Найдите  $\angle MON$ .
- 32.** На рисунке 78  $\angle ABM = 100^\circ$ ,  $\angle CBK = 155^\circ$ . Найдите  $\angle KBM$ .
- 33.** На рисунке 79 смежные углы  $AOP$  и  $BOP$  относятся как  $4 : 5$ . Найдите угол между биссектрисой  $OE$  угла  $BOP$  и лучом  $OA$ .
- 34.** На рисунке 80  $AB$  и  $CD$  — диаметры окружности, угол  $AOD$  составляет  $\frac{1}{2}$  угла  $AOC$ . Найдите угол  $BOD$ .

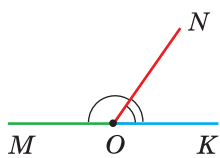


Рис. 77

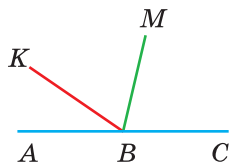


Рис. 78

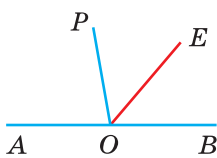


Рис. 79

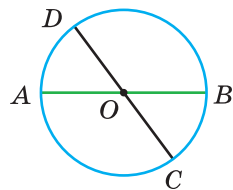


Рис. 80

35. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен:

- а)  $20^\circ$ ;    б)  $110^\circ$ ;    в)  $90^\circ$ .

Найдите остальные три угла.

36. Найдите углы 1, 2, 3 и 4 (рис. 81).

37. На рисунке 82  $\angle 1 + \angle 3 = 250^\circ$ . Найдите  $\angle 1$ ,  $\angle 2$ ,  $\angle 3$ ,  $\angle 4$ .

38. Сумма углов 1, 2 и 3 равна  $297^\circ$  (рис. 83). Найдите сумму углов 2, 3 и 4.

39. Известно, что  $2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 900^\circ$  (рис. 84). Найдите угол  $\varphi$  (фи).

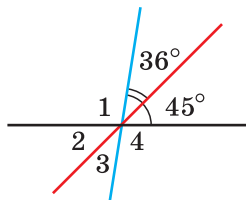


Рис. 81

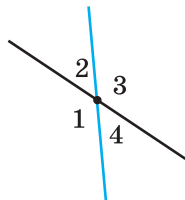


Рис. 82

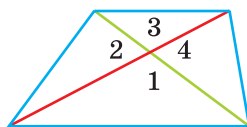


Рис. 83

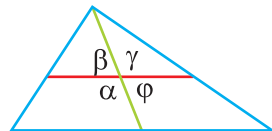


Рис. 84

40. Углы 1 и 2 смежные. Найдите угол 1, если:

- а)  $\angle 1 - \angle 2 = 28^\circ$ ;    б)  $\angle 1 : \angle 2 = 7 : 2$ ;  
в)  $\angle 1 = \frac{2}{3}\angle 2$ ;    г)  $5 \cdot \angle 1 - 7 \cdot \angle 2 = 0$ .

41. Прямоугольный лист картона обрезан под углом  $38^\circ$  к его большей стороне. На рисунке 85, а показана отрезанная часть. На каком из рисунков 85, б, 85, в или 85, г изображена другая часть листа?

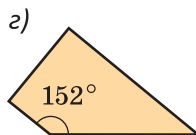
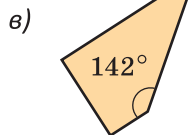
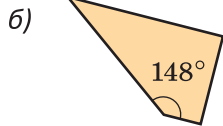
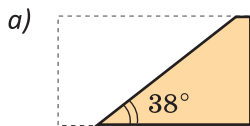


Рис. 85

**42\*.** Найдите сумму углов 1, 2 и 3 (рис. 86).

**43\*.** После того как один из смежных углов поворотом общей стороны вокруг вершины увеличили на 40 %, другой угол уменьшился на 60 %. Найдите первоначальную величину данных смежных углов.

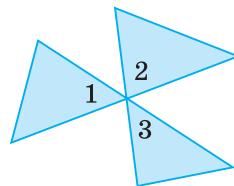


Рис. 86

**44\*.** Через одну точку на плоскости проходят четыре прямые, которые делят плоскость на 8 углов, три из которых относятся как 1 : 2 : 3, а один из углов равен сумме трех указанных. Найдите каждый угол.



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Определения: угла, равных углов, биссектрисы угла, развернутого угла, градуса.
2. Какой угол называется прямым, острым, тупым, полным.
3. Свойство смежных углов. Свойство вертикальных углов.

### Умеем

1. Доказывать свойство смежных углов.
2. Доказывать свойство вертикальных углов.
3. Откладывать при помощи транспортира угол, равный данному.

## Моделирование



Вырежьте из бумаги угол, равный  $40^\circ$ . При помощи перегибания бумаги получите угол, равный:

- а)  $10^\circ$ ;    б)  $30^\circ$ ;    в)  $140^\circ$ ;    г)  $35^\circ$ .

Исследуйте, какие углы, измеряющиеся целым числом градусов, можно получить из данного угла путем складывания.

## Гимнастика ума

Семиклассник стоит лицом к учителю физкультуры. Учитель дал учащемуся команду повернуться 7 раз налево, 8 раз направо и 9 раз кругом. Как теперь по отношению к учителю стоит ученик:

- а) левым боком;                      б) правым боком;  
в) спиной;                                г) лицом?

