### *Гимнастика ума*

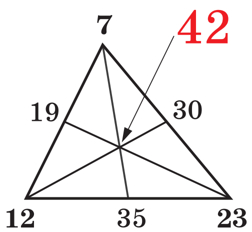



*Рис. 125*

В вершинах треугольника запишем по одному произвольному числу. Например, числа 12; 7 и 23 (рис. 125). Найдем суммы чисел, стоящих у концов каждой стороны. Запишем полученные суммы у середин этих сторон: $12 + 7 = 19$, $12 + 23 = 35$ и $23 + 7 = 30$.

Далее проведем медианы и найдем суммы чисел, записанных у концов каждой медианы. Получим $7 + 35 = 42$, $12 + 30 = 42$, $23 + 19 = 42$. Все три суммы одинаковы и равны 42!

Нарисуйте в тетради треугольник и запишите в его вершинах три свои числа. Проделайте описанные выше операции и найдите суммы чисел, записанных у концов каждой медианы. Если вы все делали правильно, то получите три одинаковые суммы. Как вы это объясните?

## § 11. Равнобедренный треугольник

Определение. Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны.

Равные стороны называются **боковыми** сторонами, третья сторона — **основанием**, вершина, противолежащая основанию, — **вершиной** равнобедренного треугольника.

Рассмотрим некоторые свойства равнобедренного треугольника и один из его признаков.

Теорема (о свойстве углов при основании).
**В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.**

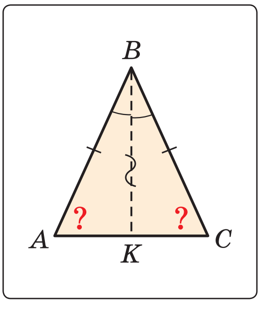



*Рис. 126*

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$ (рис. 126).
Доказать: $\angle A = \angle C$.
Доказательство. Проведем биссектрису $BK$ треугольника $ABC$. Треугольники $ABK$ и $CBK$ равны по двум сторонам и углу между ними: сторона $BK$ — общая, $AB = BC$ по условию, углы $ABK$ и $CBK$ равны по определению биссектрисы. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle A = \angle C$. Теорема доказана.

Теорема (о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника).
**В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является его медианой и высотой.**

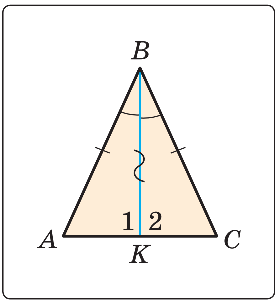


*Рис. 127*

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $BK$ — биссектриса (рис. 127).
Доказать: $BK$ — медиана и высота.
Доказательство. Треугольники $ABK$ и $CBK$ равны по двум сторонам и углу между ними (см. предыдущую теорему). Из равенства треугольников следует, что $AK = KC$ и $\angle 1 = \angle 2$. Так как углы 1 и 2 смежные, то их сумма равна $180°$, поэтому $\angle 1 = \angle 2 = 90°$. Следовательно, $BK$ — медиана и высота.
Теорема доказана.

*Замечание.* Поскольку из вершины треугольника можно провести только одну биссектрису, одну высоту и одну медиану, то теорему можно сформулировать так: «*Биссектриса, высота и медиана равнобедренного треугольника, проведенные из вершины к основанию, совпадают*». То есть если по условию задачи дана высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, то согласно данной теореме она является биссектрисой и медианой. Аналогично, если дана медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, то она является высотой и биссектрисой.

Теорема (признак равнобедренного треугольника).
**Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.**

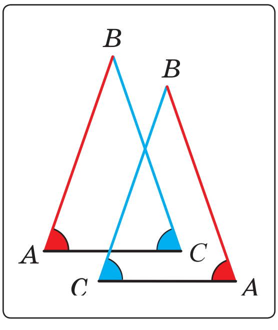


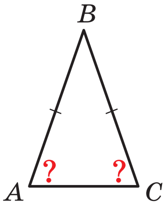
*Рис. 128*

Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle C$.
Доказать: $AB = BC$.
Доказательство. Мысленно перевернем треугольник $ABC$ обратной стороной (рис. 128) и наложим перевернутый треугольник на треугольник $ABC$ так, чтобы их стороны $AC$ совпали, угол $C$ совпал с углом $A$, угол $A$ совпал с углом $C$. Тогда перевернутый треугольник совместится с данным и сторона $BC$

совместится со стороной $AB$. Следовательно, $AB = BC$, то есть $\triangle ABC$ — равнобедренный. Теорема доказана.

Доказанный признак равнобедренного треугольника является теоремой, обратной теореме о свойстве углов при основании равнобедренного треугольника (рис. 129).

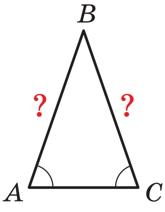
Теорема. *Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны.*




Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$.

Доказать: $\angle A = \angle C$.

Обратная теорема. *Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.*




Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle C$.

Доказать: $AB = BC$.

*Рис. 129*

Напомним, что любая теорема состоит из условия — того, что дано, и заключения — того, что нужно доказать. У теоремы, обратной данной, условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы.

## Задания к § 11

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *Доказать, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны между собой.*

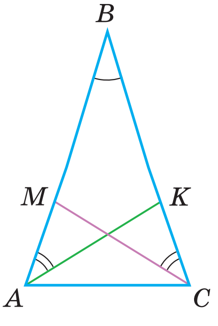



*Рис. 130*

Доказательство. Пусть в треугольнике $ABC$ $AB = BC$, $AK$ и $CM$ — биссектрисы (рис. 130). Нужно доказать, что $AK = CM$. Рассмотрим $\triangle AKB$ и $\triangle CMB$. У них $\angle B$ — общий, $AB = BC$ по условию, $\angle BAK = \angle BCM$ как половины равных углов $A$ и $C$ при основании равнобедренного треугольника. Тогда $\triangle AKB = \triangle CMB$ по 2-му признаку равенства треугольников, откуда $AK = CM$. Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Вторым способом доказательства будет рассмотрение $\triangle AKC$ и $\triangle CMA$ и доказательство их равенства.

**Задача 2.** *Доказать, что перпендикуляр, проведенный из центра окружности к хорде, делит эту хорду пополам.*

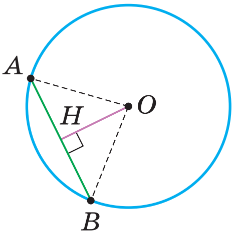



*Рис. 131*

Доказательство. Пусть $O$ — центр окружности, $AB$ — хорда, $OH$ — перпендикуляр к хорде $AB$ (рис. 131). Отрезки $OA$ и $OB$ равны как радиусы. Поэтому треугольник $AOB$ — равнобедренный, а $OH$ — его высота, проведенная к основанию. Мы знаем, что высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и медианой. А медиана делит сторону треугольника пополам, то есть $AH = HB$. Что и требовалось доказать.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**83.** Найдите отрезок или угол, обозначенные знаком вопроса (рис. 132). Объясните свой ответ.

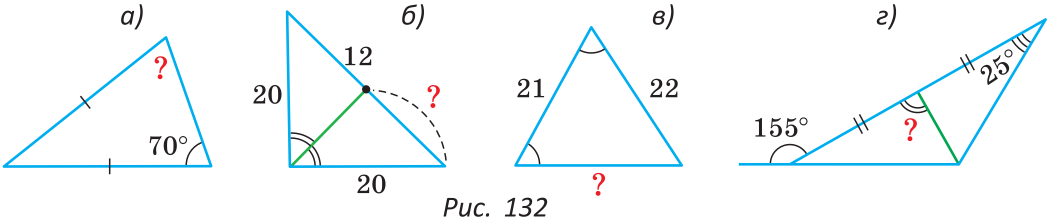



*Рис. 132*

**84.** Дан треугольник $ABC$, у которого $\angle A = \angle B$, $AB + BC = 12$ см, $AC + BC = 16$ см. Найдите периметр $\triangle ABC$.

**85.** В треугольнике $ABC$ $AC = AB = 12$ м, $P_{ABC} = 32$ м, $AK$ — высота треугольника. Найдите отрезок $CK$.

**86.** Треугольник $ABC$ — равносторонний, $CK$ — его биссектриса, $AK = 7{,}5$ см. Найдите периметр $\triangle ABC$.

**87.** На рисунке 133 треугольник $ABC$ — равнобедренный, где $AB = BC$. Докажите, что треугольник $KBM$ также равнобедренный, если: а) $AK = CM$; б) $AM = CK$; в) $\angle ABK = \angle CBM$.

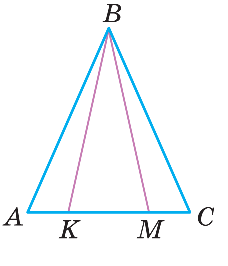



*Рис. 133*

**88.** Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

**89.** Докажите свойство углов равностороннего треугольника: «В равностороннем треугольнике все углы равны между собой». Сформулируйте утверждение, обратное данному (признак равностороннего треугольника). Докажите его.

**90.** Основание равнобедренного треугольника относится к его боковой стороне как 2 : 3. Периметр треугольника равен 72 см. Найдите основание треугольника.

**91.** В равнобедренном треугольнике $MNK$ ($KM = KN$) проведена биссектриса $KE$, равная 24 см. Периметр треугольника $KEN$ равен 56 см. Найдите периметр треугольника $MNK$.

**92.** Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны между собой.

**93.** Треугольник $ABC$ — равнобедренный, $AB = BC$. На луче $AC$ за точку $C$ отложен отрезок $CM$, на луче $CA$ за точку $A$ отложен отрезок $AK$ такой, что $AK = CM$. Докажите, что треугольник $MBK$ равнобедренный.

**94.** Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды (не являющейся диаметром), перпендикулярен этой хорде.

**95*.** В треугольнике $MNK$ проведена биссектриса $ME$. Известно, что $\angle MKN + \angle NME = \angle MNK + \angle KME$, $KE = 4$ см, $MN = 9$ см. Найдите периметр треугольника $MNK$.

**96*.** Треугольник $ABC$ — равносторонний (рис. 134, *а*, *б*). Докажите, что треугольник $MNK$ — равносторонний, если:
а) $MB = 2AM$, $NC = 2BN$, $AK = 2KC$;
б) $AM = AB$, $CN = AC$, $BK = BC$.

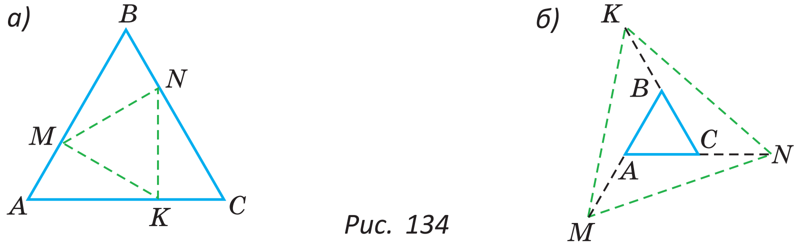



*Рис. 134*

**97*.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AK$ и $CM$ к боковым сторонам. Биссектрисы пересекаются в точке $O$. Докажите, что $\triangle AOM = \triangle COK$.

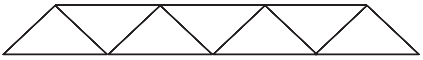


*Рис. 135*

**98*.** Одна сторона пролета моста представляет собой объединение семи равных равнобедренных треугольников, сваренных из металлических балок (рис. 135). Периметр одного такого треугольника равен 11 м. На изготовление одной стороны пролета моста пошло 59 м металлических балок. Определите длину (по низу) всего пролета.

**99*.** На сторонах угла $A$ отложены равные отрезки $AB$ и $AC$. На отрезке $AB$ взята точка $M$, на отрезке $AC$ — точка $K$ так, что $\angle ABK = \angle ACM$. Отрезки $BK$ и $CM$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что треугольник $MOK$ равнобедренный.

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Определение высоты, медианы и биссектрисы треугольника.
2. Определение равнобедренного треугольника, названия его сторон и углов.
3. Свойство углов равнобедренного треугольника.
4. Свойство биссектрисы равнобедренного треугольника
5. Признак равнобедренного треугольника, связанный с углами.

**Умеем**

1. Доказывать теорему о свойстве углов равнобедренного треугольника.
2. Доказывать теорему о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника.

3*. Доказывать признак равнобедренного треугольника.