§ 12. Признаки равнобедренного треугольника

Вы уже знаете один признак равнобедренного треугольника: «Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный». Докажем еще три признака равнобедренного треугольника, связанных с его высотой, медианой и биссектрисой.

Теорема. **Если в треугольнике высота является медианой, то треугольник равнобедренный.**

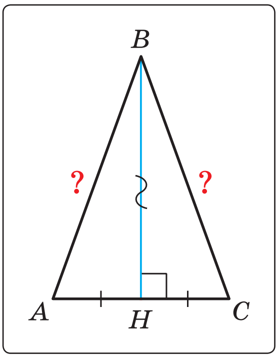


Рис. 136

Дано: BH — высота и медиана $\triangle ABC$.
Доказать: $AB = BC$ (рис. 136).
Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABH$ и $\triangle CBH$. У них сторона BH — общая, $\angle AHB = \angle CHB = 90°$ (так как BH — высота), $AH = CH$ (так как BH — медиана). Треугольники ABH и CBH равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон AB и BC.
Теорема доказана.

Теорема. **Если в треугольнике высота является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.**

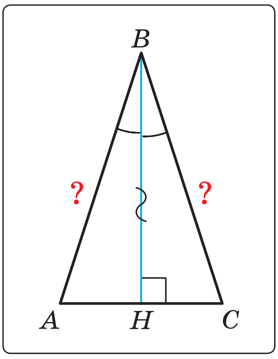


Рис. 137

Дано: BH — высота и биссектриса $\triangle ABC$.
Доказать: $AB = BC$ (рис. 137).
Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABH$ и $\triangle CBH$. У них сторона BH — общая, $\angle AHB = \angle CHB = 90°$ (так как BH — высота), $\angle ABH = \angle CBH$ (так как BH — биссектриса). Треугольники ABH и CBH равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон AB и BC.
Теорема доказана.

Теорема. **Если в треугольнике медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.**

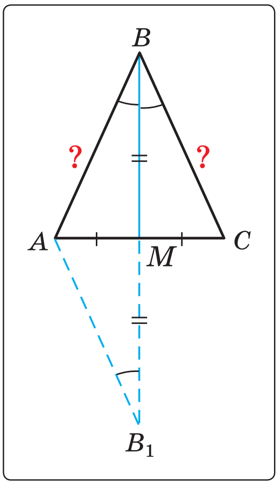
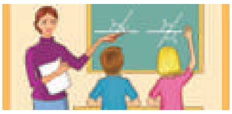


Рис. 138

Дано: BM — медиана и биссектриса $\triangle ABC$.
Доказать: $AB = BC$ (рис. 138).
Доказательство. Продлим медиану BM на ее длину за точку M. Получим $MB_1 = BM$. Треугольники AMB_1 и CMB равны по двум сторонам и углу между ними ($MB_1 = BM$ по построению; $AM = MC$, так как BM — медиана; $\angle AMB_1 = \angle CMB$ как вертикальные). Из равенства этих треугольников следует, что $AB_1 = BC$ и $\angle AB_1M = \angle CBM$. Но $\angle CBM = \angle ABM$, так как BM — биссектриса по условию. Тогда $\angle AB_1B = \angle ABB_1$ и $\triangle ABB_1$ — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Следовательно, $AB = AB_1$. А так как $AB_1 = BC$, то $AB = BC$. Теорема доказана.

Замечание. Прием продления (продолжения) медианы часто используется при решении геометрических задач.



Задания к § 12

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *В треугольнике ABC с периметром 54 см медиана AK перпендикулярна стороне BC, а высота BM составляет равные углы со сторонами BA и BC. Найти стороны треугольника ABC.*

Решение. Так как медиана AK является и высотой, то $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием BC и $AB = AC$. Так как высота BM является и биссектрисой, то $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC и $AB = BC$. Тогда $\triangle ABC$ — равносторонний, $AB = BC = AC = \frac{54}{3} = 18$ (см).
Ответ: 18 см.

Задача 2. *Биссектриса AK треугольника ABC делит сторону BC пополам. Периметр треугольника ABC равен* 36 *см, периметр треугольника AKC равен* 30 *см. Найти длину биссектрисы AK.*

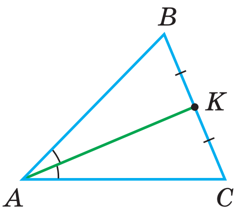


Рис. 139

Решение. Из условия следует, что биссектриса AK является и медианой $\triangle ABC$ (рис. 139). Тогда $\triangle ABC$ — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника и $AB = AC$. Так как $BK = CK$, то сумма отрезков AC и CK равна полупериметру $\triangle ABC$, то есть 18 см. По условию периметр $\triangle AKC$ равен 30 см, поэтому $AK = 30 - 18 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

100. Найдите сторону или угол, обозначенные знаком вопроса (рис. 140). Объясните свой ответ.

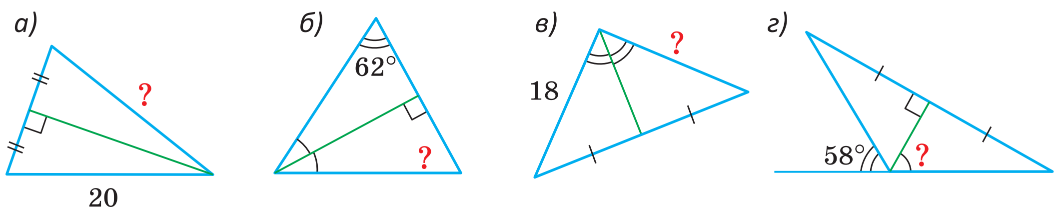


Рис. 140

101. В треугольнике ABC высота BK делит сторону AC пополам, биссектриса AM перпендикулярна стороне BC. Найдите периметр треугольника ABC, если $BM = 2{,}4$ см.

102. Перпендикулярные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $CO = OD$, $AC = 12$ см, $BD = 9$ см. Найдите периметр четырехугольника $ACBD$.

103. В треугольнике ABC проведена медиана AM (рис. 141). На стороне AC взята точка K. Прямые BK и AM перпендикулярны, и прямая BK делит медиану AM пополам. Докажите, что $BC = 2AB$.

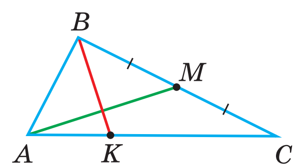


Рис. 141

104. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см.

105. Докажите, что прямая, пересекающая биссектрису угла и перпендикулярная этой биссектрисе, отсекает на сторонах угла равные отрезки.

106*. В треугольнике ABC с периметром 24 см проведена медиана CK, равная 8 см, $\angle KCB = \angle KCA$. Найдите периметр треугольника KAC.

107*. Биссектриса CK треугольника ABC проходит через середину медианы BM. Периметр треугольника ABC равен 36 см, $AM = 8$ см. Найдите длину стороны AB.

Геометрия 3D

У *правильной треугольной пирамиды* $DABC$ в основании лежит равносторонний треугольник ABC, а боковые грани ADB, ADC, BDC — равные равнобедренные треугольники с общей вершиной D (рис. 142).

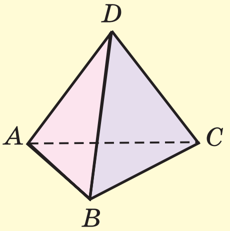


Рис. 142

У *правильной четырехугольной пирамиды* в основании лежит квадрат $MNKE$, а боковые грани MPE, MPN, NPK, EPK — равные равнобедренные треугольники с общей вершиной P (рис. 143).

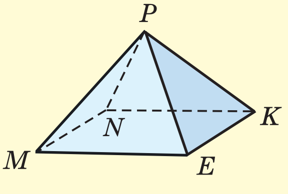


Рис. 143

Задача. *Имеется кусок проволоки длиной 2 м 30 см. Хватит ли его, чтобы изготовить каркас:*

а) правильной треугольной пирамиды с ребром основания 30 см и боковым ребром 40 см;

б) правильной четырехугольной пирамиды, у которой все ребра равны по 30 см?