§ 13. Третий признак равенства треугольников

Вам уже известны два признака равенства треугольников. Рассмотрим еще один.

Теорема (третий признак равенства треугольников). **Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

Дано: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 144).
Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

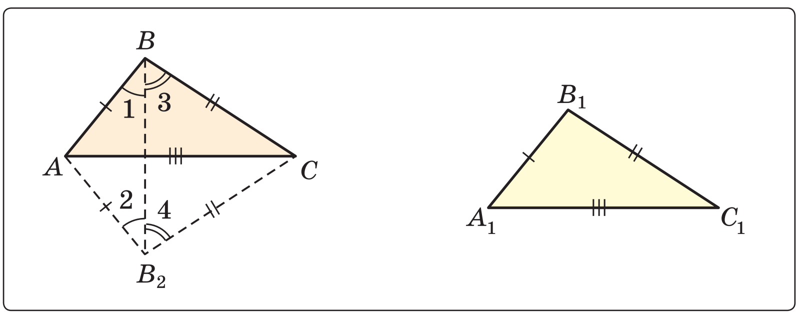


Рис. 144

Доказательство. Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы у них совместились равные стороны A_1C_1 и AC, а вершины B_1 и B оказались в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Треугольник $A_1B_1C_1$ займет положение треугольника AB_2C. Проведем отрезок BB_2. Так как $AB_2 = AB$ и $B_2C = BC$, то треугольники ABB_2 и CBB_2 — равнобедренные. Откуда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (как углы при основании равнобедренного треугольника). Тогда $\angle ABC = \angle AB_2C$, и треугольники ABC и AB_2C равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Замечание. Случаи, когда отрезок BB_2 пересекает прямую AC в точке A (или C) или вне отрезка AC, рассматриваются аналогично.

Говорят, что три стороны задают треугольник однозначно.

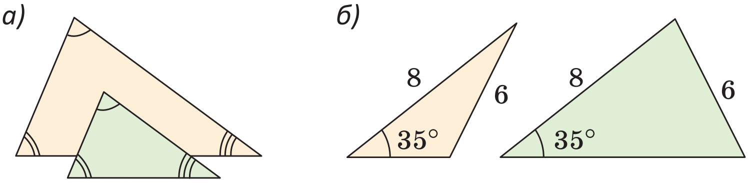


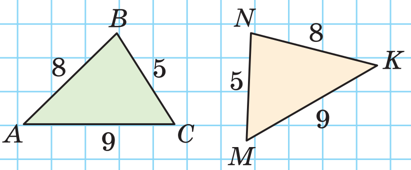
Рис. 145

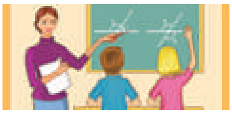
Итак, теперь вы знаете три признака равенства треугольников. Можно сформулировать и другие признаки равенства треугольников, в которых неизбежно будет присутствовать соответственное равенство каких-то трех элементов двух треугольников. Однако не любые три элемента задают треугольник. Так, например, если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники не обязательно равны. То же касается треугольников, у которых соответственно равны две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон. На рисунке 145, *а*, *б* вы видите пары таких неравных треугольников.

А теперь выполните **Задание**.

Задание

Какой угол $\triangle MNK$ равен углу C $\triangle ABC$? Объясните ответ.





Задания к § 13

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *У простой замкнутой ломаной $ABCD$ $AB = AD$, $BC = DC$. Доказать, что $\angle B = \angle D$ и луч AC — биссектриса угла BAD.*

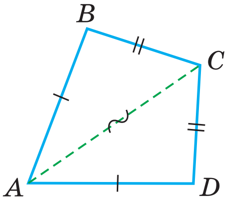


Рис. 146

Доказательство. Проведем отрезок AC (рис. 146). Треугольники ABC и ADC равны по 3-му признаку равенства треугольников ($AB = AD$ и $BC = DC$ по условию, сторона AC — общая). Поэтому $\angle B = \angle D$ и $\angle BAC = \angle DAC$ как соответствующие в двух равных треугольниках, следовательно луч AC — биссектриса угла BAD.

Задача 2. *Доказать равенство треугольников по двум сторонам и медиане между ними.*

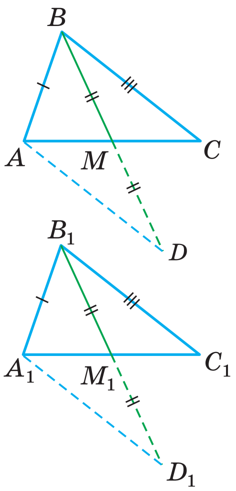


Рис. 147

Доказательство. Пусть $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $BM = B_1M_1$, где BM и B_1M_1 — медианы (рис. 147). Нужно доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Продлим в каждом треугольнике данную медиану на ее длину так, что $MD = BM$, $M_1D_1 = B_1M_1$. Так как $\triangle AMD = \triangle CMB$ по 1-му признаку равенства треугольников ($AM = MC$, $\angle AMD = \angle CMB$ как вертикальные, $BM = MD$ по построению), то $AD = BC$. Аналогично $\triangle A_1M_1D_1 = \triangle C_1M_1B_1$, откуда $A_1D_1 = B_1C_1$. По условию $BC = B_1C_1$, следовательно, $AD = A_1D_1$ и $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ по трем сторонам. Тогда $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$ и $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по 1-му признаку равенства треугольников. Отсюда $AM = A_1M_1$, $AC = A_1C_1$ (так как BM и B_1M_1 — медианы) и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

Задача 3. *Два равных отрезка AB и CD пересекаются в точке O и $AD = BC$. Доказать, что $BO = DO$.*

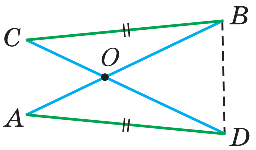


Рис. 148

Доказательство. Проведем отрезок BD (рис. 148). Треугольники ABD и CDB равны по трем сторонам (сторона BD — общая, $AB = CD$ и $AD = CB$ по условию). Из равенства треугольников следует, что $\angle ABD = \angle CDB$. Тогда $\triangle BOD$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), откуда $BO = DO$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

108. Докажите равенство треугольников (рис. 149).

109. Дан отрезок AB. По одну сторону от прямой AB взяты точки M и K такие, что $AM = BK$, $AK = BM$. Докажите равенство треугольников AMB и BKA.

110. Докажите, что если в окружности с центром O провести две равные хорды MK и NE, то углы MOK и NOE будут

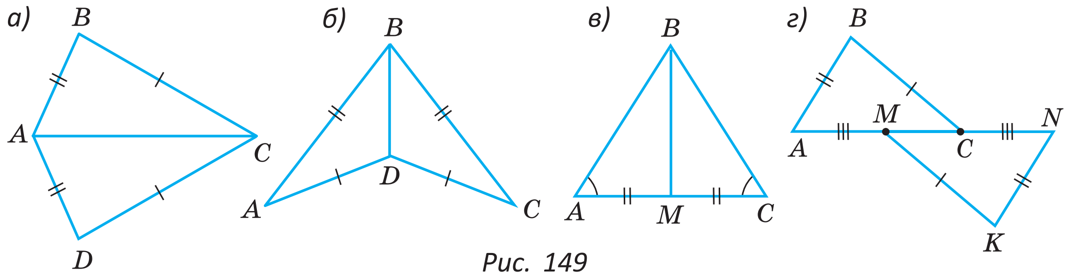


Рис. 149

равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

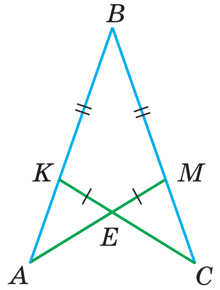


Рис. 150

111. У четырехугольника $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle BAD + \angle BCD = 168°$. Найдите $\angle BCD$.

112. На рисунке 150 $BK = BM$, $KE = ME$. Докажите, что $AB = BC$.

113. Дана окружность с центром в точке O, AB и BC — две равные хорды окружности. Точки E и F — середины данных хорд, $OE = 6$ дм, $EF = 5$ дм. Найдите периметр $\triangle EOF$.

114. Докажите, что если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и медиана AM равна медиане A_1M_1, то такие треугольники равны между собой.

115. Треугольники ABC и ABC_1 — равнобедренные с общим основанием AB, где точки C и C_1 лежат по разные стороны от прямой AB и $AC \neq AC_1$. Докажите, что $CC_1 \perp AB$.

116*. Бумажный квадрат $ABCD$ сложили по диагонали AC. Объясните, почему при этом совпадут вершины B и D.

117*. Треугольники AOC и DOB равны и $AO \neq OB$ (рис. 151). Точка M — середина отрезка BC. Докажите, что треугольник AMD — равнобедренный.

118*. Обязательно ли равны два четырехугольника, если стороны одного из них соответственно равны сторонам другого? Сформулируйте какой-нибудь признак равенства четырехугольников.

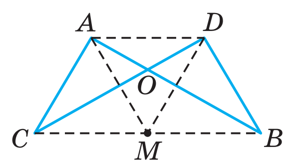


Рис. 151