§ 14. Серединный перпендикуляр к отрезку

Определение. **Серединным перпендикуляром** к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

Прямая CD — серединный перпендикуляр к отрезку AB, то есть $CD \perp AB$ и $AM = MB$ (рис. 152).

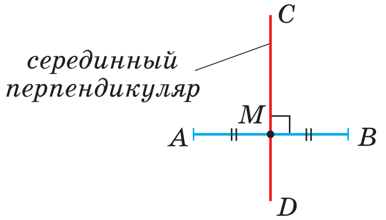


Рис. 152

Теорема (о серединном перпендикуляре к отрезку). **Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.**

В данной теореме два утверждения: прямое и ему обратное. Докажем каждое из этих утверждений отдельно.

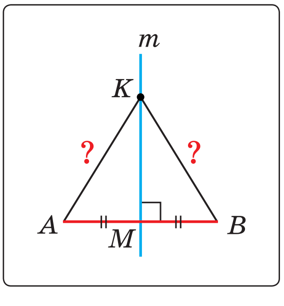


Рис. 153

1) Дано: m — серединный перпендикуляр к отрезку AB, $K \in m$ (рис. 153).

Доказать: $KA = KB$.

Доказательство. По определению серединного перпендикуляра $KM \perp AB$, $AM = MB$. Тогда в треугольнике AKB высота KM является медианой. По признаку равнобедренного треугольника $\triangle AKB$ — равнобедренный, поэтому $KA = KB$.

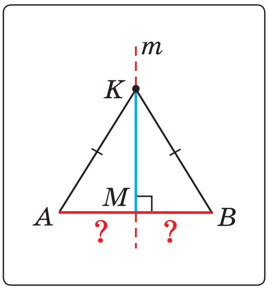


Рис. 154

2) Дано: $KA = KB$ (рис. 154).

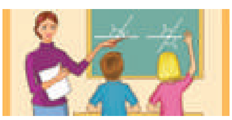
Доказать: $K \in m$, где m — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Доказательство. Проведем в равнобедренном треугольнике AKB высоту KM, которая по свойству равнобедренного треугольника будет и медианой. Получим $KM \perp AB$, $AM = MB$. Прямая m, содержащая высоту KM, — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Теорема доказана.

Геометрическим местом точек плоскости (или пространства) называется множество всех точек плоскости (или пространства), обладающих общим свойством.

Из доказанной теоремы следует, что серединный перпендикуляр к отрезку — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка.



Задания к § 14

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *В четырехугольнике* $ABCD$ $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 155). *Доказать, что* $AC \perp BD$.

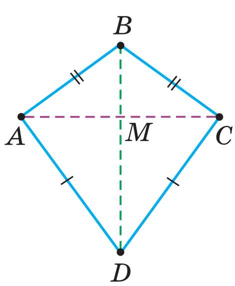


Рис. 155

Доказательство. *1-й способ.* Из равенства треугольников ABD и CBD по трем сторонам следует, что $\angle ABD = \angle CBD$. В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса BM является и высотой. Поэтому $AC \perp BD$.

2-й способ. Точки B и D равноудалены от концов отрезка AC, поэтому они лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Так как через две точки проходит единственная прямая, то BD — серединный перпендикуляр к отрезку AC. Отсюда $AC \perp BD$ и $AM = MC$.

Задача 2 (1-я замечательная точка треугольника). *Доказать, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.*

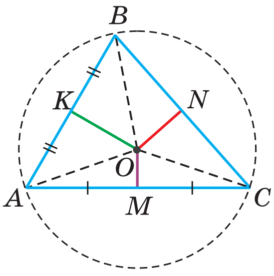


Рис. 156

Доказательство. Пусть два серединных перпендикуляра к сторонам AC и AB пересекаются в точке O (рис. 156). Точка O лежит на серединном перпендикуляре OM, поэтому $OA = OC$. Точка O лежит на серединном перпендикуляре OK, поэтому $OA = OB$. Отсюда $OB = OC$. Поскольку точка O равноудалена от концов отрезка BC, то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC.

Таким образом, третий серединный перпендикуляр пройдет через точку O, и все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекутся в одной точке.

Замечания. 1. Если ножку циркуля поставить в точку O и построить окружность радиусом OA, то она пройдет через все вершины треугольника в силу того, что $OA = OB = OC$. Такая окружность называется *описанной около треугольника*. В данной задаче мы доказали, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

2. Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника — это еще одна замечательная точка треугольника помимо уже известных вам точек пересечения биссектрис, медиан, высот.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

119. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, $AM + MB = 15$ м. Найдите длину отрезка MA.

120. Прямая a перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину K. Точка M принадлежит прямой a, $\angle AMB = 84°$. Найдите $\angle BMK$.

121. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр треугольника ABK, если $AB = 5$ см, $BC = 7$ см.

122. Точки M и K лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB по разные стороны от прямой AB, $MA = 16$ см, $KB = 12$ см. Найдите периметр четырехугольника $AMBK$.

123. Докажите, что серединный перпендикуляр к хорде окружности проходит через центр окружности.

124. Серединные перпендикуляры KL и MN к боковым сторонам BC и AB равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 157). Докажите, что:

а) $MN = KL$; б) $MO = KO$.

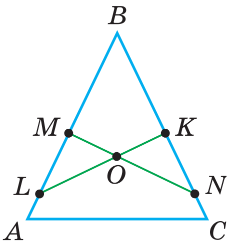
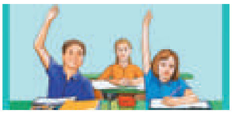


Рис. 157

125. Две окружности разного радиуса с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что линия центров O_1O_2 перпендикулярна общей хорде AB этих окружностей.

126*. Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников с данным основанием.

127*. По одну сторону от прямой a расположены точки A и B. На прямой a найдите точку M такую, чтобы расстояния от точки M до точек A и B были равны.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Признаки равнобедренного треугольника.
2. Теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.
3. Замечательные точки треугольника.

Умеем

1. Доказывать теорему «Если в треугольнике высота является медианой, то треугольник равнобедренный».
2. Доказывать теорему «Если в треугольнике высота является биссектрисой, то треугольник равнобедренный».

3*. Доказывать теорему «Если в треугольнике медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный».

4*. Доказывать теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

Геометрия 3D

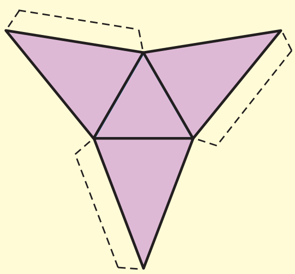
Из плотной бумаги сделайте развертку:

а) треугольной пирамиды, у которой в основании лежит равносторонний треугольник со стороной 10 см, а все боковые грани — равнобедренные треугольники с боковой стороной, равной 13 см (рис. 158, *а*);

б) четырехугольной пирамиды, у которой в основании лежит квадрат со стороной 9 см, а все боковые грани — равнобедренные треугольники с боковой стороной, равной 12 см (рис. 158, *б*).

Склейте пирамиды по данным разверткам, соединив вместе вершины равнобедренных треугольников.

а)



б)

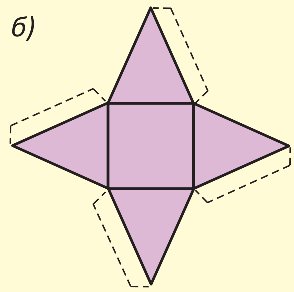


Рис. 158

Моделирование

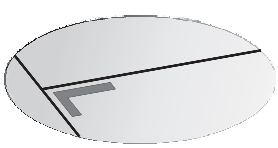


Рис. 159

Маша обучается в строительном колледже. На практических занятиях ей поручили просверлить отверстие в центре металлического круга. Чтобы найти центр круга, девушка начертила хорду, затем при помощи рулетки отметила ее середину. Используя угольник, она построила перпендикуляр к хорде с основанием в ее середине (рис. 159). Помогите девушке продолжить действия и найти центр круга.

Составьте математическую модель задания, которая объясняет действия Маши и доказывает правильность выбранного алгоритма.

ЗАПОМИНАЕМ

1. Три признака равенства треугольников:
   1) по двум сторонам и углу между ними;
   2) по стороне и двум прилежащим к ней углам;
   3) по трем сторонам.

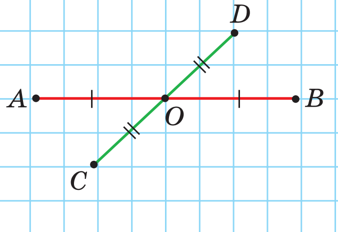
2. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

3. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является его высотой и медианой.
4. Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).
5. Если высота треугольника является его медианой или биссектрисой, или медиана является его биссектрисой, то треугольник равнобедренный (признаки равнобедренного треугольника).
6. Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.
7. Все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (1-я замечательная точка треугольника).

Проверяем себя

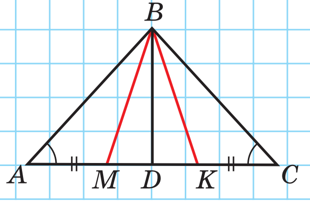
Задание 1

По рисунку докажите, что:
а) $AC = BD$, $AD = BC$,
б) $\angle CAD = \angle DBC$.



Задание 2

Известно, что $\angle A = \angle C$, $AM = CK$, $BD \perp AC$.
Докажите, что:
а) $\triangle ABM = \triangle CBK$;
б) $\triangle MBD = \triangle KBD$.



Задание 3

По рисунку докажите, что:
а) $AC \perp BD$;
б) $BO = OD$.