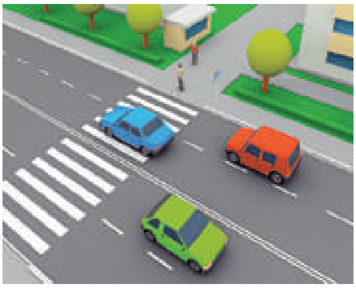
# § 15. Признаки параллельности прямых

## 15.1. Две прямые, перпендикулярные третьей



Параллельность прямых — одно из основных понятий геометрии. Параллельность часто встречается в жизни. Посмотрев вокруг, можно убедиться, что мы живем в мире параллельных линий. Это края парты, столбы вдоль дороги, полоски «зебры» на пешеходном переходе.

Определение. Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

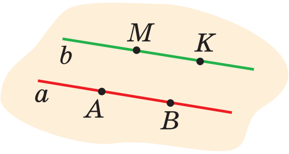



*Рис. 160*

*Лучи* и *отрезки* называются *параллельными*, если они лежат на параллельных прямых. Если прямые $a$ и $b$ параллельны, то есть $a \parallel b$ (рис. 160), то параллельны отрезки $AB$ и $MK$, отрезок $MK$ и прямая $a$, лучи $AB$ и $KM$.

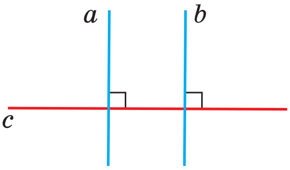



*Рис. 161*

Вы уже знаете теорему о параллельных прямых на плоскости: «*Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой*». Другими словами, если $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$ (рис. 161). Данная теорема позволяет решить две важные практические задачи.

**Первая задача** заключается в проведении нескольких параллельных прямых.

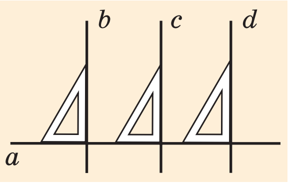



*Рис. 162*

Пусть дана прямая $a$ (рис. 162). При помощи чертежного треугольника строят прямую $b$, перпендикулярную прямой $a$. Затем сдвигают треугольник вдоль прямой $a$ и

Правообладатель Народная асвета

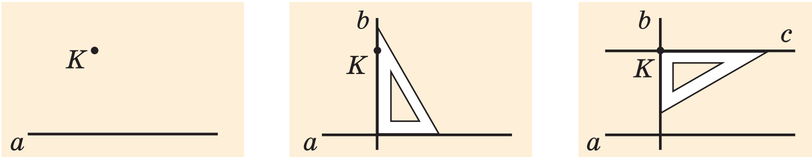



*Рис. 163*

строят другую перпендикулярную прямую $c$, затем — третью прямую $d$ и т. д. Поскольку прямые $b$, $c$, $d$ перпендикулярны одной прямой $a$, то из указанной теоремы следует, что $b \parallel c$, $c \parallel d$, $b \parallel d$.

**Вторая задача** — проведение прямой, параллельной данной и проходящей через точку, не лежащую на данной прямой.

По рисунку 163 объясните процесс проведения прямой $c$, параллельной прямой $a$ и проходящей через точку $K$.

Из построения следует: так как $a \perp b$ и $c \perp b$, то $a \parallel c$. Решение второй задачи доказывает теорему о существовании прямой, параллельной данной, которая гласит:

**Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной.**

## 15.2. Накрест лежащие, соответственные и односторонние углы

При пересечении двух прямых $a$ и $b$ третьей прямой $c$, которая называется *секущей*, образуется 8 углов (рис. 164).

Некоторые пары этих углов имеют специальные названия: $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — ***внутренние накрест лежащие углы***; $\angle 2$ и $\angle 8$, $\angle 1$ и $\angle 7$ — ***внешние накрест лежащие углы***; $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$ — ***соответственные углы***; $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$ — ***внутренние односторонние углы***; $\angle 2$ и $\angle 7$, $\angle 1$ и $\angle 8$ — ***внешние односторонние углы***.

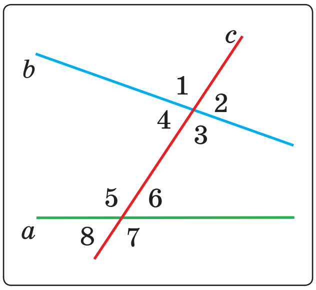



*Рис. 164*

Правообладатель Народная асвета

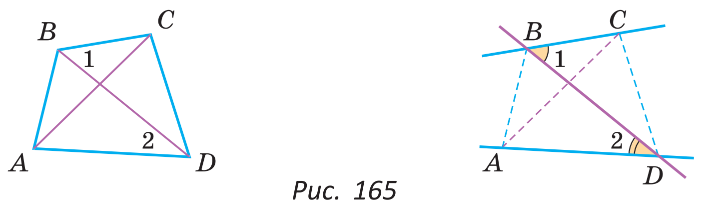


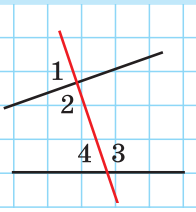

*Рис. 165*

На рисунке 165 отмечены углы 1 и 2. Они являются внутренними накрест лежащими углами при прямых $BC$ и $AD$ и секущей $BD$. В этом легко убедиться, продлив отрезки $BC$, $AD$ и $BD$. Ответьте: какими по взаимному расположению являются $\angle ABC$ и $\angle BAD$ относительно прямых $BC$ и $AD$ и секущей $AB$?

А теперь выполните **Задание 1**.

**Задание 1**

Среди углов 1, 2, 3 и 4 назовите накрест лежащие, соответственные и односторонние углы.




## 15.3. Признаки параллельности прямых

С указанными парами углов связаны следующие признаки параллельности прямых.

Теорема (первый признак параллельности прямых). **Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.**

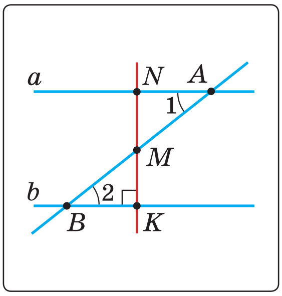



*Рис. 166*

Дано: $a$ и $b$ — данные прямые, $AB$ — секущая, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 166).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство. Из середины $M$ отрезка $AB$ опустим перпендикуляр $MK$ на прямую $b$. Отложим отрезок $AN = BK$ и проведем отрезок $NM$ (см. рис. 166). Треугольники $BKM$ и $ANM$ равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $\angle ANM =$

Правообладатель Народная асвета

$= \angle BKM = 90°$, $\angle AMN = \angle BMK$ и поэтому $\angle NMK$ — развернутый (см. с. 44, замечание к задаче 3*). Прямые $a$ и $b$ параллельны как две прямые, перпендикулярные третьей (прямой $NK$). Теорема доказана.

Теорема (второй признак параллельности прямых). **Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.**

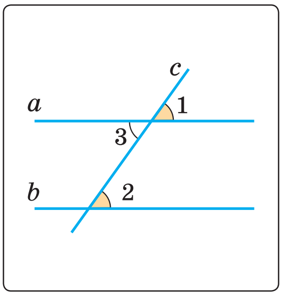



*Рис. 167*

Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 167).
Доказать: $a \parallel b$.
Доказательство. Углы 1 и 3 равны как вертикальные. А так как углы 1 и 2 равны по условию, то углы 2 и 3 равны между собой. Но углы 2 и 3 — внутренние накрест лежащие при прямых $a$ и $b$ и секущей $c$. А мы знаем, что если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Значит, $a \parallel b$. Теорема доказана.

Теорема (третий признак параллельности прямых). **Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.**

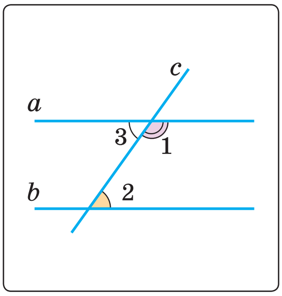



*Рис. 168*

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рис. 168).
Доказать: $a \parallel b$.
Доказательство. Углы 1 и 3 — смежные, поэтому их сумма равна 180°. А так как сумма углов 1 и 2 равна 180° по условию, то углы 2 и 3 равны между собой. Но углы 2 и 3 — внутренние накрест лежащие при прямых $a$ и $b$ и секущей $c$. А мы знаем, что если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Значит, $a \parallel b$. Теорема доказана.

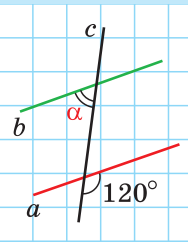
Правообладатель Народная асвета

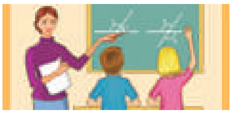
Сформулируйте и докажите аналогичные признаки для внешних накрест лежащих и внешних односторонних углов.

А теперь выполните **Задание 2.**

**Задание 2**

Сколько градусов должен составлять угол α, чтобы прямые *a* и *b* были параллельны?



## Задания к § 15

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *Доказать, что если отрезки AD и BC пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то прямые AB и CD параллельны.*

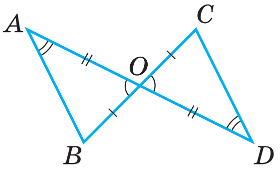



*Рис. 169*

Доказательство. Пусть $O$ — точка пересечения отрезков $AD$ и $BC$ (рис. 169). Треугольники $AOB$ и $DOC$ равны по двум сторонам и углу между ними ($\angle AOB = \angle DOC$ как вертикальные, $BO = OC$, $AO = OD$ по условию). Из равенства треугольников следует, что $\angle BAO = \angle CDO$. Так как эти углы — накрест лежащие при прямых $AB$ и $CD$ и секущей $AD$, то $AB \parallel CD$ по признаку параллельности прямых.

**Задача 2.** *На биссектрисе угла BAC взята точка K, а на стороне AC — точка D,* $\angle BAK = 26°$, $\angle ADK = 128°$. *Доказать, что отрезок KD параллелен лучу AB.*

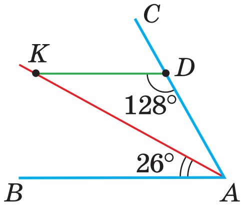



*Рис. 170*

Доказательство. Так как $AK$ — биссектриса угла $BAC$ (рис. 170), то $\angle BAC = 2 \cdot \angle BAK = 2 \cdot 26° = 52°$. Углы $ADK$ и $BAC$ — внутренние односторонние при прямых $KD$ и $BA$ и секущей $AC$. А поскольку $\angle ADK + \angle BAC = 128° + 52° = 180°$, то $KD \parallel AB$ по признаку параллельности прямых.

Правообладатель Народная асвета

**Задача 3.** *Биссектриса $BC$ угла $ABD$ отсекает на прямой $a$ отрезок $AC$, равный отрезку $AB$. Доказать, что прямые $a$ и $b$ параллельны* (рис. 171).

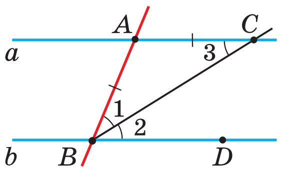



*Рис. 171*

Доказательство. Так как $BC$ — биссектриса угла $ABD$, то $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\triangle BAC$ равнобедренный ($AB = AC$ по условию), то $\angle 1 = \angle 3$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Тогда $\angle 2 = \angle 3$. Но углы 2 и 3 являются накрест лежащими при прямых $a$ и $b$ и секущей $BC$. А если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Следовательно, $a \parallel b$.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**128.** Среди углов 1, 2, 3, 4 и 5 (рис. 172) укажите накрест лежащие, соответственные и односторонние углы.

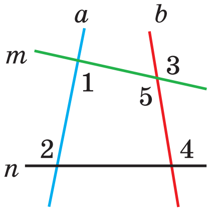



*Рис. 172*

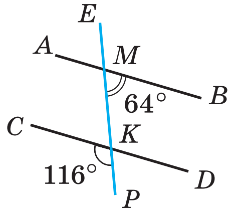



*Рис. 173*

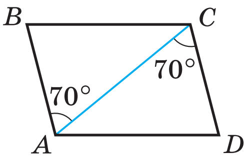



*Рис. 174*

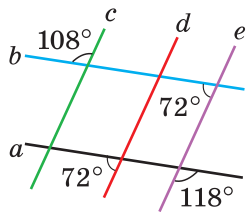



*Рис. 175*

**129.** Выясните, какие из изображенных прямых параллельны и почему (рис. 173—175).

**130.** В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

**131.** Докажите, что $a \parallel b$ (рис. 176—178), если:
а) $\angle 1 = 87°$, $\angle 2 = 93°$; б) $\angle 1 = 116°$, $\angle 2 = 64°$;
в) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

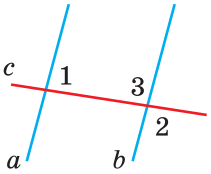



*Рис. 176*

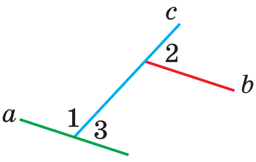



*Рис. 177*

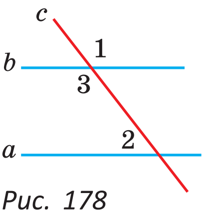



*Рис. 178*

Правообладатель Народная асвета

**132.** Биссектриса $CM$ треугольника $ABC$ делит сторону $AB$ пополам, $\angle BAC = 73°$, $\angle DKC = 107°$ (рис. 179). Докажите, что $ED \parallel AB$.

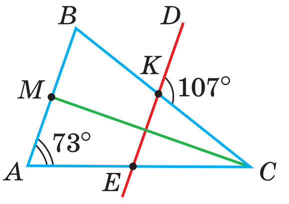



*Рис. 179*

**133.** В $\triangle ABC$ проведена биссектриса $AM$, к которой проведен серединный перпендикуляр, пересекающий прямую $AB$ в точке $E$. Докажите, что $EM \parallel AC$.

**134.** Из точек $A$ и $B$ прямой $a$ в одну полуплоскость проведены лучи $AK$ и $BM$ так, что угол $KAB$ составляет 20 % угла $MBA$, а угол $MBA$ составляет $\frac{5}{6}$ развернутого угла. Пересекаются ли прямые $AK$ и $BM$?

**135.** На рисунке 180 $AK$ — биссектриса угла $BAC$. Докажите, что $DK \parallel AC$, если:
а) $\angle BDK = 54°$, $\angle KAC = 27°$;
б) $\angle BDK = 2\angle KAC$.

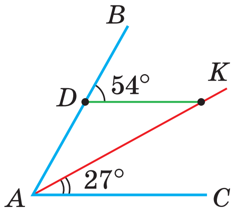



*Рис. 180*

**136*.** Докажите, что прямые $AB$ и $CD$, расположенные на координатной плоскости, параллельны, если $A(-6;\ 0)$, $B(0;\ -4)$, $C(6;\ 0)$, $D(0;\ 4)$.

**137*.** *Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны.* Докажите, что если у четырехугольника противоположные стороны равны (рис. 181), то этот четырехугольник — параллелограмм.

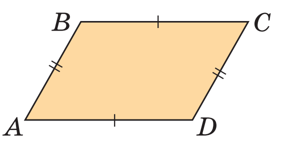
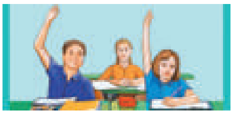



*Рис. 181*



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Определение параллельных прямых.
2. Теорему о двух прямых, перпендикулярных третьей.
3. Названия некоторых пар углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей.
4. Признаки параллельности прямых.

Правообладатель Народная асвета

**Умеем**

1. Проводить при помощи чертежного треугольника параллельные прямые.
2. Проводить при помощи чертежного треугольника прямую, параллельную данной прямой и проходящую через точку, не лежащую на данной прямой.
3. Определять на рисунке пары накрест лежащих, соответственных и односторонних углов.
4. Доказывать признаки параллельности прямых.

## Геометрия 3D

1. У куба отрезали угол (рис. 182). Сколько всего вершин, ребер и граней у полученного многогранника? Если $В$ — число вершин, $Г$ — число граней, $Р$ — число ребер, то чему будет равно число $В + Г - Р$? Знаменитая формула великого математика Леонарда Эйлера (XVII в.) утверждает, что для любого многогранника $В + Г - Р = 2$. Проверьте эту формулу для параллелепипеда, для треугольной и четырехугольной пирамид.

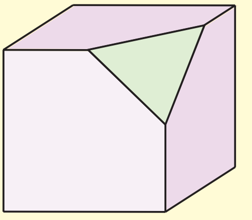


*Рис. 182*

2. Определите, сколько у изображенного многогранника пар параллельных ребер, где каждая пара параллельных ребер принадлежит какой-то одной грани.

3*. Нарисуйте развертку этого многогранника.

## Моделирование

Команда *«Десять градусов лево руля»* на корабле означает поворот судна на 10° влево от курса.

а) Какую команду должен дать командир корабля «Б» (рис. 183) рулевому, чтобы корабли «А» и «Б» шли параллельными курсами?

б) Если командир корабля «А» даст команду *«Пять градусов лево руля»*, то какую команду после этого должен дать командир корабля «Б», чтобы корабли шли параллельными курсами?

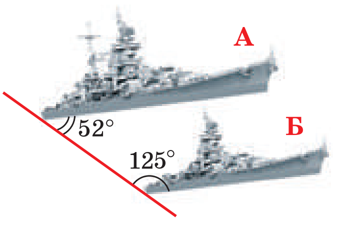



*Рис. 183*

Правообладатель Народная асвета

### *Реальная геометрия*

*Рис. 184*

На рисунке 184 изображен угломер — инструмент для нанесения параллельных линий на рейке или доске. Прибор состоит из двух частей, скрепленных винтом. Одна часть неподвижная, она прижимается к доске, а другая поворачивается на необходимый угол, градусная мера которого отражается на угломере. Зажав винт, закрепляют нужный угол. Сдвигая неподвижную часть угломера вдоль доски, наносят параллельные линии разметки, по которым затем распиливают доску.

Объясните, согласно какой теореме получаемые линии будут параллельны.

### *Гимнастика ума*

Определите визуально, то есть на глаз, на каком из рисунков изображены параллельные отрезки (рис. 185).

Приложив линейку, убедитесь, что все линии являются прямыми, хотя кажутся искривленными.

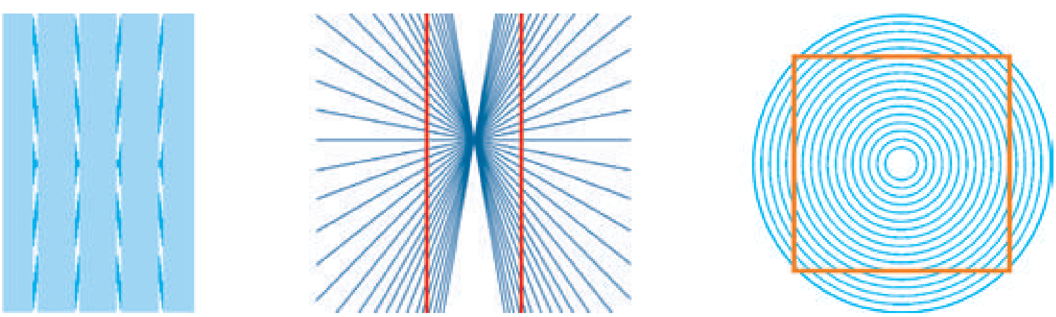


*Рис. 185*

## § 16. Аксиома параллельных прямых

Вы уже знаете, что на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, *можно* провести прямую, параллельную данной (см. § 15). Из пятого постулата Евклида (*постулат* — аксиоматическое предположение) следует, что такая прямая — единственная.

На протяжении двух тысячелетий вокруг утверждения о единственности параллельной прямой разыгрывалась захваты-

Правообладатель Народная асвета