Реальная геометрия

Рис. 184

На рисунке 184 изображен угломер — инструмент для нанесения параллельных линий на рейке или доске. Прибор состоит из двух частей, скрепленных винтом. Одна часть неподвижная, она прижимается к доске, а другая поворачивается на необходимый угол, градусная мера которого отражается на угломере. Зажав винт, закрепляют нужный угол. Сдвигая неподвижную часть угломера вдоль доски, наносят параллельные линии разметки, по которым затем распиливают доску.

Объясните, согласно какой теореме получаемые линии будут параллельны.

Гимнастика ума

Определите визуально, то есть на глаз, на каком из рисунков изображены параллельные отрезки (рис. 185).

Приложив линейку, убедитесь, что все линии являются прямыми, хотя кажутся искривленными.

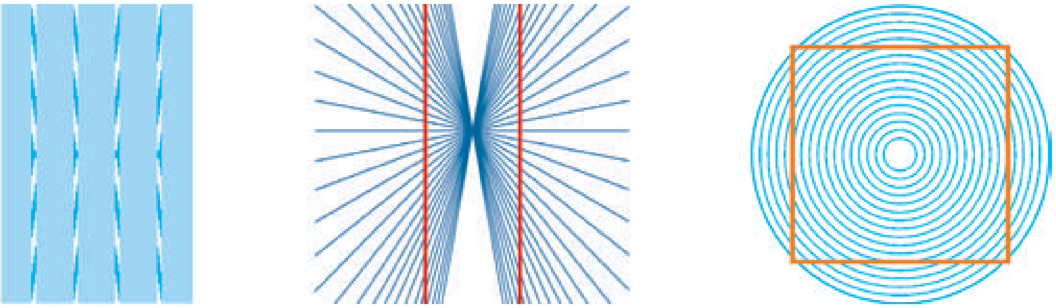


Рис. 185

§ 16. Аксиома параллельных прямых

Вы уже знаете, что на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, *можно* провести прямую, параллельную данной (см. § 15). Из пятого постулата Евклида (*постулат* — аксиоматическое предположение) следует, что такая прямая — единственная.

На протяжении двух тысячелетий вокруг утверждения о единственности параллельной прямой разыгрывалась захватывающая и драматичная история! Со времен Древней Греции математики спорили о том, можно доказать пятый постулат Евклида или нет. То есть это теорема или аксиома? В конце концов работы русского математика **Николая Ивановича Лобачевского** (1792—1856) позволили выяснить, что доказать пятый постулат нельзя. Поэтому это утверждение является *аксиомой*.

Н. И. Лобачевский

Аксиома параллельных прямых. **Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.**

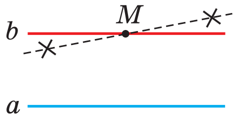


Рис. 186

Если прямая b проходит через точку M и параллельна прямой a (рис. 186), то любая другая прямая, проходящая через точку M, будет пересекаться с прямой a в некоторой точке, пусть и достаточно удаленной.

Поиски доказательства пятого постулата Евклида привели к развитию математики и физики, к пересмотру научных представлений о геометрии Вселенной. Решая проблему пятого постулата, Лобачевский создал новую геометрию, с новыми аксиомами, теоремами, отличающуюся от *геометрии Евклида*, которая теперь так и называется — *геометрия Лобачевского*.

Вы уже знаете, что на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой. А если две прямые параллельны третьей прямой, то что можно сказать про первые две прямые? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема (о двух прямых, параллельных третьей). **На плоскости две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.**

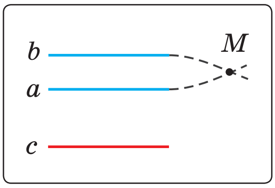


Рис. 187

Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$ (рис. 187).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство. Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке M. Поэтому через точку M будут проходить две прямые a и b, параллельные третьей прямой c. А это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше предположение неверно и $a \parallel b$. Теорема доказана.

Метод доказательства «от противного»

При доказательстве теоремы о двух прямых, параллельных третьей, мы применили метод доказательства *от противного* (то есть *от противоположного*). Суть его в следующем. Утверждение любой теоремы делится на *условие* — то, что в теореме дано, и *заключение* — то, что нужно доказать. В доказанной выше теореме условие: «*Каждая из двух прямых параллельна третьей прямой*», а заключение: «*Эти две прямые параллельны между собой*».

Используя метод от противного, в начале доказательства делают предположение, противоположное (противное) тому, что требуется доказать. После этого путем логических рассуждений приходят к какому-либо противоречию. Это позволяет сделать вывод, что высказанное предположение неверно, а верно то, что требовалось доказать.

В доказательстве нашей теоремы мы предположили, что две прямые не параллельны, а пересекаются в точке. И пришли к выводу, что тогда нарушается аксиома параллельных прямых. Следовательно, наше предположение о пересечении прямых не верно, а верно ему противоположное: прямые не пересекаются, то есть параллельны.

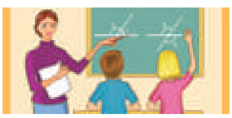
Методом от противного ранее была доказана теорема о двух прямых, перпендикулярных третьей.

Данный метод является очень мощным логическим инструментом доказательства. Причем не только в геометрии, но и в любом аргументированном споре.

Используя аксиому параллельных прямых и метод от противного, докажите самостоятельно следующую теорему.

Теорема. **Если на плоскости прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.**

При помощи **Интернета** выясните, могли ли встречаться великий писатель *Лев Толстой* и великий математик *Николай Лобачевский*. Если да, то где была наибольшая вероятность их встречи?



Задания к § 16

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *На рисунке* 188 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. *Доказать, что* $a \parallel c$.

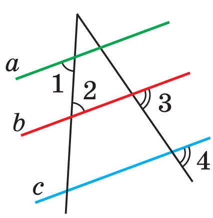


Рис. 188

Доказательство. Так как накрест лежащие углы 1 и 2 равны, то $a \parallel b$ по признаку параллельности прямых. Так как соответственные углы 3 и 4 равны, то по признаку параллельности прямых $c \parallel b$. Так как $a \parallel b$ и $c \parallel b$, то $a \parallel c$ по теореме о двух прямых, параллельных третьей.

Задача 2. *Доказать, что если сумма внутренних односторонних углов при двух данных прямых и секущей меньше* 180°, *то эти прямые пересекаются.*

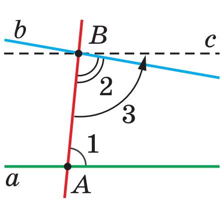


Рис. 189

Доказательство. Пусть a и b — данные прямые, AB — их секущая, сумма углов 1 и 2 меньше 180° (рис. 189). Отложим от луча BA угол 3, который в сумме с углом 1 дает 180°. Получим прямую c, которая параллельна прямой a

по признаку параллельности прямых. Если предположить, что прямые a и b не пересекаются, а, значит, параллельны, то через точку B будут проходить две прямые b и c, которые параллельны прямой a. Это противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, прямые a и b пересекаются.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

138. На рисунке 190 $\angle 1 = 52°$, $\angle 2 = 52°$, $\angle 3 = 122°$, $\angle 4 = 58°$. Докажите, что $a \parallel c$.

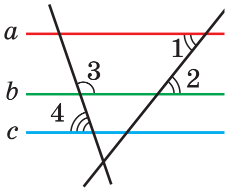


Рис. 190

139. Среди прямых a, b, c и d, лежащих в одной плоскости, определите пары параллельных прямых, если известно, что $a \perp b$, $c \perp b$, $a \perp d$.

140. Выясните, пересекутся ли при продолжении отрезки MK и BC (рис. 191).

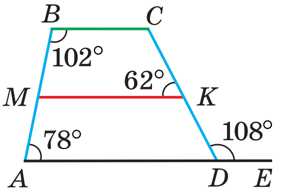


Рис. 191

141. На рисунке 192 $ABCD$ — прямоугольник, $MNPK$ — квадрат. Докажите, что $NP \parallel AD$, $AB \parallel PK$.

142. Определите все пары параллельных прямых (рис. 193).

143. На рисунке 194 $\angle BAC = 28°$, $\angle ACD = 28°$, $\angle DFC = 35°$, $\angle EFC = 15°$, $\angle FDC = 130°$. Докажите, что $AB \parallel FE$.

144*. Если две параллельные прямые пересечь двумя другими перпендикулярными им параллельными прямыми, получится прямоугольник. Сколько всего прямоугольников можно насчитать в прямоугольной таблице, у которой 2 строки и 3 столбца?

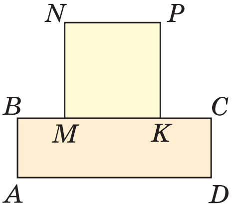


Рис. 192

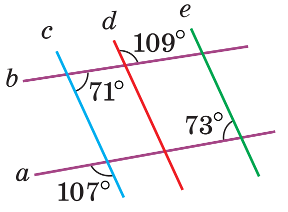


Рис. 193

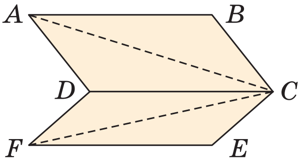


Рис. 194