§ 19. Сумма углов треугольника

Блез Паскаль

Великий французский ученый XVII в. Блез Паскаль (1623—1662) еще в детстве любил изучать геометрические фигуры, открывать их свойства. Измеряя углы транспортиром, юный исследователь заметил, что у любого треугольника сумма углов одна и та же — 180°. «Как же это объяснить?» — думал Паскаль. Тогда он отрезал у треугольника два уголка и приложил их к третьему (рис. 219). Получился развернутый угол, который, как известно, равен 180°. Это было его первое собственное открытие! Дальнейшая судьба мальчика была предопределена.

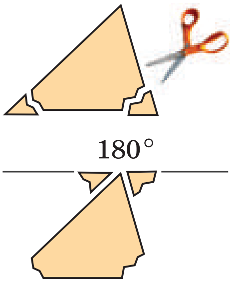


Рис. 219

Теорема. **Сумма углов треугольника равна 180°.**

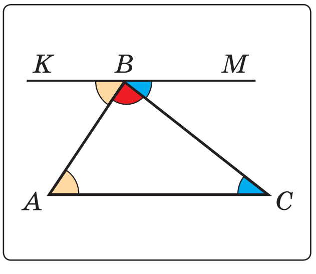


Рис. 220

Д а н о: $\triangle ABC$ (рис. 220).

Д о к а з а т ь: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через вершину B треугольника ABC проведем прямую KM, параллельную стороне AC. Тогда $\angle KBA = \angle A$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых KM и AC и секущей AB, а $\angle MBC = \angle C$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых KM и AC и секущей BC. Так как углы KBA, ABC и MBC образуют развернутый угол, то $\angle KBA + \angle ABC + \angle MBC = 180°$. Отсюда $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Теорема доказана.

Следствия.

1. *Каждый угол равностороннего треугольника равен* 60° (рис. 221).

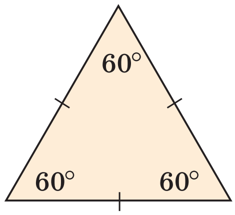


Рис. 221

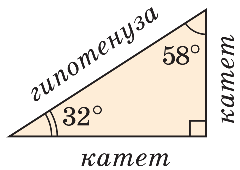


Рис. 222

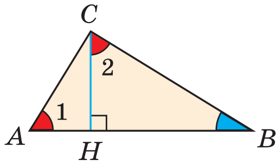


Рис. 223

2. *Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна* 90° (рис. 222).

В прямоугольном треугольнике стороны, заключающие прямой угол, называются *катетами*, сторона, противолежащая прямому углу, — *гипотенузой* (см. рис. 222).

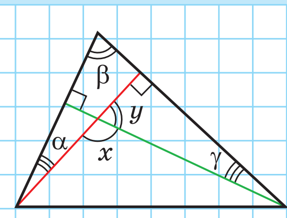
Проведем в прямоугольном треугольнике ABC высоту CH к гипотенузе AB (рис. 223). Так как в треугольнике ABC угол 1 дополняет угол B до 90°, а в треугольнике CHB угол 2 также дополняет угол B до 90°, то $\angle 1 = \angle 2$.

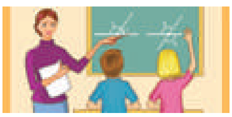
Доказано свойство: «*Угол между высотой прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, и катетом равен углу между другим катетом и гипотенузой*».

А теперь выполните **Задание**.

Задание

В треугольнике провели две высоты, угол α равен 20°. Найдите углы β, γ, y, x.





Задания к § 19

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *В треугольнике ABC градусные меры углов A, B и C относятся соответственно как* 5 : 7 : 3. *Найти углы треугольника* (рис. 224).

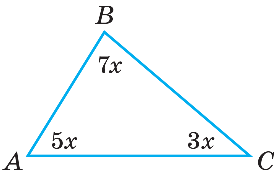


Рис. 224

Решение. Пусть $\angle A = 5x$, $\angle B = 7x$, $\angle C = 3x$ (x — градусная мера одной части). Так как сумма углов треугольника равна $180°$, то $5x + 7x + 3x = 180°$, $15x = 180°$, $x = \frac{180°}{15} = 12°$. Тогда $\angle A = 5 \cdot 12° = 60°$, $\angle B = 7 \cdot 12° = 84°$, $\angle C = 3 \cdot 12° = 36°$.

Ответ: $\angle A = 60°$, $\angle B = 84°$, $\angle C = 36°$.

Задача 2. *В треугольнике ABC* (рис. 225) *угол B равен* $70°$, *AK и CM — биссектрисы, O — точка их пересечения. Найти угол AOC между биссектрисами.*

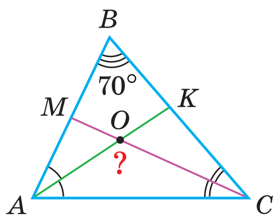


Рис. 225

Решение. Сумма углов A и C треугольника ABC равна $180° - 70° = 110°$. Так как биссектриса делит угол пополам, то $\angle OAC + \angle OCA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = \frac{1}{2} \cdot 110° = 55°$.

Из треугольника AOC находим:

$\angle AOC = 180° - 55° = 125°$.

Ответ: $125°$.

Замечание. Если $\angle B = \beta$, то, рассуждая аналогично, получим формулу: $\angle AOC = 90° + \frac{\beta}{2}$. Если, например, $\angle B = 60°$, то $\angle AOC = 90° + \frac{60°}{2} = 120°$.

Задача 3. *Доказать, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то данный треугольник — прямоугольный.*

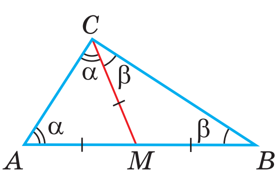


Рис. 226

Доказательство. Пусть CM — медиана треугольника ABC и $CM = \frac{1}{2}AB$ (рис. 226). Докажем, что $\angle ACB = 90°$. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Так как медиана делит сторону пополам, то $AM = MB = \frac{1}{2}AB$. Тогда $CM = AM = MB$. Так как $\triangle AMC$ — равнобедренный, то $\angle A = \angle ACM = \alpha$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Аналогично, $\triangle CMB$ — равнобедренный и $\angle B = \angle BCM = \beta$. Сумма углов треугольника ABC, с одной стороны, равна $2\alpha + 2\beta$, с другой — равна $180°$. Отсюда $2\alpha + 2\beta = 180°$, $2(\alpha + \beta) = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$. Но $\angle ACB = \alpha + \beta$, поэтому $\angle ACB = 90°$.

Замечание. Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным*. На рисунке 227 это угол ACB. Из задачи 3 следует свойство: «*Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой*». Докажите это свойство самостоятельно.

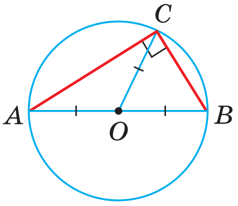


Рис. 227

Задача 4. *Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.*

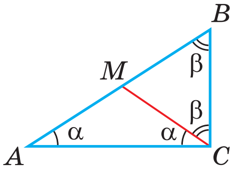


Рис. 228

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC (рис. 228) $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Проведем отрезок CM так, чтобы $\angle ACM$ был равен α, и докажем, что CM — медиана и что $CM = \frac{1}{2}AB$.

Угол B дополняет угол A до $90°$, а $\angle BCM$ дополняет $\angle ACM$ до $90°$. Поскольку $\angle ACM = \angle A = \alpha$, то $\angle BCM = \beta$. Треугольники AMC и BMC — равнобедренные по признаку равнобедренного треугольника. Тогда $AM = MC$ и $MB = MC$. Отсюда CM — медиана и $CM = \frac{1}{2}AB$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

172. Найдите угол, обозначенный знаком вопроса (рис. 229).

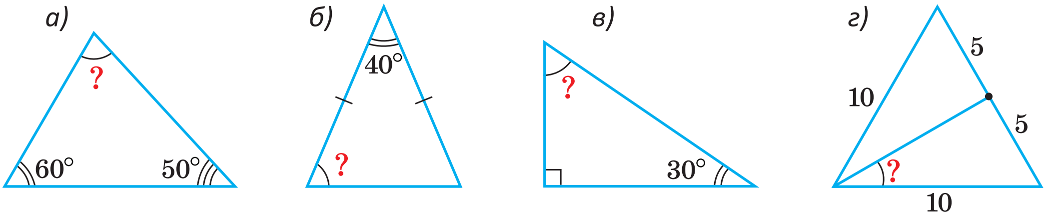


Рис. 229

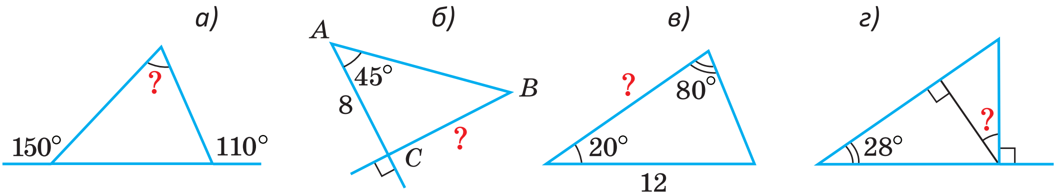


Рис. 230

173. Найдите угол или сторону, которые обозначены знаком вопроса (рис. 230).

174. Углы треугольника относятся как 1 : 3 : 5. Найдите наибольший угол треугольника.

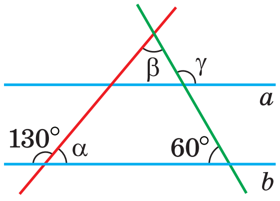


Рис. 231

175. На рисунке 231 $a \parallel b$. Найдите углы α, β и γ. В ответе укажите значение $2\alpha - \beta + \gamma$.

176. Один из углов треугольника на 70° меньше другого и на 40° больше третьего угла. Найдите наименьший угол треугольника.

177. Докажите, что биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей взаимно перпендикулярны.

178. Высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол C в отношении 4 : 5. Найдите острые углы треугольника ABC.

179. У равнобедренного треугольника одна из сторон равна 8 см и один из углов равен 60°. Найдите периметр треугольника.

180. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 232). Найдите углы всех треугольников, которые являются гранями пирамиды $D_1A_1C_1D$.

181. Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = BC$. На луче AB отложен отрезок BD за точку B такой, что $BD = AB$. Докажите, что треугольник ACD — прямоугольный.

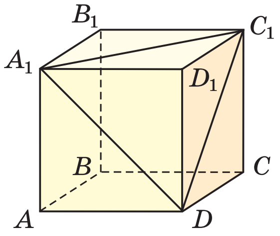


Рис. 232

182. Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = BC$, AK — биссектриса, $AK = BK$. Найдите углы треугольника ABC.

183. В четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$. Найдите угол BAD (рис. 233).

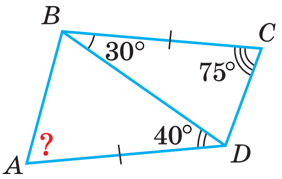


Рис. 233

184. Три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Угол OAC равен 32°. Найдите угол BOC.

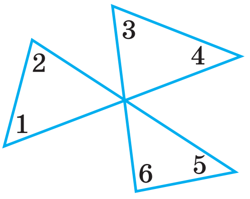


Рис. 234

185. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CM пересекаются в точке H. Докажите, что: а) $\angle BAK = \angle BCM$; б) $\angle B = \angle CHK$; в) $\angle AHC + \angle B = 180°$.

186*. В треугольнике ABC медиана BK равна отрезку AK, $\angle CBK = 24°$. Найдите $\angle A$.

187*. Угол между хордой AB и диаметром AC равен 64°. Найдите угол между хордой BC и этим диаметром.

188*. Найдите, чему равна сумма $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ (рис. 234).

189*. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка K так, что треугольник AKD равносторонний. Найдите углы треугольника BKC.

190*. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота, биссектриса и медиана. Докажите, что биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой.

191*. Докажите, что: а) сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 360° (рис. 235, *а*); б) $AB \perp BC$ (рис. 235, *б*); в) $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ (рис. 235, *в*); г) $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$ (рис. 235, *г*).

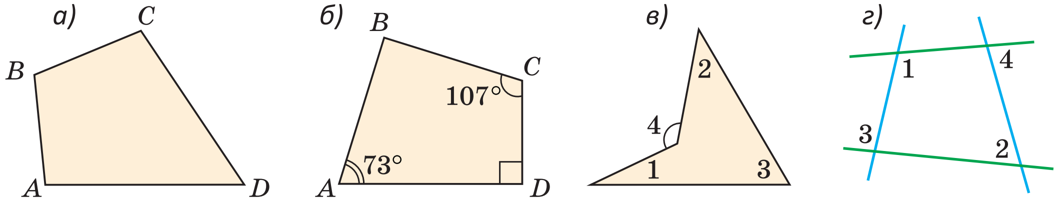


Рис. 235

Реальная геометрия

Яхта вышла в море курсом, который составил с линией берега угол 45° (рис. 236). Пройдя 4 км, она повернула на 80° влево и прошла еще 4 км. После этого яхта проследовала в пункт своего выхода. Определите угол, который составил курс яхты, идущей к берегу, с линией берега.

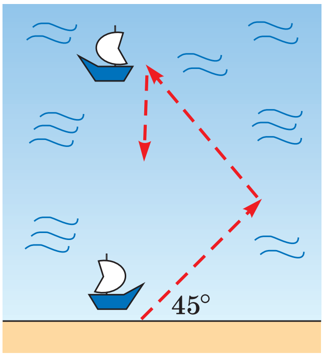


Рис. 236

При помощи **Интернета** найдите занятные факты из жизни и научной деятельности ученого Блеза Паскаля.

§ 20. Внешний угол треугольника

Углы треугольника называются еще его внутренними углами. Помимо внутренних углов, у треугольника есть и внешние углы.

Определение. **Внешним углом** треугольника называется угол, смежный с его внутренним углом.

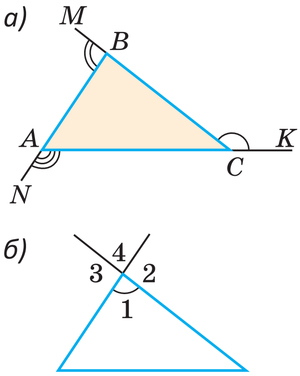


Рис. 237

На рисунке 237, *а* углы BCK, ABM, CAN — внешние, так как каждый из них является смежным с одним из внутренних углов треугольника ABC.

При каждой вершине треугольника один угол внутренний и два внешних. На рисунке 237, *б* угол 1 — внутренний, углы 2 и 3 — равные внешние углы. Угол 4 не является внешним, так как он не является смежным с внутренним углом 1.

Теорема. **Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.**