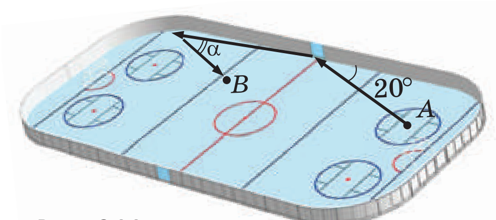


Рис. 244

нападающего (рис. 244). Определите угол α, используя закон физики: угол падения равен углу отражения. Из этого закона следует, что угол между траекторией посланной шайбы и бортом равен углу между траекторией отраженной шайбы и этим бортом.

Интересно знать. В Республике Беларусь большое внимание уделяется популяризации хоккея. При участии Президентского спортивного клуба проходит республиканский турнир любительских подростковых команд «Золотая шайба», Рождественский международный турнир на приз Президента Республики Беларусь.

Геометрия 3D

Задача 1. *$DABC$ — правильная треугольная пирамида, точка K — середина ребра DC, $\angle AKB = 50°$. Найдите $\angle KAB$* (рис. 245).

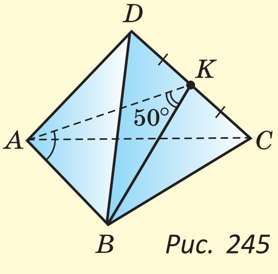


Рис. 245

Решение. Так как пирамида правильная, то треугольники ADC и BDC — равные равнобедренные, $AD = BD$, $BD = CD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Тогда $\triangle ADK = \triangle BDK$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $AK = BK$, $\triangle AKB$ — равнобедренный, $\angle KAB = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$.

Ответ: 65°.

Задача 2. *Сделайте чертеж правильной пирамиды $DABC$. Отметьте середину M ребра AD и найдите углы треугольника BMC, если известно, что $AB = BM$.*

§ 21. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Можно заметить, что в треугольнике длины сторон связаны с величинами противолежащих углов следующим образом: большей стороне соответствует больший противолежащий угол, а меньшей стороне — меньший. Так, в треугольнике ABC сторона AC — бóльшая, сторона AB — средняя, сторона BC — меньшая, $\angle B$ — больший, $\angle C$ — средний, $\angle A$ — меньший (рис. 246). Эта гипотеза находит подтверждение в следующей теореме.

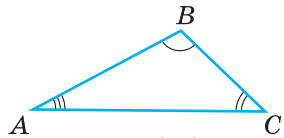


Рис. 246

Теорема (о соотношениях между сторонами и углами в треугольнике).
В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона.

Теорема состоит из двух утверждений. Докажем каждое из них.

1) *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.*

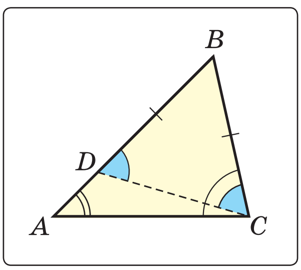


Рис. 247

Дано: $\triangle ABC$, $AB > BC$ (рис. 247).
Доказать: $\angle C > \angle A$.
Доказательство. На большей стороне BA от вершины B отложим отрезок BD, равный меньшей стороне BC, и проведем отрезок CD. Получим равнобедренный $\triangle DBC$, у которого углы при основании равны, то есть $\angle BDC = \angle BCD$. Но $\angle BDC$ — внешний для треугольника ADC, и поэтому $\angle BDC$ больше $\angle A$. Значит, и $\angle BCD$ больше $\angle A$. А так как $\angle C$ больше $\angle BCD$, то $\angle C$ подавно больше $\angle A$. Утверждение доказано.

2) *В треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона.*

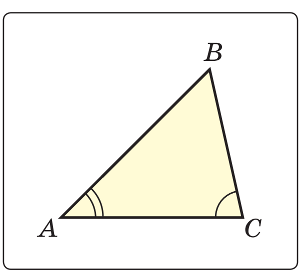


Рис. 248

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C > \angle A$ (рис. 248).
Доказать: $AB > BC$.
Доказательство. Применим метод доказательства от противного. Пусть $\angle C > \angle A$, а $AB \leqslant BC$. Если $AB < BC$, то по первой части теоремы $\angle C < \angle A$. Получили противоречие с условием. Если $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный, и тогда $\angle A = \angle C$. Снова получили противоречие. Следовательно, $AB > BC$. Утверждение доказано.

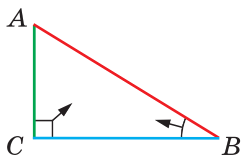


Рис. 249

Следствие 1.

Катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.

Следствие 1 справедливо, так как катет лежит против острого угла, а гипотенуза — против прямого, который больше острого (рис. 249).

А теперь выполните **Задание 1**.

Определение. Если AC — **перпендикуляр** к прямой a, точка B принадлежит прямой a и не совпадает с точкой C, то отрезок AB называется **наклонной**, проведенной из точки A к прямой a (рис. 250). Точка B называется **основанием наклонной**. Отрезок BC, соединяющий основание наклонной и основание перпендикуляра, называется **проекцией** наклонной AB на прямую a.

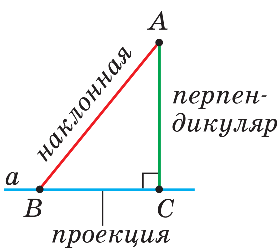


Рис. 250

Следствие 2.

Если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр и проекция наклонной меньше этой наклонной.

Следствие 2 справедливо, поскольку в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы.

Определение. **Расстоянием от точки до прямой** называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Если точка лежит на прямой, то это расстояние равно нулю.

Из следствия 2 вытекает, что длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, — это наименьшее из расстояний от данной точки до точек прямой.

На рисунке 251, *а* расстояние от точки M до прямой m равно длине перпендикуляра MK.

Расстояние от вершины A треугольника ABC до прямой BC, содержащей противоположную сторону, равно высоте AK треугольника (рис. 251, *б*).

В математике за расстояние между фигурами принимается наименьшее из расстояний между точками этих фигур.

А теперь выполните **Задание 2**.

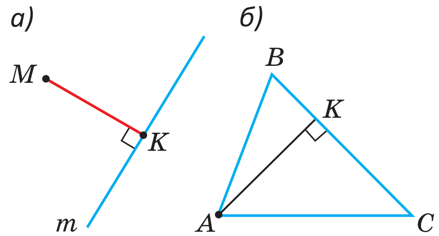
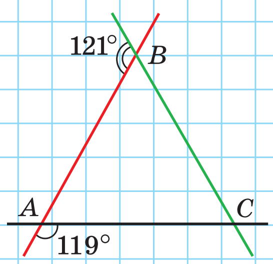


Рис. 251

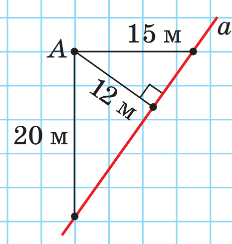
Задание 1

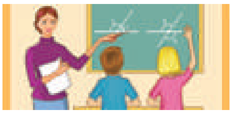
В $\triangle ABC$ укажите бо́льшую сторону.



Задание 2

Найдите расстояние от точки A до прямой a.





Задания к § 21

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *Отрезок AM — перпендикуляр к прямой a. Точки B и C лежат на прямой a по одну сторону от точки M* (рис. 252). *Доказать, что если $CM < BM$, то $AC < AB$.*

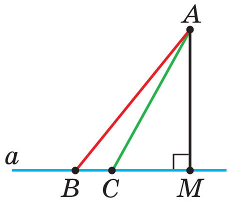


Рис. 252

Доказательство. Так как $\triangle AMC$ — прямоугольный, то $\angle ACM$ — острый. Тогда смежный к нему $\angle ACB$ — тупой. В треугольнике ABC угол ACB — больший, поэтому $\angle ACB > \angle ABC$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $AC < AB$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Решив данную задачу при условии, что точки B и C лежат на прямой a по разные стороны от точки M, вы докажете свойство: «*Если наклонные проведены из одной точки к одной прямой, то большей проекции соответствует большая наклонная, а меньшей — меньшая*».

Задача 2. *Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 12 см. Найти расстояние от вершины прямого угла до прямой, содержащей гипотенузу.*

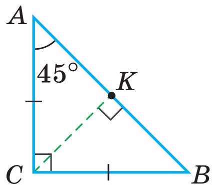


Рис. 253

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC = BC$, $\angle C = 90°$, $AB = 12$ см (рис. 253). По свойству равнобедренного треугольника $\angle A = \angle B = 45°$. Проведем высоту CK. Длина отрезка CK — искомое расстояние. В равнобедренном треугольнике ACB высота CK, опущенная на основание AB, будет медианой и биссектрисой. Поэтому $AK = KB = \frac{1}{2}AB = 6$ см, $\angle ACK = \frac{1}{2}\angle ACB = 45°$. В прямоугольном $\triangle ACK$ $\angle ACK = \angle CAK = 45°$. Поэтому $\triangle ACK$ — равнобедренный и $CK = AK = 6$ см.
Ответ: 6 см.

Замечание. В дальнейшем будем пользоваться тем, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

203. Запишите стороны и углы треугольника ABC в порядке возрастания (рис. 254).

204. В треугольнике ABC, где $AB < BC < AC$, один из углов в 2 раза меньше другого и в 3 раза меньше третьего. Найдите угол A.

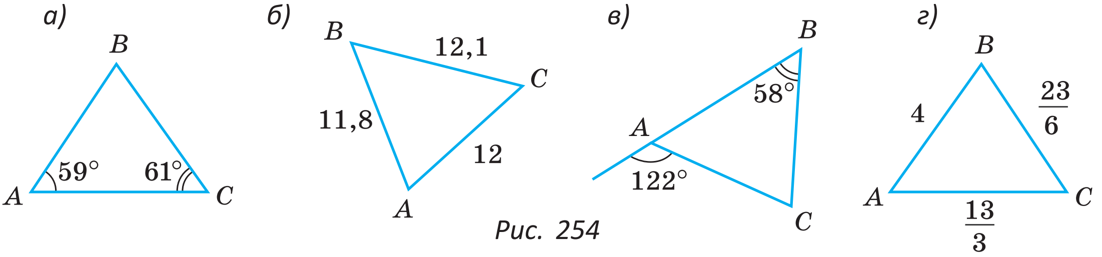


Рис. 254

205. Докажите, что для наклонных, проведенных из одной точки к одной прямой, справедливо утверждение:
а) равным наклонным, проведенным из одной точки к одной прямой, соответствуют равные проекции;
б) большей наклонной соответствует большая проекция.

206. Треугольник ABC — равносторонний, M — внутренняя точка отрезка BC. Докажите, что $AM < AB$.

207. В треугольнике MNK медиана ME равна 12 см, $\angle NME = \angle KME$. Найдите расстояние от точки M до прямой KN.

208*. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

209*. В треугольнике ABC ($AB < BC$) BH — высота, BM — медиана. Докажите, что:
а) $\angle ABH < \angle CBH$; б) $\angle ABM > \angle CBM$.

210*. Докажите, что если из одной вершины неравнобедренного треугольника провести высоту, медиану и биссектрису, то биссектриса будет лежать между высотой и медианой.

§ 22. Неравенство треугольника

Опыт нам подсказывает, что путь из точки A в точку C по прямой AC короче, чем по ломаной ABC (рис. 255), то есть $AC < AB + BC$. Докажем это.

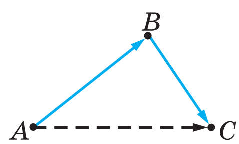


Рис. 255

Теорема (о неравенстве треугольника).
Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

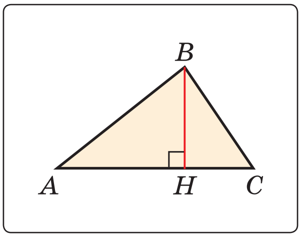


Рис. 256

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 256).
Доказать: $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$.
Доказательство. Пусть AC — наибольшая сторона треугольника ABC. Проведем высоту BH. Из прямоугольного треугольника AHB следует $AH < AB$ (катет меньше