§ 24. Свойство точек биссектрисы угла

По определению биссектриса угла делит угол пополам. У биссектрисы есть еще одно важное свойство.

Теорема (о свойстве точек биссектрисы угла). **Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла. Если точка внутри угла равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.**

В данной теореме два утверждения: прямое и ему обратное. Докажем каждое из этих утверждений отдельно.

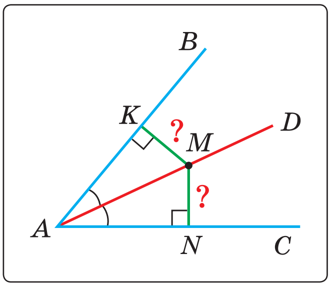


Рис. 271

1) Дано: AD — биссектриса $\angle BAC$, $M \in AD$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$ (рис. 271).
Доказать: $MK = MN$.
Доказательство. Прямоугольные треугольники AKM и ANM равны по гипотенузе и острому углу (гипотенуза AM — общая, $\angle KAM = \angle NAM$, так как AD — биссектриса). Катеты MK и MN равны как соответствующие в двух равных треугольниках.

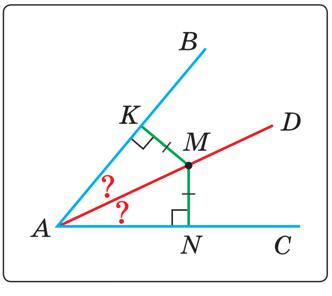
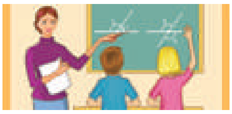


Рис. 272

2) Дано: $\angle BAC$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$, $MK = MN$, $M \in AD$ (рис. 272).
Доказать: луч AD — биссектриса $\angle BAC$.
Доказательство. Прямоугольные треугольники AKM и ANM равны по катету и гипотенузе (гипотенуза AM — общая, $MK = MN$ по условию). Углы KAM и NAM равны как соответствующие в двух равных треугольниках, откуда луч AD — биссектриса $\angle BAC$.
Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *биссектриса является геометрическим местом точек плоскости, находящихся внутри угла и равноудаленных от сторон угла*.



Задания к § 24

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике* ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$ (рис. 273). *На катете* AC *взята точка* K *так, что* $KC = 6$ *см и* $\angle KBC = 25°$. *Найти расстояние от точки* K *до прямой* AB.

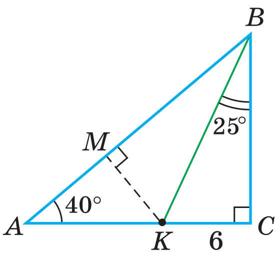


Рис. 273

Р е ш е н и е. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра KM к прямой AB. Так как $\angle ABC = 90° - \angle A = 90° - 40° = 50°$, то $\angle ABK = 50° - 25° = 25°$. Следовательно, BK — биссектриса угла ABC. Поскольку любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла, то $KM = KC = 6$ см.

О т в е т: 6 см.

Задача 2 (2-я замечательная точка треугольника). *Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

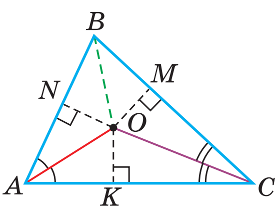


Рис. 274

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем в $\triangle ABC$ биссектрисы углов A и C. Пусть O — точка их пересечения (рис. 274). Так как точка O лежит на биссектрисе AO угла A, то она равноудалена от сторон угла A, то есть равны перпендикуляры ON и OK к сторонам угла A. Так как точка O лежит на биссектрисе CO угла C, она равноудалена от сторон угла C, то есть равны перпендикуляры OK и OM к сторонам угла C. Тогда $OK = OM = ON$. Так как перпендикуляры ON и OM равны, то точка O равноудалена от сторон угла B. Точка, равноудаленная от сторон угла, лежит на биссектрисе этого угла. Поэтому биссектриса угла B пройдет через точку O, и, следовательно, все три биссектрисы пересекутся в одной точке.

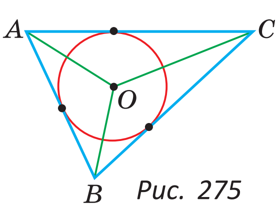


Рис. 275

Замечание. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной в него окружности (рис. 275), которая касается всех трех сторон треугольника (имеет с каждой из сторон только одну общую точку).

Задача 3. *В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K. Через точку K проведен отрезок NM, параллельный стороне AC с концами на сторонах AB и BC соответственно; AN = 6 см, MC = 4 см. Найти отрезок NM.*

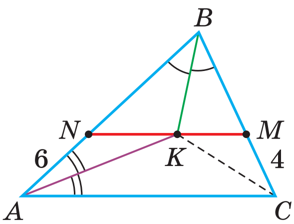


Рис. 276

Решение. Так как биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то CK — биссектриса угла C (рис. 276). Рассмотрим треугольник ANK: $\angle NAK = \angle CAK$, поскольку AK — биссектриса, $\angle CAK = \angle AKN$ как накрест лежащие при параллельных прямых NM и AC и секущей AK, откуда $\angle NAK = \angle AKN$ и треугольник ANK — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Тогда $NK = AN = 6$ см. Аналогично доказываем, что треугольник KMC — равнобедренный и $KM = MC = 4$ см. Искомый отрезок $NM = NK + KM = 6 + 4 = 10$ (см).
Ответ: 10 см.

Замечание. Из рассуждений, приведенных при решении задачи 3, следует, что если $NM \parallel AC$ и отрезок NM проходит через точку пересечения биссектрис, то периметр $\triangle NBM$ равен $AB + BC$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

230. Найдите отрезок или угол, отмеченные знаком вопроса (рис. 277).

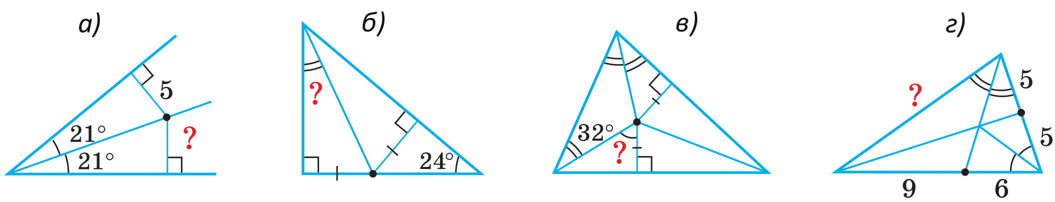


Рис. 277

231. Точка K находится на равном расстоянии от сторон угла BAC, равного $52°$. Найдите угол AKB, если $KB \perp AB$.

232. Дан треугольник ABC, у которого $AC = BC$. На его стороне AC взята точка M, равноудаленная от прямых AB и BC, $\angle ABM = 35°$. Найдите угол C.

233. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена биссектриса CE. Из точки E на стороны CA и CB опущены соответственно перпендикуляры EK и EM. Найдите периметр четырехугольника $KCME$, если $EK = 7{,}5$ см.

234. Докажите, что расстояния от середины основания равнобедренного треугольника до прямых, проходящих через боковые стороны, равны между собой.

235. В треугольнике ABC биссектрисы AK и CM пересекаются в точке O так, что $AO = CO$. Докажите, что прямые BO и AC перпендикулярны.

236*. В треугольнике ABC биссектрисы, проведенные из вершин B и C, и медиана, проведенная из вершины A, пересекаются в точке O. Угол BOC равен $130°$. Найдите угол ABC.

237*. Дан угол BAC, AK — его биссектриса. Точка M лежит внутри угла BAK. Докажите, что расстояние от точки M до прямой AB меньше расстояния от точки M до прямой AC.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Пять признаков равенства прямоугольных треугольников.
2. Теорему о свойстве точек биссектрисы угла.

Умеем

1. Доказывать признаки равенства прямоугольных треугольников.
2. Доказывать теорему о свойстве точек биссектрисы угла.

§ 25. Свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°

Теорема (о катете, лежащем против угла в 30°). **Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.**