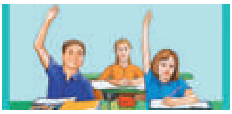
233. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена биссектриса CE. Из точки E на стороны CA и CB опущены соответственно перпендикуляры EK и EM. Найдите периметр четырехугольника $KCME$, если $EK = 7{,}5$ см.

234. Докажите, что расстояния от середины основания равнобедренного треугольника до прямых, проходящих через боковые стороны, равны между собой.

235. В треугольнике ABC биссектрисы AK и CM пересекаются в точке O так, что $AO = CO$. Докажите, что прямые BO и AC перпендикулярны.

236*. В треугольнике ABC биссектрисы, проведенные из вершин B и C, и медиана, проведенная из вершины A, пересекаются в точке O. Угол BOC равен $130°$. Найдите угол ABC.

237*. Дан угол BAC, AK — его биссектриса. Точка M лежит внутри угла BAK. Докажите, что расстояние от точки M до прямой AB меньше расстояния от точки M до прямой AC.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Пять признаков равенства прямоугольных треугольников.
2. Теорему о свойстве точек биссектрисы угла.

Умеем

1. Доказывать признаки равенства прямоугольных треугольников.
2. Доказывать теорему о свойстве точек биссектрисы угла.

§ 25. Свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°

Теорема (о катете, лежащем против угла в 30°). **Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.**

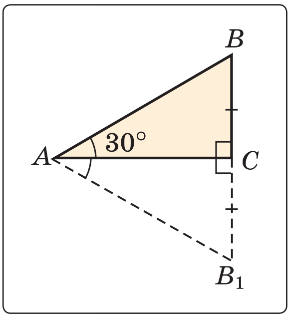


Рис. 278

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 278).

Доказать: $BC = \frac{1}{2}AB$.

Доказательство. На луче BC отложим отрезок CB_1, равный отрезку BC. Так как $\triangle AB_1C = \triangle ABC$ по двум катетам (катет AC — общий), то $\angle B_1AC = \angle BAC = 30°$, $\angle BAB_1 = 60°$. Но $\angle B = \angle B_1 = 60°$ (из $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C$). Известно (см. задачу 89), что если у треугольника все углы равны, то он равносторонний. Отсюда $\triangle ABB_1$ — равносторонний, $AB = BB_1$, $BC = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}AB$.

Теорема доказана.

Верно и утверждение, обратное данному. Докажем его.

Теорема. **Если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то этот катет лежит против угла в 30°.**

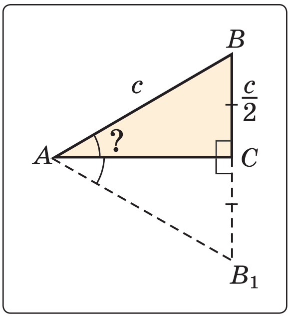
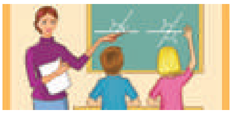


Рис. 279

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = \frac{c}{2}$ (рис. 279). Докажем, что $\angle BAC = 30°$. Продлим катет BC на его длину: $CB_1 = BC$. Из равенства прямоугольных треугольников ACB_1 и ACB (по двум катетам) следует, что $AB_1 = AB = BB_1 = c$. Значит, $\triangle ABB_1$ — равносторонний, все его углы равны по 60°, а его высота AC является биссектрисой. Поэтому $\angle BAC = 30°$. Что и требовалось доказать.



Задания к § 25

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике ABC, у которого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, проведена высота CD. Найти отрезок AD, если BD = 8 см.*

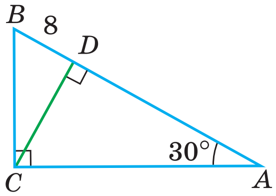


Рис. 280

Решение. Так как угол A и угол BCD дополняют угол B до 90°, то $\angle BCD = \angle A = 30°$ (рис. 280). В прямоугольном треугольнике CDB катет BD лежит против угла в 30°. Поэтому $CB = 2BD = 16$ см. В треугольнике ABC катет BC лежит против угла в 30°. Поэтому $AB = 2BC = 32$ см.
Отсюда $AD = AB - BD = 32 - 8 = 24$ (см).
Ответ: 24 см.

Замечание. Мы доказали, что $BC = 2BD$, $AB = 2BC = 4BD$, $AD = AB - BD = 3BD$, то есть в прямоугольном треугольнике с углом 30° высота делит гипотенузу в отношении 1 : 3.

Задача 2. *Дан прямоугольный треугольник с углом* 15°. *Высота, проведенная к гипотенузе, равна* 2 *см. Найти гипотенузу.*

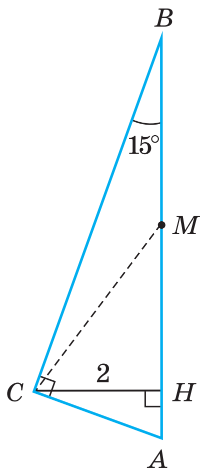


Рис. 281

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle ACB = 90°$, $\angle B = 15°$, $CH = 2$ см — высота (рис. 281). Нужно найти AB.
Проведем медиану CM треугольника ABC.
Так как в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $CM = MB$. Треугольник CMB — равнобедренный, $\angle MCB = \angle CBM = 15°$, $\angle AMC$ — его внешний угол. По свойству внешнего угла
$\angle AMC = \angle MCB + \angle MBC = 15° + 15° = 30°$.
В прямоугольном треугольнике CHM катет CH лежит против угла в 30°, поэтому он равен половине гипотенузы CM. Отсюда $CM = 2CH = 4$ см, $AB = 2CM = 8$ см.
Ответ: 8 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

238. Найдите отрезок или угол, обозначенные знаком вопроса (рис. 282). Ответ объясните.

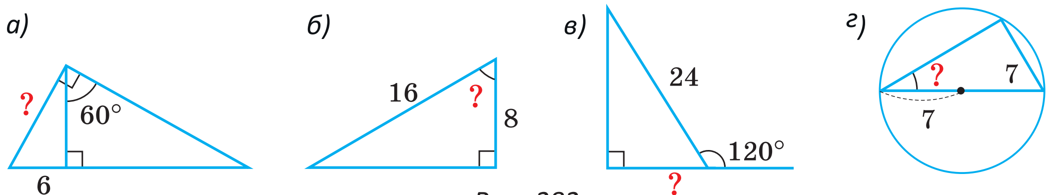


Рис. 282

239. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $AB + BC = 111$ см. Найдите AB.

240. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK. Сумма расстояний от точки K до прямых BA и BC равна 19 см, $\angle C = 30°$. Найдите KC.

241. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена медиана CM. Найдите угол между прямыми CM и AB, если $BC = 7{,}5$ см, $AB = 15$ см.

242. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ $\angle B = 120°$, высота AH равна 16 см. Найдите основание AC.

243. В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана BM, $BM = \frac{1}{2}AC$, $\angle A = 60°$, $HM = 24$ см. Найдите HC.

244. Сумма двух углов треугольника равна третьему, а два меньших угла относятся как $1 : 2$. Большая сторона равна 48 см. Найдите длины отрезков, на которые высота, опущенная из вершины большего угла треугольника, делит противоположную сторону.

245*. Зеленый газон имеет форму прямоугольника (рис. 283). Дорожка AC образует угол 30° со стороной DC, дорожка DO проходит через середину дорожки AC. Дорожка DK перпендикулярна дорожке AC, $KO = 8$ м. Найдите длину декоративного заборчика, который ограживает треугольный участок AOD.

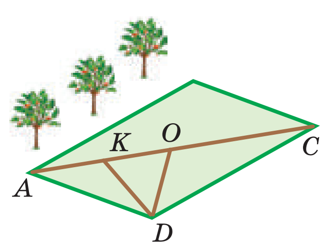


Рис. 283