

## § 27. О задачах на построение



Ранее мы выполняли построения на плоскости при помощи линейки с делениями, чертежного треугольника, транспортира и циркуля.

Математиков всегда интересовали построения геометрических фигур, которые можно выполнить только при помощи циркуля и линейки. В геометрии специально вы-

деляют задачи на построение, которые могут быть решены с помощью этих двух инструментов.

Например, при помощи циркуля и линейки можно построить треугольник, стороны которого равны трем данным отрезкам. Или построить угол, равный данному углу.

Рассмотрим одну из таких задач на построение. На прямой  $a$  нужно найти точку, которая находится на одинаковом расстоянии от точек  $A$  и  $B$ , лежащих по одну сторону от прямой  $a$  (рис. 293, а).

Найти точку — это значит построить ее при помощи циркуля и линейки. Если перемещать некоторую точку по прямой  $a$  (положения  $K_1, K_2, K_3$ ), то расстояния от этой точки до точек  $A$  и  $B$  будут меняться. Когда эти расстояния станут равными, точка на прямой будет равноудалена от концов отрезка  $AB$ . Значит, она будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$ . Это и есть идея построения: нужно построить серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  и найти точку его пересечения с прямой  $a$ .

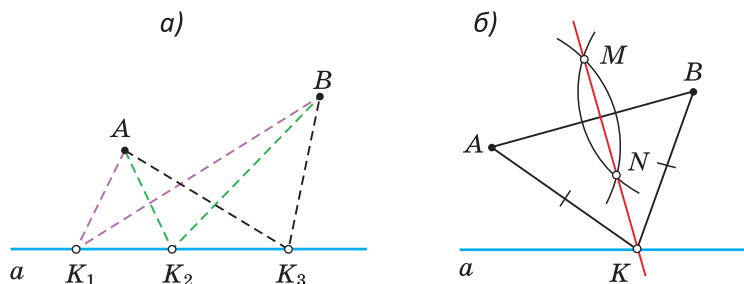


Рис. 293

Чтобы построить серединный перпендикуляр, нужно построить две пересекающиеся окружности равных радиусов с центрами в точках  $A$  и  $B$  (рис. 293, б). Затем провести прямую  $MN$  через точки пересечения этих окружностей (ниже мы обоснуем это построение). В пересечении серединного перпендикуляра  $MN$  к отрезку  $AB$  и прямой  $a$  получим искомую точку  $K$ .

Рассмотренная задача может иметь и практический смысл. Допустим, есть два населенных пункта и шоссе рядом с ними. На шоссе нужно найти место для остановки, чтобы путь для жителей обоих населенных пунктов до остановки был одинаковым. Все построения будут сделаны на карте населенного пункта.

При решении задач на построение линейка считается *односторонней* и *без делений*. При помощи такой линейки нельзя построить две параллельные прямые, проведя линии по краям линейки, нельзя измерять и откладывать отрезки, нельзя строить перпендикуляры, используя прямоугольную форму линейки. Рассмотрим, какие операции *можно* выполнять линейкой, а какие циркулем.

### Операции линейки

При помощи *линейки* можно провести (построить):

- а) произвольную прямую;
- б) прямую, проходящую через две точки (рис. 294).

### Операции циркуля

При помощи *циркуля* можно:

- а) построить произвольную окружность и окружность (дугу окружности) с данным центром и радиусом, равным данному отрезку (рис. 295);
- б) отложить отрезок, равный данному отрезку, на некоторой прямой.

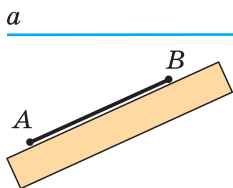


Рис. 294

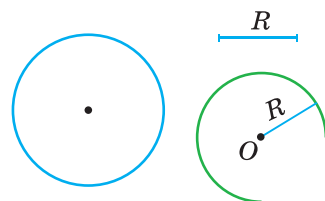
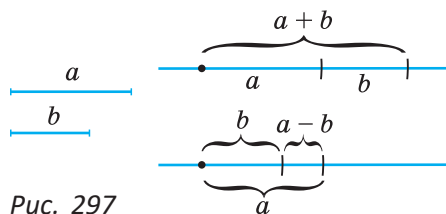
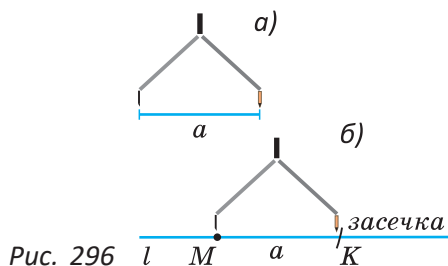


Рис. 295



### Откладывание отрезка

Для откладывания отрезка, равного данному отрезку  $a$  (рис. 296, а) на прямой  $l$  (рис. 296, б), следует: 1) отметить на прямой  $l$  точку  $M$ ; 2) радиусом, равным  $a$ , провести дугу окружности с центром в точке  $M$  (сделать засечку на прямой  $l$ ). В пересечении дуги и прямой  $l$  получим точку  $K$  и отрезок  $MK$ , равный  $a$ .

Операция откладывания отрезка на прямой позволяет построить сумму и разность двух отрезков (рис. 297): в первом случае на произвольной прямой откладывают последовательно два отрезка, во втором — на большем отрезке от любого его конца откладывают меньший отрезок.

В дальнейшем при решении задач на построение мы не будем описывать процедуру откладывания отрезка на прямой, считая ее элементарной операцией.

Перечислим 5 основных задач на построение, к которым сводятся другие задачи. Решая сложные задачи, будем ссылаться на эти основные, не описывая ту часть решения, которая связана с одной из основных задач.

**Задача I.** Построение треугольника по трем сторонам.

**Задача II.** Построение угла, равного данному.

**Задача III.** Построение биссектрисы угла.

**Задача IV.** Построение середины отрезка.

**Задача V.** Построение прямой, перпендикулярной данной.

В некотором смысле «линейка» и «циркуль» — это два идеальных робота, которые могут выполнять определенный набор операций. И наша задача — составить алгоритм из последовательности таких операций — команд для этих роботов, который приведет к построению необходимой фигуры. Фак-



Рис. 298

тически нужно написать программу для «циркуля» и «линейки».

*Замечание.* В треугольнике  $ABC$  стороны, противолежащие углам  $A$ ,  $B$  и  $C$ , будем соответственно обозначать  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а сами эти углы —  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  (рис. 298). Медианы, проведенные к сторонам  $a$ ,  $b$  и  $c$ , будем обозначать  $m_a$ ,  $m_b$  и  $m_c$ , высоты —  $h_a$ ,  $h_b$  и  $h_c$ , биссектрисы —  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$ .

### Задания к § 27

Перенесите в тетрадь точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $K$  (рис. 299) и выполните задания 1—5.

1. При помощи линейки постройте прямую  $AN$ , луч  $BA$ , отрезок  $CM$ .
2. На прямой  $AN$  при помощи циркуля отложите отрезок  $AQ$ , равный отрезку  $CM$ ; на луче  $BA$  от его начала отложите отрезок  $BE$ , равный утроенному отрезку  $BC$ .
3. При помощи циркуля постройте окружность с центром в точке  $M$  и радиусом, равным отрезку  $BC$ .
4. Найдите точки  $L$  и  $T$  пересечения построенной окружности и прямой  $AN$ .
5. Найдите точки  $D$  и  $F$  пересечения построенной окружности с окружностью с центром в точке  $K$  и радиусом, равным отрезку  $BC$ ; постройте точку  $G$  пересечения хорды  $DF$  и отрезка  $MK$ .

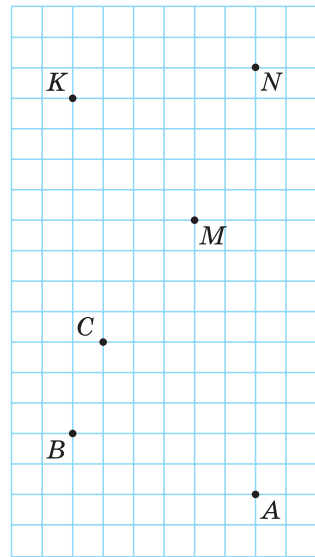


Рис. 299