Замечание. Вторым способом решения будет построение одного серединного перпендикуляра MK к хорде AB, нахождение точек T и P пересечения MK с окружностью и построение середины O диаметра TP.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

263. Разделите данный отрезок на четыре равные части.

264. Постройте угол, равный $\frac{3}{4}$ данного угла.

265. Изобразите остроугольный треугольник ABC. Для него постройте:
а) биссектрису AK; б) медиану BM.

266. Постройте точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника и окружность, проходящую через все вершины треугольника.

267. В одной полуплоскости относительно прямой m лежат две точки A и B. На прямой m постройте точку M, равноудаленную от точек A и B.

268*. Дан неравнобедренный треугольник ABC. На биссектрисе угла B найдите точку, которая находится на равном расстоянии от вершин A и C.

§ 30. Построение прямой, перпендикулярной данной

Задача V. *Построить прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через данную точку A.*

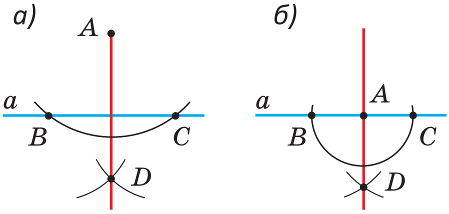


Рис. 310

Решение. Алгоритм построения одинаков для случая, когда точка A не принадлежит прямой a (рис. 310, *а*) и когда точка A принадлежит прямой a (рис. 310, *б*).

Построение. Проводим дугу с центром в точке A, которая пересекает прямую a в точках B и C. Из точек B и C как из центров одним и тем же радиусом (бо́льшим

или равным BC) проводим дуги до пересечения их в точке D. Строим прямую AD. Получаем $AD \perp a$.
Доказательство. Так как точки A и D равноудалены от концов отрезка BC ($AB = AC$, $BD = CD$ как радиусы), то AD — серединный перпендикуляр к отрезку BC. Следовательно, $AD \perp a$.

Этапы решения задачи на построение

При решении задачи на построение выделяют 4 этапа.

1. Анализ.

На этом этапе предполагают, что задача решена, делают чертеж с изображением искомой фигуры и указывают *идею решения* задачи.

2. Построение.

На этом этапе дают *описание последовательности шагов,* приводящих к построению искомой фигуры, то есть алгоритм построения. Иногда на этом этапе проводят и сами операции построения на произвольно взятых отрезках, углах и других фигурах. В сложных задачах обычно указывают лишь шаги построения, ссылаясь на основные и ключевые задачи.

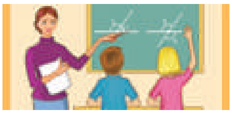
3. Доказательство.

На этом этапе доказывают, что *построенная фигура удовлетворяет требованию задачи*. Иногда это следует непосредственно из построения.

4. Исследование.

На данном этапе определяют, при какой величине заданных в условии отрезков и углов существует решение и число решений.

При записи решения задачи на построение этапы анализа и исследования в школе *необязательны*, если в условии задачи нет специальных указаний.



Задания к § 30

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *Построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.*

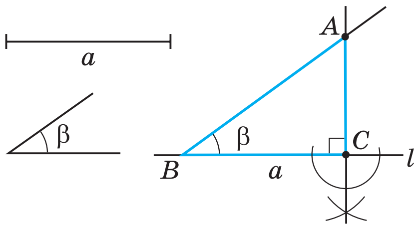


Рис. 311

Решение. Пусть дан катет a и прилежащий к нему острый угол β. Нужно построить прямоугольный треугольник с катетом a и углом β (рис. 311).

Построение. 1) Строим прямой угол. Для этого проводим произвольную прямую l и строим перпендикулярную ей прямую, проходящую через произвольно взятую на прямой l точку C (основная задача). Получаем прямой угол C.

2) На одной стороне прямого угла C от его вершины откладываем отрезок $CB = a$.

3) Строим $\angle B = \beta$ (основная задача).

4) В пересечении стороны угла B со стороной прямого угла получаем точку A.

Доказательство. Треугольник ABC — искомый, так как по построению $\angle C = 90°$, $BC = a$ — катет, $\angle B = \beta$ — прилежащий острый угол.

Замечание. Мы не описываем построение прямой, перпендикулярной данной, и построение угла, равного данному, так как это основные задачи. На рисунке 311 построение прямого угла C показано для наглядности.

Задача 2. *Построить прямую, параллельную данной прямой, если расстояние между этими прямыми равно заданному отрезку.*

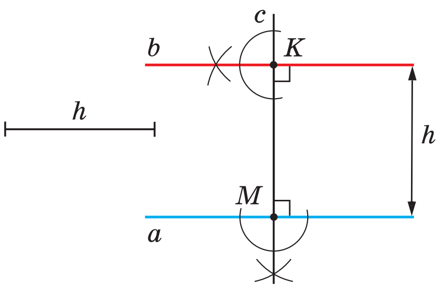


Рис. 312

Решение. Пусть дана прямая a и отрезок h, равный расстоянию между параллельными прямыми a и b (рис. 312). Нужно построить прямую b, параллельную прямой a и находящуюся от прямой a на расстоянии h. Воспользуемся теоремой о том, что на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

Построение. 1) Отмечаем на прямой a точку M и строим прямую c, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку M (основная задача).

2) Откладываем на прямой c перпендикуляр $MK = h$.

3) Строим прямую b, перпендикулярную прямой c и проходящую через точку K (основная задача). Получаем $b \parallel a$.

Доказательство. Так как $a \perp c$ и $b \perp c$ и на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой, то $a \parallel b$. Расстояние между параллельными прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из прямых на другую прямую: $KM \perp a$, $KM = h$.

Задача 3. *Построить треугольник по основанию a, высоте h_a и медиане m_a, проведенным к этому основанию.*

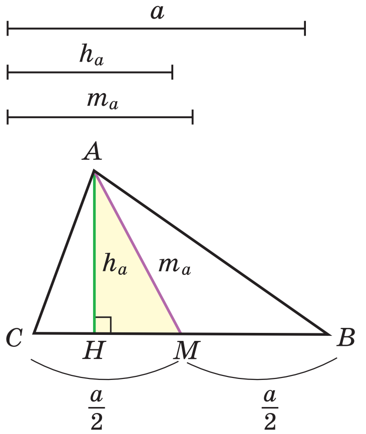


Рис. 313

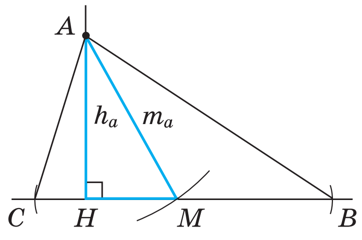


Рис. 314

Решение.

Анализ. Пусть у треугольника ABC $BC = a$, высота $AH = h_a$ и медиана $AM = m_a$ (рис. 313). Заметим, что $\triangle AHM$ может быть построен по катету и гипотенузе, а затем достроен до искомого треугольника ABC путем откладывания от точки M влево и вправо отрезков $MC = MB = \frac{a}{2}$.

Построение. 1) Строим прямой угол H (рис. 314). На одной его стороне откладываем отрезок $AH = h_a$, из точки A как из центра делаем засечку на второй стороне угла радиусом m_a — получаем точку M.

2) Делим отрезок a пополам (основная задача) и на прямой HM откладываем по разные стороны от точки M отрезки $MB = \frac{a}{2}$ и $MC = \frac{a}{2}$. Проводим отрезки CA и BA. Получаем искомый $\triangle ABC$.

Доказательство. $\triangle ABC$ — искомый, так как у него высота $AH = h_a$, медиана $AM = m_a$, сторона $BC = a$ по построению.

Исследование*. Так как катет меньше гипотенузы, то высота h_a должна быть меньше или равна медиане m_a. Поэтому решение существует, если $h_a \leqslant m_a$, и оно единственное. Если $h_a = m_a$, получим равнобедренный треугольник.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

269. Изобразите остроугольный треугольник ABC. Постройте:
а) высоту AH;
б) точку пересечения высот треугольника ABC.

270. Изобразите угол α. Постройте угол β, если известно, что $\alpha + \beta = 90°$.

271. Постройте прямоугольный треугольник:
а) по двум катетам;
б) по катету и противолежащему острому углу;
в) по гипотенузе и острому углу.

272. Постройте равнобедренный треугольник по высоте и основанию.

273. Постройте прямоугольник по двум сторонам a и b.

274. Постройте треугольник ABC по стороне b, высоте h_a и медиане m_a, проведенным к стороне a.

275*. Постройте основание H высоты CH треугольника ABC, у которого вершина C недоступна (рис. 315).

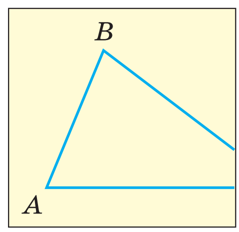


Рис. 315

§ 31. Геометрическое место точек

Определение. **Геометрическим местом точек (ГМТ)** называется множество всех точек, обладающих общим свойством.

Примеры геометрических мест точек на плоскости

1. *Окружность* — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки.

2. *Серединный перпендикуляр* — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка.

3. *Биссектриса* — геометрическое место точек плоскости, находящихся внутри угла и равноудаленных от сторон угла.