РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

269. Изобразите остроугольный треугольник ABC. Постройте:
а) высоту AH;
б) точку пересечения высот треугольника ABC.

270. Изобразите угол α. Постройте угол β, если известно, что $\alpha + \beta = 90°$.

271. Постройте прямоугольный треугольник:
а) по двум катетам;
б) по катету и противолежащему острому углу;
в) по гипотенузе и острому углу.

272. Постройте равнобедренный треугольник по высоте и основанию.

273. Постройте прямоугольник по двум сторонам a и b.

274. Постройте треугольник ABC по стороне b, высоте h_a и медиане m_a, проведенным к стороне a.

275*. Постройте основание H высоты CH треугольника ABC, у которого вершина C недоступна (рис. 315).

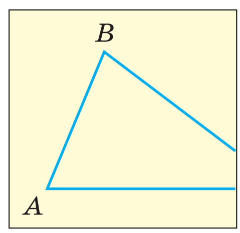


Рис. 315

§ 31. Геометрическое место точек

Определение. **Геометрическим местом точек (ГМТ)** называется множество всех точек, обладающих общим свойством.

Примеры геометрических мест точек на плоскости

1. *Окружность* — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки.

2. *Серединный перпендикуляр* — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка.

3. *Биссектриса* — геометрическое место точек плоскости, находящихся внутри угла и равноудаленных от сторон угла.

4. Геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии h от данной прямой a, — две прямые m и n, параллельные данной, находящиеся в разных полуплоскостях от этой прямой на заданном расстоянии от нее (рис. 316).

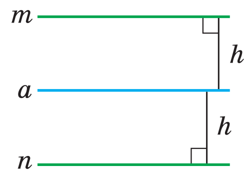


Рис. 316

5. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых a и b, есть параллельная им прямая n, проходящая через середину M их общего перпендикуляра AB (рис. 317).

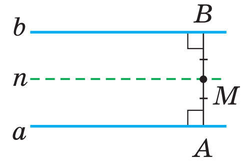


Рис. 317

В пространстве геометрическим местом точек, равноудаленных от данной точки, является *сфера*.

Метод геометрических мест точек

Одним из методов решения задач на построение является *метод пересечения двух геометрических мест точек*. Суть его состоит в следующем. Пусть искомая точка удовлетворяет, например, некоторым двум условиям: геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, — это некоторая фигура F_1 (окружность, биссектриса угла, серединный перпендикуляр и т. д.), а геометрическое место точек, удовлетворяющих другому условию, — это фигура F_2. Искомая точка, принадлежащая и фигуре F_1, и фигуре F_2, является точкой их пересечения. В частности, методом пересечения двух геометрических мест точек решена основная задача о построении треугольника по трем сторонам.

Задания к § 31

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *Построить внутри данного угла точку, которая равноудалена от сторон угла на данное расстояние m.*

Решение.

Анализ. Пусть дан угол BAC и отрезок длиной m (рис. 318). Все точки, равноудаленные от сторон угла, лежат на биссектрисе угла. Поэтому искомая точка лежит на биссектрисе угла.

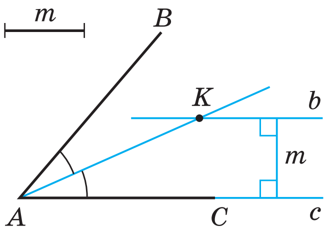


Рис. 318

С другой стороны, все точки, удаленные от стороны угла на расстояние m, лежат на двух прямых, параллельных стороне угла и находящихся от нее на расстоянии m. Искомая точка будет находиться на пересечении указанных двух геометрических мест точек.

Построение. 1) Строим прямую b, параллельную прямой AC, с их общим перпендикуляром, равным m (ключевая задача 2 § 30).

2) Строим биссектрису угла BAC (основная задача).

3) В пересечении биссектрисы и прямой b получаем искомую точку K.

Доказательство. Расстояние между параллельными прямыми b и AC равно m. Значит, и расстояние от точки K до стороны AC угла BAC равно m. Все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла, в том числе и точка K. Точка K удовлетворяет требованию задачи.

Задача 2. *Построить треугольник по двум сторонам a и b и высоте h_c, опущенной на сторону c.*

Решение. Заметим, что в общем случае существует два треугольника со сторонами a, b и высотой h_c (рис. 319, *а*, *б*).

Построение (рис. 320). 1) Строим параллельные прямые m и n с расстоянием h_c между ними (ключевая задача 2 § 30).

2) Строим дугу с центром в точке C и радиусом a, которая пересекает прямую m в точках B и B_1.

3) Строим дугу с центром в точке C радиусом b, которая пересекает прямую m в точке A. Треугольники ABC и AB_1C — искомые.

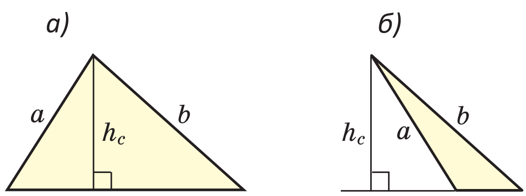


Рис. 319

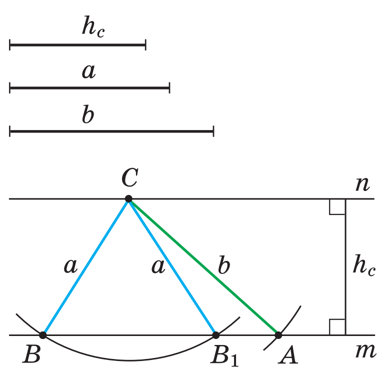


Рис. 320

Доказательство следует из построения и теоремы о расстоянии между параллельными прямыми.

Исследование. Так как перпендикуляр меньше наклонной, проведенной из той же точки к одной прямой, то задача может иметь решение, только если $h \leqslant a$ и $h \leqslant b$. Если $h < a$, $h < b$ и $a \neq b$, то задача имеет два решения. Если $a = h$ и $a < b$, то треугольник прямоугольный, и задача имеет одно решение. Если $h < a$ и $a = b$, то задача имеет одно решение — равнобедренный треугольник. Если $h > a$ или $h > b$, задача не имеет решения.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

276. На плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых:

а) отрезок AB является основанием равнобедренного треугольника AMB;
б) отрезок AB является боковой стороной равнобедренного треугольника AMB.

277. На плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых:

а) $AM = MB$; б) $AM < BM$.

278. Даны две пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых.

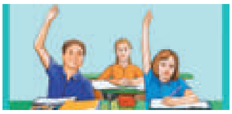
279. Найдите геометрическое место центров окружностей, каждая из которых проходит через две данные точки.

280. Постройте треугольник ABC:

а) по стороне a, высоте h_a и углу β;
б) по стороне a, высоте h_a и стороне b.

281*. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с гипотенузой AB.

282*. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и высоте h_c.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Какие операции при решении задач на построение можно выполнять циркулем, а какие — линейкой.
2. Основные задачи на построение.
3. Этапы решения задачи на построение.

Умеем

1. Решать основные задачи на построение.
2. Строить треугольник:
   а) по двум сторонам и углу между ними;
   б) по стороне и двум прилежащим к ней углам;
   в) по трем сторонам.
3. Строить прямую, параллельную данной и проходящую через данную точку.

Реальная геометрия

На практике при отсутствии циркуля окружность строят при помощи веревки с привязанными к ее концам колышками. Закрепив один колышек и натянув веревку, другим колышком прочерчивают окружность.

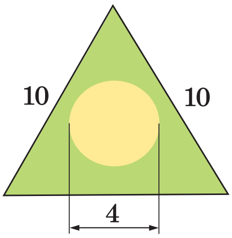
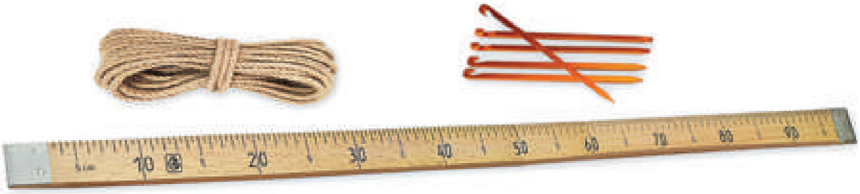
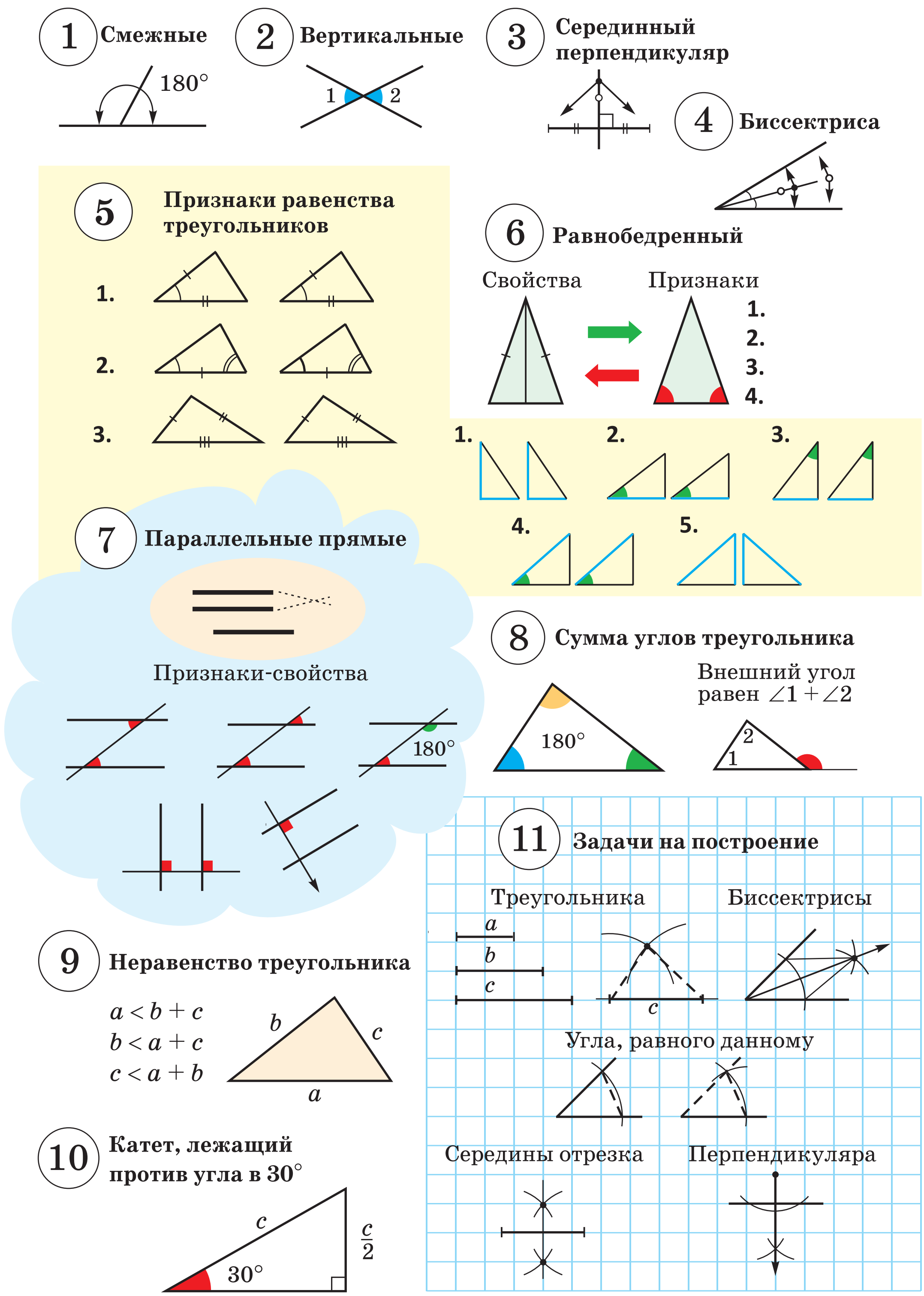


Рис. 321

Задача. *Необходимо разбить клумбу в форме равностороннего треугольника со стороной* 10 *м, в центре которой будет расположена круглая клумба диаметром* 4 *м* (*рис.* 321). *У вас есть веревка длиной* 15 *м, метровая линейка и несколько колышков.*

Составьте алгоритм решения этой практической задачи, сделайте обоснование. При этом используйте тот факт, что центр равностороннего треугольника находится в точке пересечения его медиан (высот, биссектрис).




1 Смежные
180°
2 Вертикальные
1
2
3 Серединный перпендикуляр
4 Биссектриса
5 Признаки равенства треугольников
1.
2.
3.
6 Равнобедренный
Свойства
Признаки
1.
2.
3.
4.
1.
2.
3.
4.
5.
7 Параллельные прямые
Признаки-свойства
180°
8 Сумма углов треугольника
180°
Внешний угол равен ∠1 + ∠2
2
1
11 Задачи на построение
Треугольника
a
b
c
c
Биссектрисы
Угла, равного данному
Середины отрезка
Перпендикуляра
9 Неравенство треугольника
a < b + c
b < a + c
c < a + b
b
c
a
10 Катет, лежащий против угла в 30°
c
c/2
30°