

Глава 2

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

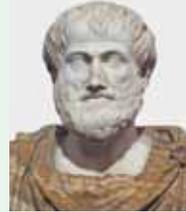
§ 3. Логика высказываний

Возможности компьютера велики. Он может помочь врачу поставить правильный диагноз пациенту, пассажиру — выбрать билет на нужный поезд; компьютер может управлять автомобилем, составлять прогнозы погоды и многое другое.

Для того чтобы выяснить, может ли компьютер «думать», сначала нужно понять, как думает человек. Ведь именно человек создал компьютер, и компьютер выполняет только те действия, которым его научил человек.

Наши знания об окружающем мире мы выражаем в повествовательных предложениях. Такие предложения могут отражать действительность верно или неверно. Думая, человек строит свои рассуждения, основываясь на собственных знаниях.

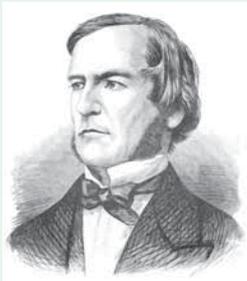
Еще Аристотель заметил, что правильность рассуждений не зависит от содержания, а определяется формой.



Древнегреческий философ Аристотель (384—322 гг. до н. э.) первым систематизировал формы и правила мышления, разработал теорию умозаключений и доказательств, описал логические операции. Аристотелю принадлежат формулировки основных законов мышления.



У истоков современной логики стоит немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). Ученый предложил идею представить логические рассуждения как вычисления, подобные вычислениям в математике.



Английский математик и логик Джордж Буль (1815—1864) перенес на логику законы и правила математических (алгебраических) действий, создав тем самым алгебру логики.

На логических элементах строятся логические схемы электронных устройств. Законы булевой алгебры применяются и в программировании.

Пример 3.1. Следующие предложения являются высказываниями:

1. Атом водорода самый легкий (истинно).

2. Клетка — центральная часть атома (ложно).

3. Кирилл Туровский — известный английский писатель и оратор, живший во второй половине XII в. (ложно).

4. При делении любого числа (кроме нуля) на само себя получается число 1 (истинно).

Наука, изучающая формы рассуждений, называется **формальной логикой**.

Математическая логика использует математические методы для исследования способов построения рассуждений, доказательств, выводов.

Одним из разделов современной математической логики является **логика высказываний**.

На правилах математической логики построены процессы «рассуждений» компьютера. Изучение логики высказываний поможет понять, как можно научить компьютер «думать».

3.1. Понятие высказывания

Высказывание — повествовательное предложение (утверждение), о котором в настоящее время можно сказать, истинно оно или ложно (пример 3.1).

Об истинности высказывания можно говорить только в настоящем времени: высказывание «Идет дождь» может быть истинным сейчас и ложным через час.

Как правило, высказывания обозначают заглавными латинскими буквами. Если высказыва-

ние A истинно, пишут $A = 1$, если ложно — $A = 0$ (пример 3.2). Часто используют такие обозначения: $A = \text{true}$ (истина) и $A = \text{false}$ (ложь).

3.2. Логическая операция НЕ

С высказываниями можно производить различные операции, подобно тому как в математике — с числами (сложение, умножение, вычитание и др.).

Логическая операция **НЕ** (отрицание) меняет значение высказывания на противоположное: истинно на ложно, а ложно на истинно.

Логическое отрицание получается из высказывания путем добавления частицы «не» к сказуемому или с использованием оборота «неверно, что...» (пример 3.3). Иногда при построении отрицаний некоторые слова заменяют их антонимами, если это возможно.

Если высказывание содержит слова «все», «всякий», «любой», то его отрицание строится с использованием слов «некоторые», «хотя бы один». И наоборот, для высказываний со словами «некоторые», «хотя бы один» отрицание будет содержать слова «все», «всякий», «любой» (пример 3.4).

Пример 3.2.

$A = \langle a^0 \text{ равно } 1, \text{ если } a \neq 0 \rangle;$
 $B = \langle \text{Массу измеряют в литрах} \rangle.$

Для приведенного примера $A = 1, B = 0$.

Пример 3.3. Построим отрицание высказываний.

Высказывания:

1. У цветковых растений развивается плод.
2. Фреска — это живопись водяными красками по свежей штукатурке.

Отрицание высказываний:

1. У цветковых растений **не** развивается плод.
2. **Неверно, что** фреска — это живопись водяными красками по свежей штукатурке.

Пример 3.4. Построим отрицание высказываний.

Высказывания:

1. Все учащиеся занимаются спортом.
2. Некоторые птицы умеют плавать.
3. Любой цветок имеет запах.
4. Иногда у мамы бывает плохое настроение.

Отрицание высказываний:

1. **Некоторые** учащиеся **не** занимаются спортом.
2. **Все** птицы **не** умеют плавать.
3. **Хотя бы один** цветок **не** имеет запаха.
4. У мамы **всегда** бывает **хорошее** настроение.

Пример 3.5. Определение истинности высказываний с отрицаниями.

1. Ель — это дерево (истинное высказывание). Ель — это не дерево (ложное высказывание).

$$A = 1, \text{НЕ } A = 0.$$

2. Число -7 является положительным (ложное высказывание). Число -7 не является положительным (истинное высказывание).

$$A = 0, \text{НЕ } A = 1.$$

3. Все вещества — металлы (ложное высказывание). Некоторые вещества не металлы (истинное высказывание).

$$A = 0, \text{НЕ } A = 1.$$

4. Все составляющие воздуха являются газами (истинное высказывание). Некоторые составляющие воздуха не являются газами (ложное высказывание).

$$A = 1, \text{НЕ } A = 0.$$

5. Длительность суток не зависит от скорости вращения планеты (ложное высказывание). Длительность суток зависит от скорости вращения планеты (истинное высказывание).

$$A = 0, \text{НЕ } A = 1.$$

6. Дома на левой стороне улицы имеют четные номера (ложное высказывание). Неверно, что дома на левой стороне улицы имеют четные номера (истинное высказывание).

$$A = 0, \text{НЕ } A = 1.$$

Любую операцию над числами в математике обозначают каким-либо знаком: «+», «-», «·», «:». Для логических операций тоже определены свои обозначения. Если операцию отрицания применяют к высказыванию A , то это можно записать так: **НЕ** A . Можно встретить и другие обозначения для логической операции отрицания: **Not** A , $\neg A$, \bar{A} , $\sim A$.

Если нас интересует истинность высказывания **НЕ** A , то ее (вне зависимости от содержания) можно определить по таблице истинности:

A	НЕ A
1	0
0	1

Из таблицы истинности следует, что отрицанием истинного высказывания будет ложное, а отрицанием ложного — истинное (пример 3.5). Высказывание и его отрицание никогда не могут быть истинными или ложными одновременно.

Например, отрицанием высказывания «У меня есть компьютер» будет высказывание «У меня нет компьютера» (или высказывание «Неверно, что у меня есть

компьютер»). Истинность этих высказываний зависит от конкретного человека. Для одних будет истинным первое высказывание, а для других — второе. Но оба высказывания не могут быть истинными или ложными одновременно для одного и того же человека.

Часто трудно установить истинность высказывания. Высказывание «Площадь озера Нарочь $79,6 \text{ км}^2$ » в одной ситуации можно считать ложным, а в другой — истинным. Ложным — так как указанное значение не является постоянным. Истинным — если рассматривать его как некоторое приближение, приемлемое на практике.



1. Что такое высказывание?
2. Какие значения могут иметь высказывания?
3. Что делает логическая операция *отрицание*?
4. Как построить отрицание высказывания?



Упражнения

- 1 Какие из предложений являются высказываниями, а какие — нет?
 1. Включи монитор.
 2. Кислород — это газ.
 3. Шишка — это цветок.
 4. Сколько воды утекло?
 5. Все дети — учащиеся.
 6. Хотя бы один пароль будет верным.
- 2 Определите истинность высказываний.
 1. 123 — это цифра.
 2. Слово «стол» — это существительное.
 3. Число 46 является степенью числа 2.
 4. Значение выражения $a = \frac{x+y}{3}$ равно 0,75.
 5. Железо легче воды.
- 3 Постройте отрицания высказываний.
 1. Миша не может пойти в кино.
 2. Соня любит рисовать.
 3. Все планеты не имеют атмосферы.

4. В сентябре не бывает дождей.
5. Солнце светит ярко.
6. Некоторые птицы улетают на юг.

4 Откройте файл с данными ниже предложениями и отредактируйте их, удалив или вставив частицу «не» так, чтобы все предложения стали истинными высказываниями.

Озеро Нарочь не является крупнейшим озером Беларуси.

Все горы являются вулканами.

Дуб — хвойное дерево.

Число 27 является простым числом.

Термометр не позволяет определить температуру тела.

Число 2016 не делится на 3.

Треугольник не является геометрической фигурой.

5 Какие утверждения о животных, представленных на рисунках, истинные, а какие — ложные?



1. Некоторые из этих животных умеют лазать по деревьям.
2. Все животные обитают в лесах.
3. Ни одно из животных не является домашним.
4. Каждое животное можно погладить.
5. Все люди любят мышей.
6. Ни одно из животных не умеет плавать.

6 Откройте файл с рисунком трех цветков. Раскрасьте их так, чтобы каждое из высказываний было истинным.



1. Все цветки имеют желтый круг в середине.
2. На рисунке есть цветок с синими лепестками.
3. На рисунке нет цветка с красными лепестками.
4. Неверно, что цвет круга в середине цветка совпадает с цветом лепестков.
5. Хотя бы у одного цветка лепестки разного цвета.

7 Создайте 4 копии рисунков, полученных в задании 6. Дополните каждую копию изображениями ваз (выберите из файла) так, чтобы соответствующее из нижеприведенных высказываний было ложным.

1. Все изображения ваз — четырехугольники.
2. На вазах есть орнамент в виде кругов.
3. Все круги в орнаменте разного размера.
4. Хотя бы один круг в орнаменте белого цвета.

8 Задумано некоторое число x . Среди высказываний $x > 1$, $x > 2$, $x > 3$, $x > 4$, $x > 5$ есть два верных и три неверных. Какие высказывания неверные?

9* Решите задачу-стихотворение.

*Собаки с рыжими хвостами
 Себе овсянку варят сами.
 Тем, чьи хвосты стального цвета,
 Не позволяют делать это.
 Кто варит сам себе овсянку,
 Гулять выходит спозаранку.
 Все, кто гулять выходят рано,
 Не терпят фальши и обмана.
 Вид добродушный у Барбоса,
 Но на сорок он смотрит косо.
 Он видит: норовят сороки
 У воробьев списать уроки!
 Скажите — проще нет вопроса! —
 Какого цвета хвост Барбоса?¹*

¹ Разговоров, Н. «Собаки с рыжими хвостами...» [Электронный ресурс] / Н. Разговоров. — Режим доступа: <http://po.m-necropol.ru/razgovorov-nikita.html>. — Дата доступа: 26.06.2017.

§ 4. Логические операции И и ИЛИ

В 1936—1938 гг. американский инженер и математик Клод Шеннон (1916 — 2001) нашел применение булевой логике при конструировании схем из реле и переключателей. В дальнейшем это открытие послужило основанием для построения логических элементов, на которых работает компьютерная техника. Состояние элементов компьютера соответствует логическим значениям:

- если сигнал присутствует, получаем логическую 1;
- если сигнал отсутствует, получаем логический 0.

Пример 4.1. Проанализируем высказывание «Число 456 трехзначное и четное».

Данное высказывание является составным, поскольку содержит два простых высказывания:

«Число 456 трехзначное» (высказывание A);

«Число 456 четное» (высказывание B).

Высказывания A и B соединены вместе логической операцией **И**, в результате получено составное высказывание A **И** B . Высказывание A истинно, высказывание B истинно. Поэтому высказывание A **И** B истинно: $(A$ **И** $B) = 1$.

Логика высказываний позволяет строить **составные высказывания**. Они создаются из нескольких простых высказываний путем соединения их друг с другом с помощью логических операций **НЕ**, **И**, **ИЛИ** и др.

4.1. Логическая операция И

Определение истинности или ложности составного высказывания зависит от того, являются ли истинными или ложными простые высказывания, входящие в его состав, а также от той логической операции, которая их связывает.

Составное высказывание A **И** B , образованное в результате объединения двух простых высказываний A и B логической операцией **И**, истинно тогда и только тогда, когда A и B одновременно истинны.

Если хотя бы одно из простых высказываний, связанных операцией **И**, будет ложным, то и составное высказывание будет ложным (примеры 4.1 и 4.2).

Операцию **И** называют **логическим умножением**. Равенства

$1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 0 \cdot 0 = 0$, верные для обычного умножения, верны и для логического умножения.

Представим таблицу истинности для логической операции **И**:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A И B</i>
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Для записи логической операции **И** используют следующие обозначения: *A И B*, *A AND B*, $A \cdot B$, $A * B$, $A \wedge B$, *A & B*.

4.2. Логическая операция **ИЛИ**

Составное высказывание *A ИЛИ B*, образованное в результате объединения двух простых высказываний *A* и *B* логической операцией **ИЛИ**, ложно тогда и только тогда, когда *A* и *B* одновременно ложны.

Другими словами, составное высказывание *A ИЛИ B* будет истинным только в том случае, если истинно хотя бы одно из двух составляющих его простых

Пример 4.2. Высказывание *A*: «Геракл — герой древнерусской мифологии». Ложно, $A = 0$.



Высказывание *B*: «Геракл — сын бога Зевса». Истинно, $B = 1$.

Высказывание *A И B*: «Геракл — герой древнерусской мифологии **И** сын бога Зевса». Ложно, $(A И B) = 0$.

Пример 4.3. Проанализируем высказывание «Семиклассники изучают философию или астрономию».

Данное составное высказывание образовано из двух простых:

«Семиклассники изучают философию» (высказывание *A*);

«Семиклассники изучают астрономию» (высказывание *B*).

Высказывания связаны логической операцией **ИЛИ**. В результате получилось составное высказывание *A ИЛИ B*. Высказывание *A* ложно, высказывание *B* ложно. Поэтому высказывание *A ИЛИ B* ложно: $(A ИЛИ B) = 0$.

Пример 4.4. Высказывание A : «Франциск Скорина — белорусский первопечатник». **Истинно**, $A = 1$.

Высказывание B : «Стефан Баторий — турецкий султан». **Ложно**, $B = 0$.



Франциск
Скорина



Стефан
Баторий

Высказывание «Франциск Скорина — белорусский первопечатник, **ИЛИ** Стефан Баторий — турецкий султан» будет **истинным**, $(A \text{ ИЛИ } B) = 1$.

Пример 4.5*. Рассмотрим выражение: $A \text{ ИЛИ } B \text{ И НЕ } C$. Распишем по действиям вычисление его значения:

- 1) $D = \text{НЕ } C$;
- 2) $E = B \text{ И } D$;
- 3) $F = A \text{ ИЛИ } E$.

Значение высказывания F , полученное в 3-м действии, определит значение исходного логического выражения.

Пример 4.6*. Пусть высказывание $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$. Найдем значение логического выражения $A \text{ ИЛИ } B \text{ И НЕ } C$.

- 1) $D = \text{НЕ } C = 1$;
- 2) $E = B \text{ И } D = 0 \text{ И } 1 = 0$;
- 3) $F = A \text{ ИЛИ } E = 1 \text{ ИЛИ } 0 = 1$.

Значит, при начальных значениях $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ значение логического выражения $A \text{ ИЛИ } B \text{ И НЕ } C$ истинно.

высказываний (см. пример 4.3 на с. 27 и пример 4.4).

Таблица истинности для логической операции **ИЛИ**:

A	B	$A \text{ ИЛИ } B$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Операцию **ИЛИ** называют **логическим сложением**. Равенства $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $0 + 0 = 0$, верные для обычного сложения, верны и для логического сложения.

Для записи логической операции **ИЛИ** можно использовать следующие выражения: $A \text{ ИЛИ } B$, $A \text{ OR } B$, $A + B$, $A \vee B$, $A | B$.

Если в логическом выражении присутствует несколько логических операций, то важно определить порядок их выполнения. Наивысшим приоритетом обладает операция **НЕ**. Логическая операция **И**, т. е. логическое умножение, выполняется раньше операции **ИЛИ** — логического сложения (примеры 4.5* и 4.6*).

Для изменения порядка выполнения логических операций используют скобки: в этом случае сначала выполняются операции в скобках, а затем — все остальные.

Логические операции **И** и **ИЛИ** подчиняются переместительному закону:

$$A \text{ И } B = B \text{ И } A;$$

$$A \text{ ИЛИ } B = B \text{ ИЛИ } A.$$

Чтобы определить значение составного логического выражения, иногда достаточно знать значение только одного простого высказывания. Так, если в составном высказывании с операцией **И** хотя бы одно простое высказывание является ложным, то значение составного высказывания будет ложным. Если в составном высказывании с операцией **ИЛИ** хотя бы одно простое высказывание истинно, то значение составного высказывания будет истинным (пример 4.7).

Пример 4.7. Высказывание A : «Прогноз погоды обещает дождь». Высказывание B : «Сейчас на улице идет дождь».

Высказывание $A \text{ И } B$ будет ложным, если мы увидели, что на улице нет дождя (независимо от того, что обещал прогноз погоды).

Высказывание $A \text{ ИЛИ } B$ будет истинным, если прогноз погоды обещал дождь (независимо от того, какую погоду мы наблюдаем сейчас).



1. В каких случаях составное высказывание $A \text{ И } B$ может быть истинным?
2. В каких случаях составное высказывание $A \text{ ИЛИ } B$ может быть ложным?



Упражнения

- 1 Определите, истинными или ложными являются нижеприведенные составные высказывания.
 1. Мяч круглый, **ИЛИ** Земля плоская.
 2. Кролики — домашние животные, **И** баобаб растет в Беловежской пуще.
 3. Клавиатура — устройство ввода информации, **ИЛИ** мышь — устройство вывода информации.

4. И. А. Крылов написал басню «Квартет», И М. Ю. Лермонтов написал стихотворение «Парус».
5. Сосна — хвойное дерево, И кедр — не хвойное дерево.
6. Монитор — устройство ввода информации, ИЛИ сканер — НЕ устройство вывода информации.
- 7*. Континенты и острова — это большие участки суши.

2 О том, как прошли летние каникулы, Кира рассказала своим друзьям следующее:

1. Я была у бабушки в деревне, и рядом с деревней было озеро.
2. По озеру плавала лодка или утка.
3. Мы с бабушкой насобирали малины и смородины.
4. Я составила букет из цветов. В нем были ромашки или гвоздики.

Подготовьте к каждому из высказываний Киры рисунки, учитывая, что все высказывания истинны.

3 Откройте файл с рисунком и разложите грибы по корзинкам так, чтобы было истинным следующее высказывание: «В большой корзине все грибы съедобные, и в маленькой корзине все грибы несъедобные».



4 Откройте файл с рисунком и поставьте все цветы в вазы так, чтобы было истинным высказывание: «В синей вазе все цветы розы, или в красной вазе все цветы не красного цвета».



5* Найдите значения логических выражений, если $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 0$.

1. A ИЛИ B И НЕ C .
2. A И НЕ B ИЛИ C .
3. A ИЛИ B И НЕ (C И D).
4. (A И B) ИЛИ НЕ C И (A ИЛИ B) ИЛИ НЕ D .