

КВАДРАТЫЧНАЯ ФУНКЦЫЯ

§ 13. Квадратычная функцыя і яе ўласцівасці



3.1. Запішыце выраз у выглядзе мнагачлена:

- а) $5(x - 1)(x - 4)$;
- б) $-2(x - 4)(x + 2)$;
- в) $(x - 1,5)^2 - 2,5$;
- г) $2(x - 1)^2 + 3$.

3.2. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння графіка функцыі з воссю абсцыс і воссю ардынат:

- а) $y = 4x - 5$;
- б) $y = -x + 5$.

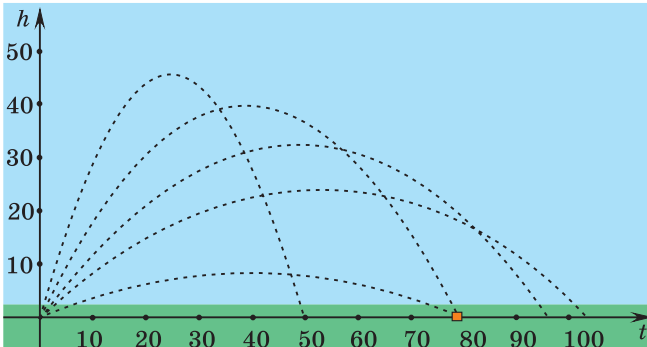
3.3. Знайдзіце:

- а) найбольшае значэнне выразу $-2(x - 1)^2 + 3$;
- б) найменшае значэнне выразу $(x - 1,5)^2 - 2,5$.



Функцыі дазваляюць апісваць працэсы з розных галін навукі і жыцця. Напрыклад, траекторыя цела, кінутага пад вуглом да гарызонту, апісваецца функцыяй, графік якой (рыс. 44) называецца **парабалай** (ад грэч. *παραβολή* — *para* — побач і *бала* — кідаю).

Траекторыяй мяча, кінутага баскетбалістам (рыс. 45), або кап'я, якое кінуў лёгкаатлет, калі не ўлічваць супраціўленне паветра, з'яўляецца парабала.



Рыс. 44

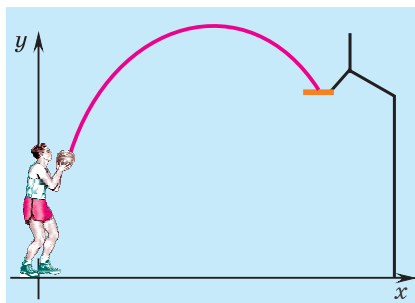


Рис. 45



Рис. 46

Па парабале рухаюцца кроплі вады ў струмені фантана (рис. 46).

Усе разгледжаныя працэсы апісваюцца функцыямі выгляду $y = ax^2 + bx + c$, графікамі якіх з'яўляюцца парабалы.

Азначэнне

Функцыя выгляду $y = ax^2 + bx + c$, дзе a , b і c — некаторыя лікі, прычым $a \neq 0$, называецца **квадратичнай**.

Напрыклад, функцыі $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2 + 6x$ — квадратичныя.

Разгледзім уласцівасці квадратичнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$ і спосаб пабудовы яе графіка — парабалы.

Як вядома, квадратны трохчлен $ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, можна раскласці на множнікі, г. зн. запісаць у выглядзе $a(x - x_1)(x - x_2)$, дзе x_1 і x_2 — яго карані.

Таксама квадратны трохчлен $ax^2 + bx + c$ можна запісаць у выглядзе $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n$, дзе $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.



Такім чынам, квадратичную функцыю можна запісаць у выглядзе:

1) мнагачлена

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ дзе } a \neq 0;$$

2) раскладання на множнікі (калі карані адпаведнага квадратнага трохчлена існуюць)

$$y = a(x - x_1)(x - x_2);$$

3) вылучанага поўнага квадрата

$$y = a(x - m)^2 + n.$$

Напрыклад, квадратычную функцыю $y = 4x^2 - 24x + 20$ можна запісаць у наступных формах:

- $y = 4x^2 - 24x + 20$ — у выглядзе мнагачлена;
- $y = 4(x - 1)(x - 5)$ — у выглядзе раскладання на множнікі;

- $y = 4(x - 3)^2 - 16$ — у выглядзе вылучанага поўнага квадрата.

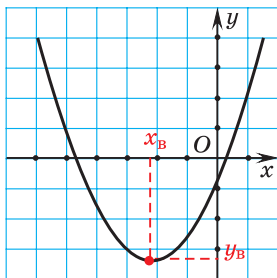
Для даследавання ўласцівасцей квадратычнай функцыі і пабудовы яе графіка будзем карыстацца рознымі формамі яе запісу.

Уласцівасці квадратычнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$

1. Абсяг вызначэння функцыі. Паколькі $ax^2 + bx + c$ — мнагачлен, то абсягам вызначэння квадратычнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, з'яўляюцца ўсе рэчаісныя лікі, г. зн. $D = \mathbf{R}$. Графічна гэта азначае, што для любога значэння абсцысы знойдзецца адпаведны пункт на парабале.

2. Мноства значэнняў функцыі. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі. Для знаходжання мноства значэнняў квадратычнай функцыі выкарыстаем яе форму запісу ў выглядзе вылучанага поўнага квадрата: $y = a(x - m)^2 + n$, дзе $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Калі $a > 0$, то пры $x = m$ выраз $a(x - m)^2 + n$ прымае найменшае значэнне, роўнае n . Значыць, на відарысе парабалы існуе пункт, у якім функцыя прымае найменшае значэнне. Гэты пункт называецца **вяршыняй парабалы**, яго каардынаты $x_v = -\frac{b}{2a}$; $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рыс. 47).



Рыс. 47

Такім чынам, калі $a > 0$, то $E = [y_v; +\infty)$.

Калі $a < 0$, то пры $x = m$ выраз $a(x - m)^2 + n$ прымае **найбольшае значэнне**.

Формы запісу квадратычнай функцыі

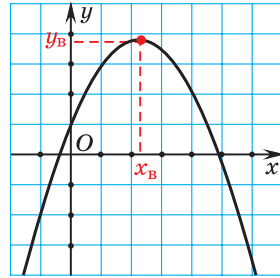
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - m)^2 + n$$

чанне, роўнае n . У гэтым выпадку на відарысе парабалы існуе пункт, у якім функцыя прымае найбольшае значэнне, ён называецца вяршыняй парабалы, яго каардынаты $x_v = -\frac{b}{2a}$; $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рыс. 48).

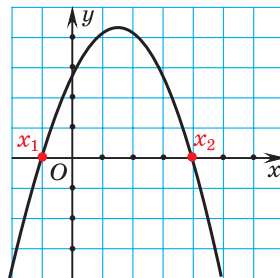
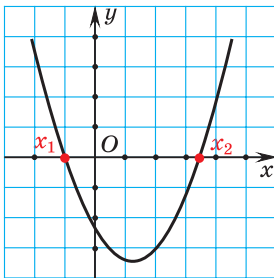
Такім чынам, калі $a < 0$, то $E = (-\infty; y_v]$.



Рыс. 48

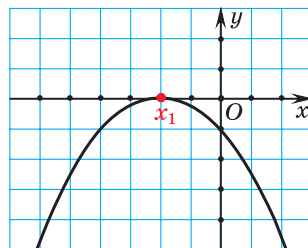
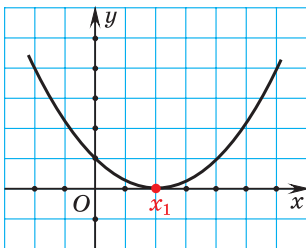
3. Нулі функцыі. Значэнні аргумента, пры якіх значэнні функцыі $y = ax^2 + bx + c$ роўны нулю, з'яўляюцца каранямі квадратнага ўраўнення $ax^2 + bx + c = 0$.

Калі квадратнае ўраўненне $ax^2 + bx + c = 0$ мае два карані x_1 і x_2 , то парабола перасякае вось абсцыс у двух пунктах з каардынатамі $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ (рыс. 49).

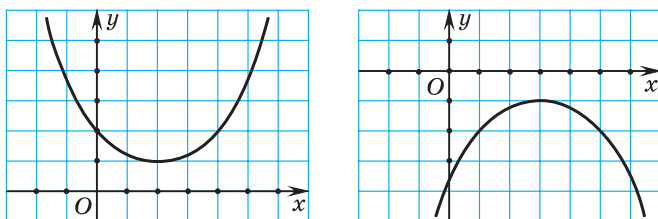


Рыс. 49

Калі квадратнае ўраўненне $ax^2 + bx + c = 0$ мае адзіны корань x_1 , то парабола мае з восью абсцыс адзіны агульны пункт з каардынатамі $(x_1; 0)$ (рыс. 50).



Рыс. 50

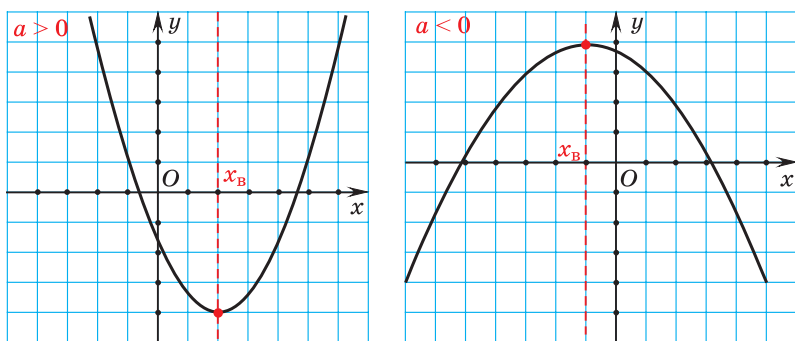


Рыс. 51

Калі квадратнае ўраўненне $ax^2 + bx + c = 0$ не мае каранёў, то парабола не мае з воссю абсцыс агульных пунктаў (рыс. 51).

4. Вось сіметрыі парабалы. Воссю сіметрыі парабалы з'яўляецца прамая, якая праходзіць праз вяршыню парабалы паралельна восі ардынат. Ураўненне восі сіметрыі $x = -\frac{b}{2a}$.

Сіметрычныя часткі графіка называюцца **галінамі парабалы**. Калі $a > 0$, то галіны парабалы накіраваны ўверх. Калі $a < 0$, то галіны парабалы накіраваны ўніз (рыс. 52).



Рыс. 52



Каб пабудаваць графік квадратычнай функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, трэба:

① Вызначыць напрамак галін парабалы.
(Калі $a > 0$, то галіны парабалы накіраваны ўверх.
Калі $a < 0$, то галіны парабалы накіраваны ўніз.)

Пабудуйце графік функцыі

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

① $a = 1 > 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўверх.

② Визначиць координаты вершины параболы:

$$x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = f(x_v).$$

Побудоваць вершину параболы і вось симетричної параболы $x = -\frac{b}{2a}$.

③ Знайди нулі функції, калі яны ёсць, і адзначыць іх на восі абсцыс.

④ Визначыць пункт перасячэння параболы з воссю ардынаты.

(Калі $x = 0$, то значэнне функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ роўна c .)

Пабудоваць пункт з координатамі $(0; c)$ і пункт, симетрычны яму адносна прамой $x = -\frac{b}{2a}$.

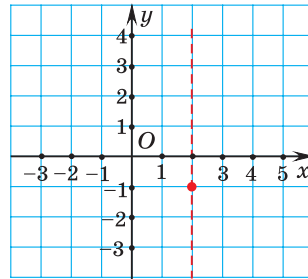
⑤ Злучыўшы адзначаныя пункты плаўнай лініяй, пабудаваць графік функцыі.

② $x_v = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2;$

$$y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

Вершыняй параболы з'яўляецца пункт з координатамі $(2; -1)$. Восцю симетрычнай параболы з'яўляецца прамая $x = 2$.

Пабудуем іх на координатнай плоскасці.

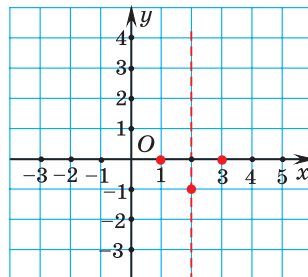


③ $x^2 - 4x + 3 = 0;$

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4,$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Адзначым нулі функцыі на восі абсцыс.

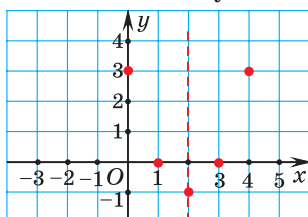


④ Калі $x = 0$, то $y = 3$.

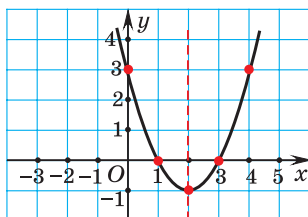
Парабола перасякае вось ардынаты ў пункце з координатамі $(0; 3)$.

Пункт з каардынатамі (4; 3) сіметрычны яму адносна восі сіметрыі парабалы.

Адзначым гэтыя пункты.



⑤



Каардынаты вяршыні парабалы

1. Вызначыце каардынаты вяршыні парабалы:

а) $y = 3(x - 1,2)^2 - 5$;

б) $y = (2x - 3)(x - 1)$;

в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.

а) Калі квадратычная функцыя запісана ў выглядзе $y = a(x - m)^2 + n$, то $x_{\text{в}} = m$; $y_{\text{в}} = n$. Для функцыі

$y = 3(x - 1,2)^2 - 5$ атрымаем $x_{\text{в}} = 1,2$; $y_{\text{в}} = -5$.

б) Запішам квадратычную функцыю ў выглядзе мнагачлена $(2x - 3)(x - 1) = 2x^2 - 5x + 3$.

Знойдзем абсцысу вяршыні парабалы: $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$.

Для знаходжання ардынаты вяршыні парабалы можна выкарыстаць формулу

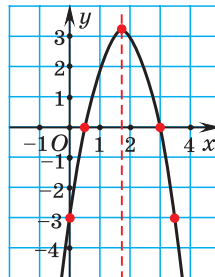
$y_{\text{в}} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, тады

$y_{\text{в}} = -\frac{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$.

	Ардынату вяршыні парабалы можна таксама знайсці, падставіўшы знойдзенае значэнне абсцысы вяршыні ў формулу функцыі: $y_{\text{в}} = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8}.$ в) $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1;$ $y_{\text{в}} = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0.$
Найбольшае і найменшае значэнні квадратичнай функцыі	
2. Знайдзіце найбольшае (найменшае) значэнне функцыі: а) $y = 3(x - 1,2)^2 - 5;$ б) $y = (2x - 3)(x - 1);$ в) $y = -2x^2 + 4x - 2.$	а) Паколькі $a = 3 > 0$, то функцыя прымае найменшае значэнне, роўнае ардынаце вяршыні парабалы, г. зн. найменшае значэнне дадзенай функцыі роўна $y_{\text{в}} = -5.$ б) Паколькі $a = 2 > 0$, то функцыя прымае найменшае значэнне, роўнае ардынаце вяршыні парабалы. Паколькі вяршыня парабалы мае каардынаты $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, то найменшае значэнне дадзенай функцыі роўна $y_{\text{в}} = -\frac{1}{8}.$ в) Паколькі $a = -2 < 0$, то функцыя прымае найбольшае значэнне, роўнае ардынаце вяршыні парабалы. Ардыната вяршыні парабалы роўна нулю, значыць, найбольшае значэнне дадзенай функцыі роўна $y_{\text{в}} = 0.$

Мноства значэнняў квадратычнай функцыі	
3. Знайдзіце мноства значэнняў квадратычнай функцыі: а) $y = 3(x - 1,2)^2 - 5$; б) $y = (2x - 3)(x - 1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Паколькі $a = 3 > 0$, то $E = [y_{\text{в}}; +\infty)$. Паколькі $y_{\text{в}} = -5$, то $E = [-5; +\infty)$. б) Паколькі $a = 2 > 0$, то $E = [y_{\text{в}}; +\infty)$. Паколькі $y_{\text{в}} = -\frac{1}{8}$, то $E = [-\frac{1}{8}; +\infty)$. в) Паколькі $a = -2 < 0$, то $E = (-\infty; y_{\text{в}}]$. Паколькі $y_{\text{в}} = 0$, то $E = (-\infty; 0]$.
Пункты перасячэння графіка функцыі з восьмі каардынат	
4. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння графіка квадратычнай функцыі з восьмі каардынат: а) $f(x) = -(x - 1,2)^2 + 25$; б) $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$; в) $p(x) = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Для вызначэння каардынат пунктаў перасячэння графіка функцыі $f(x) = -(x - 1,2)^2 + 25$ з восьсю абсцыс знойдзем нулі гэтай функцыі, г. зн. рэшым ураўненне $-(x - 1,2)^2 + 25 = 0;$ $(x - 1,2 + 5)(x - 1,2 - 5) = 0;$ $(x + 3,8)(x - 6,2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6,2, \\ x = -3,8. \end{cases}$ Для вызначэння каардынат пункта перасячэння графіка з восьсю ардынаты знойдзем значэнне функцыі пры $x = 0$ і атрымаем $f(0) = -(0 - 1,2)^2 + 25 = -1,44 + 25 = 23,56$. Адказ: $(6,2; 0); (-3,8; 0); (0; 23,56)$. б) Знойдзем нулі функцыі $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$. Выкарыстаем уласцівасць аб роўнасці здабытку нулю і атрымаем: $\begin{cases} x - 1 = 0, & \begin{cases} x = 1, \\ x + 4 = 0; \end{cases} \\ x + 4 = 0; & \begin{cases} x = -4. \end{cases} \end{cases}$

	$h(0) = 2(0 - 1)(0 + 4) = -8.$ <i>Адказ:</i> (1; 0); (-4; 0); (0; -8). в) $-2x^2 + 4x - 2 = 0,$ $x^2 - 2x + 1 = 0, \quad (x - 1)^2 = 0,$ $x = 1. \quad p(0) = -2.$ <i>Адказ:</i> (1; 0); (0; -2).
Пабудова графіка квадратичнай функцыі	
5. Пабудуйце графік функцыі $y = -2x^2 + 7x - 3.$	① $a = -2 < 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўніз. ② Каардынаты вяршыні парабалы: $x_{\text{в}} = -\frac{7}{-4} = \frac{7}{4}; \quad y_{\text{в}} = -2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{4} - 3 = 3\frac{1}{8}.$ Вось сіметрыі парабалы — прамая $x = 1\frac{3}{4}$. ③ Пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс: $2x^2 - 7x + 3 = 0; \quad D = 25,$ $x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{1}{2}; \quad (3; 0); \quad \left(\frac{1}{2}; 0\right).$ ④ Пункт перасячэння графіка з воссю ардынат: $x = 0$, $y = -3$. Пункт (3,5; -3) сіметрычны пункту (0; -3) адносна восі сіметрыі парабалы. ⑤ Пабудуем графік функцыі $y = -2x^2 + 7x - 3.$



6. Пабудуйце графік функцыі $y = (x - 3)^2 - 4$.

① $a = 1 > 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўверх.

② Каардынаты вяршыні парабалы: $x_v = 3$; $y_v = -4$.

Вось сіметрыі парабалы — прамая $x = 3$.

③ Пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс:

$$(x - 3)^2 - 4 = 0;$$

$$(x - 3 + 2)(x - 3 - 2) = 0;$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0;$$

$$x_1 = 1; x_2 = 5; (1; 0); (5; 0).$$

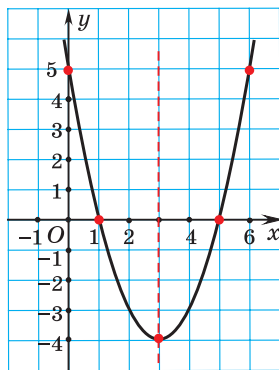
④ Пры $x = 0$

$$y = (0 - 3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5.$$

Графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце $(0; 5)$.

Пункт $(6; 5)$ сіметрычны пункту $(0; 5)$ адносна восі сіметрыі парабалы.

⑤ Пабудуем графік функцыі $y = (x - 3)^2 - 4$.



7. Пабудуйце графік функцыі $y = 0,5x^2 - 2$.

① $a = 0,5 > 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўверх.

② Каардынаты вяршыні парабалы: $x_v = -\frac{0}{1} = 0$;

$$y_v = 0,5 \cdot 0^2 - 2 = -2.$$

Восью сіметрії парабалы з'яўляецца прамая $x = 0$, г. зн. вось ардынаты.

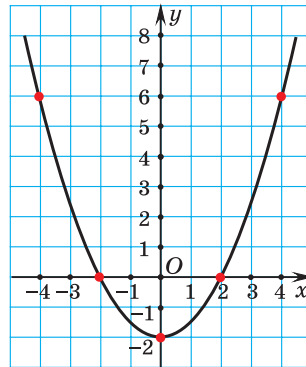
③ Пункты перасячэння графіка з восью абсцыс:

$$0,5x^2 - 2 = 0, \quad x^2 - 4 = 0, \\ x_1 = 2; \quad x_2 = -2; (2; 0); (-2; 0).$$

④ Пункт перасячэння графіка з восью ардынаты $(0; -2)$.

⑤ Знайдзем каардынаты некалькіх дадатковых пунктаў: $(4; 6)$; $(-4; 6)$.

Пабудуем графік функцыі $y = 0,5x^2 - 2$.



8. Пабудуйце графік функцыі $y = -4x^2$.

① $a = -4 < 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўніз.

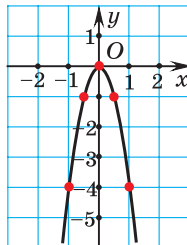
② Каардынаты вяршыні парабалы: $x_v = -\frac{0}{-8} = 0$;
 $y_v = -4 \cdot (0)^2 = 0$.

Вось сіметрыі парабалы $x = 0$ — вось ардынаты.

③ Нулі функцыі: $-4x^2 = 0$, $x = 0$.

④ Пункт перасячэння графіка з восью ардынаты $(0; 0)$.

⑤ Знайдемо координати небагатьох додаткових пунктів: $(1; -4); (-1; -4); (0,5; -1); (-0,5; -1)$. Побудуємо графік функції $y = -4x^2$.



1. Яка з наступних функцій не з'являється квадратичною:

а) $f(x) = (3x - 2) + (5x + 4)$;

б) $g(x) = (3x + 1)(5x + 4)$;

в) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$?

2. Дадені три функції: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$; $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ і $h(x) = 2(x - 1)(x + 3)$. Ці правда, що f , g , h — три форми запису одної і той же функції?



3.4. Використавши означення квадратичної функції, серед даних функцій виберіть квадратичні:

а) $y = -x^2 + 7x - 2$;

б) $y = 5x^2 + x$;

в) $y = -2x^2 + 9$;

г) $y = -x + 7$;

д) $y = 5x^2$;

е) $y = x^3 + 3x^2$.

3.5. Для кожної з квадратичних функцій визначте, у якій формі вона записана:

а) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$;

б) $f(x) = (x + 1)(x - 5)$;

в) $f(x) = 7(x - 2)^2 + 8$;

г) $f(x) = -2x^2 + 7x - 1$;

д) $f(x) = (9 - x)(3x + 4)$;

е) $f(x) = -4(x + 1)^2 - 5$.

3.6. Виберіть рівняння парабол, графіки яких накривані ўніз:

а) $y = 3x^2 - x - 2$;

б) $y = -2x^2 + 4x - 1$;

в) $y = -x^2 + 10x$;

г) $y = 9 - x^2$;

д) $y = 0,1x^2$;

е) $y = 4x^2 - 1$.

Приведіть кілька прикладів функцій, графіками яких з'являються параболы, графіки яких накривані ўверх.

3.7. Визначьте, якім параболом належить пункт з координатами (1; 4):

- а) $y = x^2 - x - 4$; б) $y = -3(x + 1)^2 + 16$;
 в) $y = (x - 2)(x - 5)$; г) $y = -x^2 + 3$.

3.8. Для квадратичної функції, заданої формулою $f(x) = x^2 - 5x + 1$, знайдіть:

- а) $f(1)$; б) $f(-3)$; в) $f(0)$.

3.9. Для квадратичної функції, заданої формулою $g(x) = -0,25x^2 + 3$, парафуйте:

- а) $g(-2)$ і $g(4)$; б) $g(-0,5)$ і $g(0,5)$;
 в) $g(-2\sqrt{3})$ і $g(\sqrt{6})$; г) $g(-2\sqrt{5})$ і $g(2\sqrt{5})$.

3.10. Для квадратичної функції $f(x) = x^2 - 4x + 9$ знайдіть значення аргумента, при яких:

- а) $f(x) = 9$; б) $f(x) = 6$; в) $f(x) = 21$.

3.11. Визначте, ці існують значення аргумента, при яких квадратична функція:

- а) $y = x^2 - 4x + 7$ приймає значення, роїнає 4;
 б) $y = -2x^2 + 6$ приймає значення, роїнає 9;
 в) $y = 5x^2 - x + 1$ приймає значення, роїнає 1.

3.12. Для парабол, показаних на рисунку 53, записуйте:

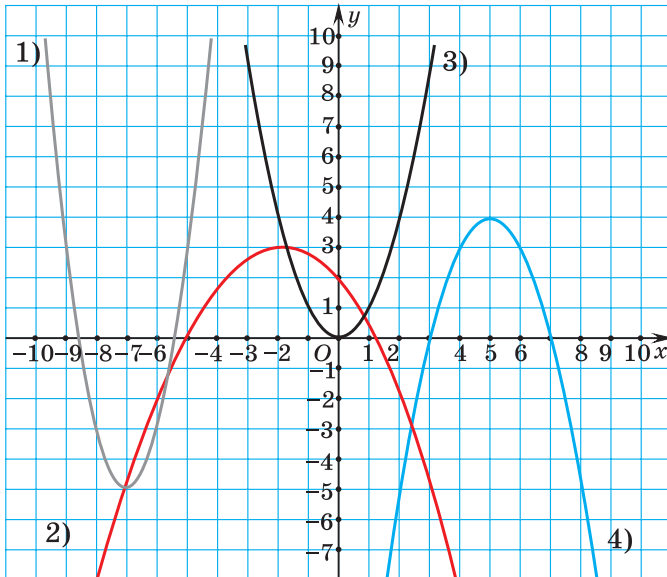


Рис. 53

а) напрамак галін; б) каардынаты вяршыні; в) ураўненне восі сіметрыі; г) найбольшае (найменшае) значэнне; д) мноства значэнняў.

3.13. Вызначыце напрамак галін і каардынаты вяршыні парабалы:

а) $y = (x - 2)^2 + 3$;

б) $y = 4(x + 1)^2 - 6$;

в) $y = -(x - 5)^2 - 8$;

г) $y = -7(x + 9)^2$;

д) $y = 2x^2 + 5$;

е) $y = -8x^2$.

3.14. Прывядзіце па два прыклады ўраўненняў парабал, вяршынямі якіх з'яўляюцца пункты:

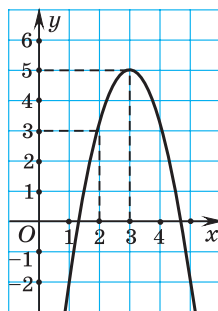
а) (3; 8);

б) (-8; -6);

в) (0; -3);

г) (5; 0).

3.15. Графік функцыі $f(x) = a(x - m)^2 + n$ паказаны на рысунку 54. Выкарыстаўшы графік, знайдзіце a , m і n . Запішыце функцыю $y = f(x)$ у выглядзе мнагачлена.



Рыс. 54

3.16. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы і запішыце ўраўненне яе восі сіметрыі:

а) $y = 2x^2 - 4x + 1$;

б) $y = 2x^2 + 4x$;

в) $y = -0,5x^2 - 4x + 1$;

г) $y = -x^2 + 4x - 7$.

3.17. Вызначыце, у якой каардынатнай чвэрці знаходзіцца вяршыня парабалы:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 7$;

б) $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$;

в) $f(x) = 4x^2 + 4x - 5$;

г) $f(x) = -3x^2 - 12x$.

Запішыце ўраўненне восі сіметрыі для кожнай парабалы.

3.18. Запішыце квадратычную функцыю $y = (x - 4)(x + 2)$ у выглядзе мнагачлена і знайдзіце ардынату вяршыні парабалы, якая з'яўляецца графікам дадзенай функцыі.

3.19. Знайдзіце найменшае (найбольшае) значэнне функцыі:

а) $y = (x - 8)^2 + 9$;

б) $y = -4(x + 1)^2 + 5$;

в) $y = 2x^2 - 6x + 4$;

г) $y = -x^2 + 4x - 3$;

д) $y = (x + 8)(x - 4)$;

е) $y = -3(x - 1)(x + 5)$.

3.20. Прывядзіце два прыклады квадратычных функцый:

а) найменшым значэннем якіх з'яўляецца лік 7;

б) найбольшым значэннем якіх з'яўляецца лік 15.

3.21. Знайдіть абсяг визначення і мноства значенняў функцыі:

а) $f(x) = 7(x + 6)^2 - 1$;

б) $f(x) = -(x - 4)^2 + 2$;

в) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;

г) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$;

д) $f(x) = -(x - 6)(x + 2)$;

е) $f(x) = 2(x + 4)(x + 8)$.

3.22. Визначыце каардынаты пунктаў, у якіх графік функцыі перасякае восі каардынат:

а) $y = (x - 8)(x + 3)$;

б) $y = -2x^2 + 5x - 2$;

в) $y = (x + 7)^2 - 4$;

г) $y = x^2 - 9$.

3.23. Сярод квадратичных функцый выберыце функцыі, якія не маюць нулёў:

а) $y = (x + 1)(x - 6)$;

б) $y = x^2 + x + 3$;

в) $y = -(x - 5)^2 + 1$;

г) $y = x^2 + 4$.

3.24. Пабудуйце графік квадратичнай функцыі:

а) $y = x^2 - 2x - 8$;

б) $y = -x^2 + 5x - 6$;

в) $y = 2x^2 - 8x + 6$;

г) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5$.

3.25. Пабудуйце графік квадратичнай функцыі і знайдзіце мноства яе значенняў:

а) $f(x) = x^2 - 6x$;

б) $f(x) = -x^2 + 9$;

в) $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$;

г) $f(x) = -3x^2$.

3.26. Пабудуйце графік квадратичнай функцыі:

а) $y = (x - 1)^2 - 4$;

б) $y = -2(x + 3)^2 + 8$;

в) $y = (x - 5)(x + 1)$;

г) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 7)$.

Ці можна вызначыць вось сіметрыі парабалы, не выконваючы пабудову графіка?

3.27. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = -x^2$.

Прааналізуйце атрыманыя вынікі і зрабіце вывад.

3.28. На рысунку 55 паказаны графік адной з функцый:

а) $y = -x^2 - 2x + 2$;

б) $y = -x^2 + 2x + 3$;

в) $y = -x^2 + x + 2$;

г) $y = -x^2 + 2x + 2$.

Визначыце, графік якой функцыі паказаны на рысунку. Растлумачце свой выбар.

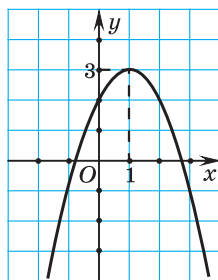
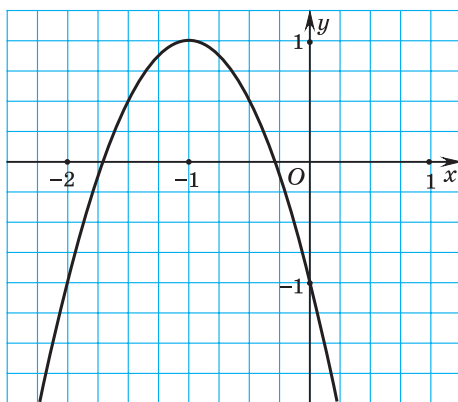


Рис. 55



Рыс. 56

3.29. Пабудуйце графік квадратычнай функцыі і вызначыце, колькі каранёў мае ўраўненне $f(x) = 2$:

- а) $f(x) = x^2 - 8x + 7$; б) $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$;
 в) $f(x) = x^2 + 4x + 6$; г) $f(x) = -x^2 + 4x$;
 д) $f(x) = (x - 3)^2$; е) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

3.30. Графік функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ паказаны на рысунку 56. Выкарыстаўшы графік:

- а) вызначыце $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$; б) знайдзіце a , b і c .

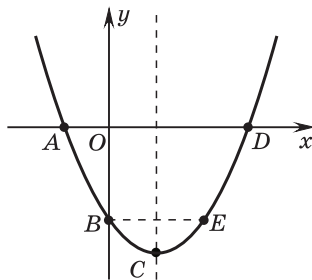
3.31. Для таго каб абгарадзіць прамавугольны ўчастак для пасадкі агародніны, было куплена 24 м сеткі. Плошча ўчастка S з'яўляецца функцыяй ад даўжыні адной з яго старон x . Задайце гэту функцыю формулай. Знайдзіце, пры якім значэнні аргумента функцыя прымае найбольшае значэнне.

3.32. На рысунку 57 паказаны графік квадратычнай функцыі $y = 0,5x^2 - 2x - 2,5$. Вызначыце каардынаты пунктаў A , B , C , D , E .

3.33. Пабудуйце графікі функцый і знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння гэтых графікаў:

- а) $y = x^2 - 6x + 5$ і $y = -x + 1$;
 б) $y = x^2 - 4$ і $y = -x + 2$;
 в) $y = -x^2 + 4x - 5$ і $y = -2$.

Праверце атрыманыя вынікі.



Рыс. 57

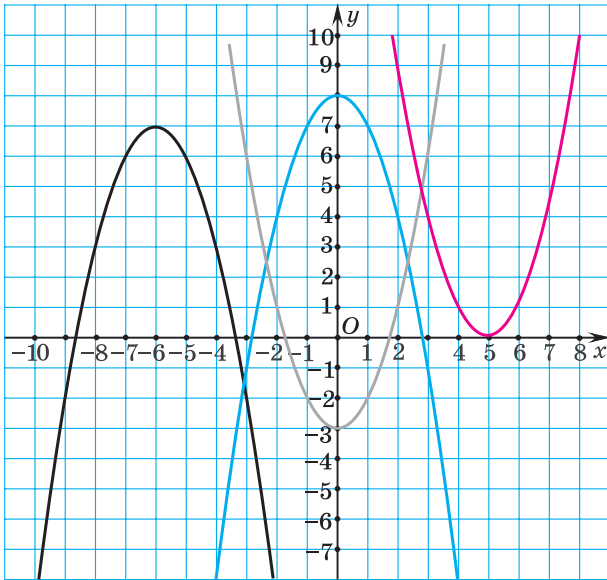


Рис. 58

3.34. Визначьте, графіка якої з даних функцій на рисунку 58:

- а) $y = x^2 - 3$; б) $y = -(x + 6)^2 + 7$; в) $y = (x - 5)^2$;
 г) $y = -(x - 6)^2 + 7$; д) $y = -x^2 + 8$.

3.35. Побудуйте графіки квадратичних функцій $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$ і $g(x) = (x + 3)^2 - 4$. Визначте, ці мають параболы агульні пункты. Ці можна гэта вызначыць, не выконваючы пабудову графікаў?

3.36. На рисунку 59 паказаны графікі функцій $f(x) = 3x^2 + 24x + c$ і $g(x) = -x^2 + bx - 18$. Выкарыстаўшы даныя рысунка: а) знайдзіце лікі b і c ; б) вызначце агульную ўласцівасць для двох парабол; в) рашыце графічна ўраўненне $f(x) = g(x)$.

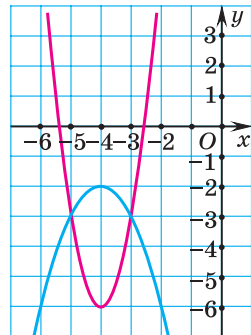


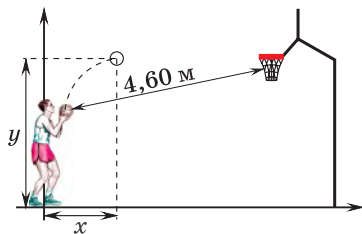
Рис. 59

3.37. Знайдзіце значэнне ліку b , пры якім графікі функцій $y = -3x + b$ і $y = (x - 3)(x - 7)$ перасякаюцца ў пункце, які належыць восі ардынат.

3.38. Вызначыце, пры якіх значэннях m і n вяршыня парабалы $y = a(x - m)^2 + n$:

- належыць восі ардынаты;
- належыць восі абсцысы;
- знаходзіцца ў пачатку каардынаты.

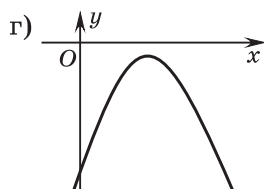
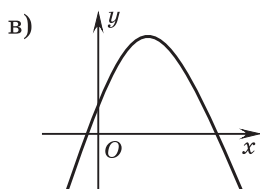
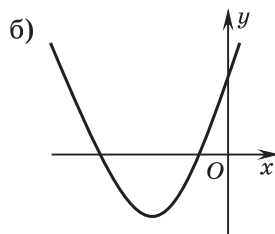
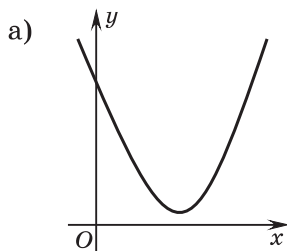
3.39. Падчас штрафнога кідка ў баскетболе мяч знаходзіўся прыкладна за 4,60 м ад цэнтра кашы, размешчанага на вышыні 3,05 м ад падлогі. Гулец кінуў мяч ад узроўню плеч, а гэта прыблізна 1,65 м ад падлогі (рыс. 60). Мяркуецца, што крывой, апісанай у прасторы мячом, з'яўляецца парабала $y = -0,5x^2 + 1,95x + 1,65$, дзе x — адлегласць па гарызанталі ад гульца да мяча, y — вышыня, на якой знаходзіцца мяч. Ці можна сцвярджаць, што гулец здолеў закінуць мяч у кош? Якая максімальная вышыня дасягнута мячом?



Рыс. 60

Ці ведаеце вы, што сярод выхаванцаў беларускай школы баскетбола ёсць гульцы сусветнага ўзроўню? Напрыклад, Таццяна Івінская ў складзе жаночай баскетбольнай зборнай на XXII Летніх Алімпійскіх гульнях 1980 года ў Маскве стала алімпійскай чэмпіёнкай. Якіх яшчэ выдатных беларускіх баскетбалістаў вы ведаеце?

3.40. На рысунку 61 паказаны відарысы графікаў парабал $y = ax^2 + bx + c$. Вызначыце знакі каэфіцыентаў a , b і c , знак дыскрымінанта адпаведнага квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$ для кожнай з парабал.



Рыс. 61

3.41. Покажите схематично відарыс графіка квадратичнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$, калі:

а) $a > 0, c > 0, D > 0, -\frac{b}{2a} < 0$; б) $a < 0, D = 0, -\frac{b}{2a} > 0$;

в) $a > 0, D < 0, -\frac{b}{2a} < 0$; г) $a < 0, D > 0, -\frac{b}{2a} > 0$,

дзе D — дыскрымінант квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$.

3.42. Знайдзіце абсцысу вяршыні парабалы, калі вядома, што нулямі функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, з'яўляюцца лікі:

а) -11 і 13 ; б) $-3 + 2\sqrt{5}$ і $25 - 2\sqrt{5}$.

3.43. Графік квадратичнай функцыі $y = -x^2 + 8x + c$ праходзіць праз пункт $A(9; 0)$. Знайдзіце:

- а) каардынаты вяршыні парабалы;
- б) вось сіметрыі парабалы;
- в) найбольшае значэнне функцыі;
- г) нулі функцыі.

3.44. Знайдзіце значэнні c , пры якіх графік квадратичнай функцыі $y = x^2 + 10x + c$:

- а) мае з воссю абсцыс толькі адзін агульны пункт;
- б) перасякае вось ардынаты у пункце $A(0; -7)$;
- в) праходзіць праз пачатак каардынаты;
- г) не мае з воссю абсцыс агульных пунктаў.

3.45. Графік квадратичнай функцыі $f(x) = 2x^2 + bx + 4$ праходзіць праз пункт $B(-1; -12)$. Знайдзіце:

- а) каардынаты вяршыні парабалы;
- б) вось сіметрыі парабалы;
- в) мноства значэнняў функцыі;
- г) нулі функцыі.

3.46. Знайдзіце значэнні b , пры якіх графік квадратичнай функцыі $y = -x^2 + bx - 9$:

- а) мае з воссю абсцыс толькі адзін агульны пункт;
- б) сіметрычны адносна восі ардынаты;
- в) перасякае вось абсцыс у пунктах, сіметрычных адносна прамой $x = 5$.

 **3.47.** На рысунку 62 паказаны графік функцыі $y = 3x^2 + bx + c$. Выкарыстаўшы даныя рысунка, знайдзіце b і c .

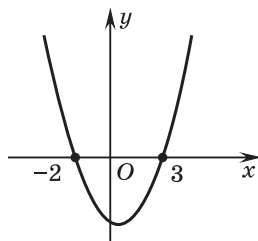


Рис. 62

 **3.48.** Нулямі квадратычнай функцыі $y = -4x^2 + bx + c$ з'яўляюцца лікі -1 і 3 . Знайдзіце:

- а) каардынаты вяршыні парабалы;
- б) вось сіметрыі парабалы;
- в) мноства значэнняў функцыі.

 **3.49.** Прамая $x = 2$ з'яўляецца воссю сіметрыі парабалы $f(x) = -x^2 + (a^2 + 4)x + 2$. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы.



3.50. Выберыце функцыі, графікамі якіх з'яўляюцца парабалы, галіны якіх накіраваны ўверх:

- а) $y = 5x^2 - x + 2$; б) $y = 5x - 1$;
- в) $y = -x^2 + 12$; г) $y = 9x^2 + x$.

3.51. Выберыце пункт, які належыць графіку квадратычнай функцыі $y = 4x^2 - 3x + 1$:

- а) $(1; -1)$; б) $(4; -3)$; в) $(0; -3)$; г) $(-2; 23)$.

3.52. Квадратычная функцыя зададзена формулай $f(x) = x^2 + 6x + 3$. Знайдзіце:

- а) $f(2)$; б) $f(-1)$; в) значэнні аргумента, пры якіх $f(x) = -5$.

3.53. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:

- а) $y = (x + 5)^2 - 4$; б) $y = -2(x - 8)^2 + 1$;
- в) $y = -x^2 + 6$; г) $y = 7(x - 1)^2$.

Запішыце вось сіметрыі для кожнай парабалы.

3.54. Выберыце парабалу, вяршыняй якой з'яўляецца пункт з каардынатамі $(-3; 5)$:

- а) $f(x) = x^2 - 6x + 14$; б) $f(x) = 2x^2 + 12x + 28$;
- в) $f(x) = -2x^2 - 12x - 13$; г) $f(x) = -3x^2 + 5$.

3.55. Знайдзіце найменшае (найбольшае) значэнне квадратычнай функцыі:

- а) $y = 3(x + 1)^2 - 7$; б) $y = -x^2 - 6x - 2$;
- в) $y = (x - 1)(x + 3)$; г) $y = -2x^2 + 10$.

3.56. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў квадратычнай функцыі:

- а) $f(x) = -(x - 5)^2 + 8$; б) $f(x) = x^2 - 8x + 3$;
- в) $f(x) = 4(x + 5)(x - 7)$; г) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

3.57. Визначте координати пункту, у яких графік квадратичної функції пересікає осі координат:

а) $y = (x + 2)(x - 8)$;

б) $y = -x^2 + 8x - 7$;

в) $y = -(x - 6)^2 + 9$;

г) $y = x^2 + 1$.

3.58. Побудуйте графік квадратичної функції:

а) $y = x^2 + 4x + 3$;

б) $y = -x^2 + 6x - 5$.

3.59. Побудуйте графік квадратичної функції і знайдіть множення значення:

а) $f(x) = -x^2 + 4x$;

б) $f(x) = x^2 - 1$;

в) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$;

г) $f(x) = 2x^2$.

3.60. Побудуйте графік квадратичної функції:

а) $y = (x + 5)^2 - 9$;

б) $y = -(x - 2)(x + 4)$.

Запишіть рівняння осі симетрії кожної з атриманих парабол.

3.61. Побудуйте графік квадратичної функції:

а) $y = (x - 4)(x + 2)$;

б) $y = 4x - x^2$;

в) $y = 3x^2 + 6x + 4$;

г) $y = -(x - 2)^2$.

Для кожної параболы визначте, чи пересікає парабала графік функції $y = -9$, і калі пересікає, то ў кількіх пунктах.

3.62. На рисунку 63 показаны графік функції $y = -2x^2 + 7x + 9$. Визначте координати пункту A і B .

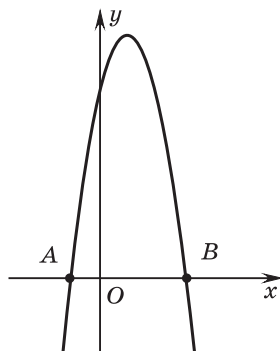


Рис. 63

3.63. Побудуйте графіки функцій і знайдіть координати пункту пересічення гэтых графікаў:

а) $y = x^2 - 2x - 8$ і $y = 2x - 3$;

б) $y = -x^2 + 6x$ і $y = 9$.

3.64. На рисунку 64 показаны графік адной з функцій:

а) $y = x^2 - 3x$;

б) $y = x^2 - 2x - 2$;

в) $y = x^2 - 2$;

г) $y = x^2 + 2x - 2$.

Визначте, графік якой функції показаны на рисунку. Растлумачце свой выбар.

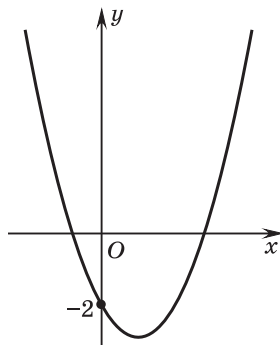


Рис. 64

3.65. Пабудуйце графікі функцый $f(x) = -(x + 4)^2 + 9$ і $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, вызначыце, ці маюць парабалы агульныя пункты.

3.66. Прадпрымальнік шые ад 0 да 50 вырабаў за дзень і лічыць, што ўзровень выдаткаў (у рублях) на вытворчасць x вырабаў задаецца пры дапамозе функцыі $C(x) = x^2 - 10x + 500$. Няхай $R(x)$ — выручка ад продажу x вырабаў, кожны з якіх каштуе 50 р.

а) Выразіце залежнасць $R(x)$.

б) Разлічыце выдаткі, выручку і прыбытак пры продажы 20 швейных вырабаў.

в) Дакажыце, што велічыня прыбытку задаецца пры дапамозе функцыі $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

г) Знайдзіце максімальна выгадную для продажу колькасць створаных вырабаў.

3.67. Пункт $M(2; 47)$ належыць графіку квадратычнай функцыі $y = -x^2 + bx + 7$. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі.

3.68. На рысунку 65 паказаны графік квадратычнай функцыі $y = x^2 + bx + c$. Выкарыстаўшы даныя рысунка, знайдзіце b і c .

3.69. Пакажыце схематычна відарыс графіка квадратычнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$, калі:

а) $a > 0, c < 0, D > 0, -\frac{b}{2a} > 0$;

б) $a > 0, D = 0, -\frac{b}{2a} < 0$;

в) $a < 0, D < 0, -\frac{b}{2a} > 0$,

дзе D — дыскрымінант квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$.

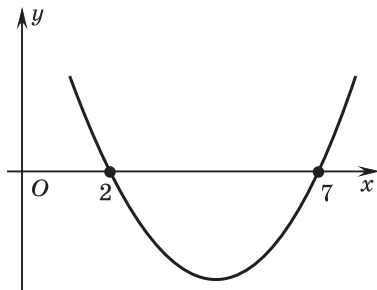
 **3.70.** Нулямі квадратычнай функцыі $y = 3x^2 + bx + c$ з'яўляюцца лікі -4 і 5 . Знайдзіце:

а) каардынаты вяршыні парабалы;

б) вось сіметрыі парабалы;

в) найменшае значэнне функцыі.

 **3.71.** Прамая $x = 1$ з'яўляецца воссю сіметрыі парабалы $f(x) = 4x^2 + (a^2 - 8)x + 2$. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы.



Рыс. 65



3.72. Выкарыстайце формулы скарачанага множання і вылічыце: $\frac{48^2 - 12^2}{89^2 + 31^2 + 89 \cdot 62}$.

3.73. Знайдзіце значэнне выразу $b^3 - 4b^{-2}$, калі $b = -2$.

3.74. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $5a + 5b - 8$, калі $-a - b = 3$;

б) $x + 1 - 6y$, калі $-x + 6y = 8$.

3.75. Спрасціце выраз $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - 2$ пры $x < 1$.

3.76. Даўжыня экватара складае каля 40 076 км. Выразіце даўжыню экватара ў метрах, запішыце атрыманы лік у стандартным выглядзе і вызначыце парадак ліку.

3.77. Запішыце ў выглядзе здабытку:

а) $m^3 + mn^2 + 13m^2n + 13n^3$;

б) $a^2b^2 + 5a^2b - 5ab - ab^2$.

3.78. Рашыце сістэму няроўнасцей
$$\begin{cases} \frac{3x - 13}{4} \leq \frac{x - 1}{4} - \frac{7}{8}, \\ 2 \geq \frac{x}{4} + \frac{3 - 2x}{3}. \end{cases}$$

3.79. Кліент аператара мабільнай сувязі выбірае адзін з двух тарыфаў. Абодва тарыфы прадугледжваюць штомесячную абаненцкую плату і аплату кожнай хвіліны размовы. Па тарыфе *A* трэба плаціць 15 р. за месяц і 10 к. за хвіліну. Па тарыфе *B* — 10 р. за месяц і 15 к. за хвіліну. Які тарыф больш выгадны, калі кліент плануе размаўляць па тэлефоне:

а) 80 хвілін за месяц;

б) 150 хвілін за месяц?

Колькі хвілін за месяц трэба размаўляць, каб выніковая сума была аднолькавай для абодвух тарыфаў?

3.80. Спрасціце выраз

$$(\sqrt{21} + \sqrt{14} - 2\sqrt{35}) \cdot \frac{1}{7}\sqrt{7} + \sqrt{20}.$$

3.81. (Задача Л. Эйлера.) Некаторы чыноўнік купіў коней і быкоў за 1770 талераў. За кожнага каня ён заплаціў па 31 талер, за кожнага быка — па 21 талер. Колькі коней і колькі быкоў купіў чыноўнік?