

Раздзел 3

КВАДРАТЫЧНАЯ ФУНКЦЫЯ

§ 13. Квадратычная функцыя і яе ўласцівасці



3.1. Запішыце выраз у выглядзе мнагачлена:

- а) $5(x-1)(x-4)$;
- б) $-2(x-4)(x+2)$;
- в) $(x-1,5)^2 - 2,5$;
- г) $2(x-1)^2 + 3$.

3.2. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння графіка функцыі з воссю абсцыс і воссю ардынат:

- а) $y = 4x - 5$;
- б) $y = -x + 5$.

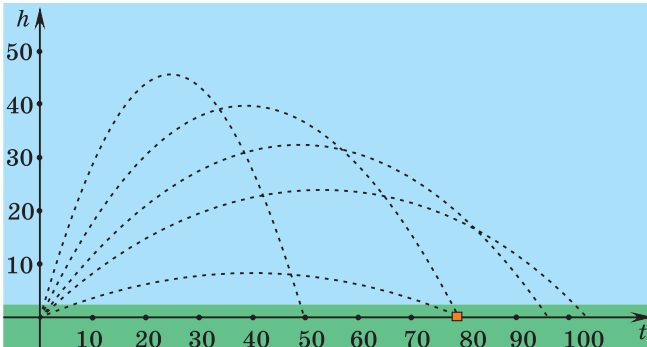
3.3. Знайдзіце:

- а) найбольшае значэнне выразу $-2(x-1)^2 + 3$;
- б) найменшае значэнне выразу $(x-1,5)^2 - 2,5$.



Функцыі дазваляюць апісваць працэсы з розных галін навукі і жыцця. Напрыклад, траекторыя цела, кінутага пад вуглом да гарызонту, апісваецца функцыяй, графік якой (рыс. 44) называецца **парабалай** (ад грэч. *παραβολή* — *para* — побач і *бала* — кідаю).

Траекторыяй мяча, кінутага баскетбалістам (рыс. 45), або кап'я, якое кінуў лёгкаатлет, калі не ўлічваць супраціўленне паветра, з'яўляецца парабала.



Рыс. 44

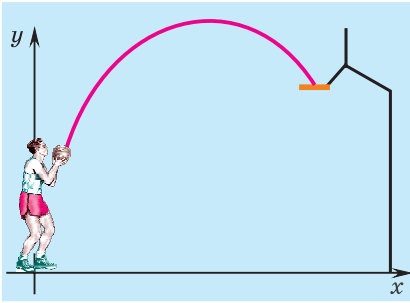


Рис. 45

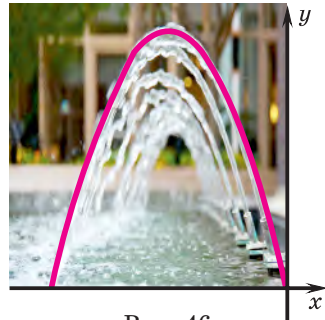


Рис. 46

Па парабале рухаюцца кроплі вады ў струмені фантана (рис. 46).

Усе разгледжаныя працэсы апісваюцца функцыямі выгляду $y = ax^2 + bx + c$, графікамі якіх з'яўляюцца парабалы.

Азначэнне

Функцыя выгляду $y = ax^2 + bx + c$, дзе a , b і c — некаторыя лікі, прычым $a \neq 0$, называецца **квадратичнай**.

Напрыклад, функцыі $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2 + 6x$ — квадратичныя.

Разгледзім уласцівасці квадратичнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$ і спосаб пабудовы яе графіка — парабалы.

Як вядома, квадратны трохчлен $ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, можна раскласці на множнікі, г. зн. запісаць у выглядзе $a(x - x_1)(x - x_2)$, дзе x_1 і x_2 — яго карані.

Таксама квадратны трохчлен $ax^2 + bx + c$ можна запісаць у выглядзе $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n$, дзе $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.



Такім чынам, квадратичную функцыю можна запісаць у выглядзе:

1) мнагачлена

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ дзе } a \neq 0;$$

2) раскладання на множнікі (калі карані адпаведнага квадратнага трохчлена існуюць)

$$y = a(x - x_1)(x - x_2);$$

3) вылучанага поўнага квадрата

$$y = a(x - m)^2 + n.$$

Напрыклад, квадратычную функцыю $y = 4x^2 - 24x + 20$ можна запісаць у наступных формах:

- $y = 4x^2 - 24x + 20$ — у выглядзе мнагачлена;
- $y = 4(x - 1)(x - 5)$ — у выглядзе раскладання на множнікі;

- $y = 4(x - 3)^2 - 16$ — у выглядзе вылучанага поўнага квадрата.

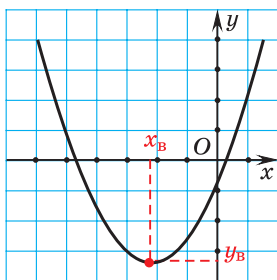
Для даследавання ўласцівасцей квадратычнай функцыі і пабудовы яе графіка будзем карыстацца рознымі формамі яе запісу.

Уласцівасці квадратычнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$

1. Абсяг вызначэння функцыі. Паколькі $ax^2 + bx + c$ — мнагачлен, то абсягам вызначэння квадратычнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, з'яўляюцца ўсе рэчаісныя лікі, г. зн. $D = \mathbf{R}$. Графічна гэта азначае, што для любога значэння абсцысы знойдзецца адпаведны пункт на парабале.

2. Мноства значэнняў функцыі. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі. Для знаходжання мноства значэнняў квадратычнай функцыі выкарыстаем яе форму запісу ў выглядзе вылучанага поўнага квадрата: $y = a(x - m)^2 + n$, дзе $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Калі $a > 0$, то пры $x = m$ выраз $a(x - m)^2 + n$ прымае найменшае значэнне, роўнае n . Значыць, на відарысе парабалы існуе пункт, у якім функцыя прымае найменшае значэнне. Гэты пункт называецца **вяршыняй парабалы**, яго каардынаты $x_v = -\frac{b}{2a}$; $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рыс. 47).



Рыс. 47

Такім чынам, калі $a > 0$, то $E = [y_v; +\infty)$.

Калі $a < 0$, то пры $x = m$ выраз $a(x - m)^2 + n$ прымае **найбольшае значэнне**.

Формы запісу квадратычнай функцыі

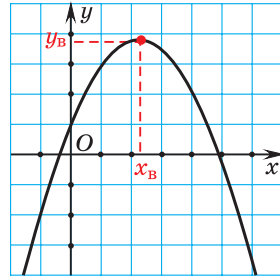
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - m)^2 + n$$

чанне, роўнае n . У гэтым выпадку на відарысе парабалы існуе пункт, у якім функцыя прымае найбольшае значэнне, ён называецца вяршыняй парабалы, яго каардынаты $x_v = -\frac{b}{2a}$; $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рыс. 48).

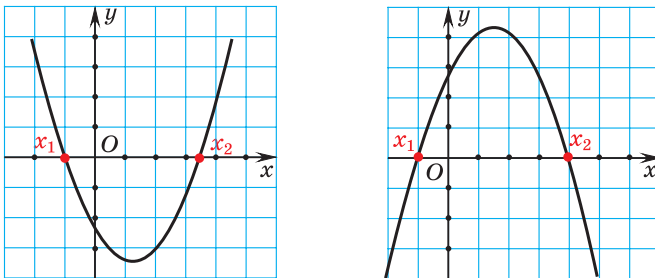
Такім чынам, калі $a < 0$, то $E = (-\infty; y_v]$.



Рыс. 48

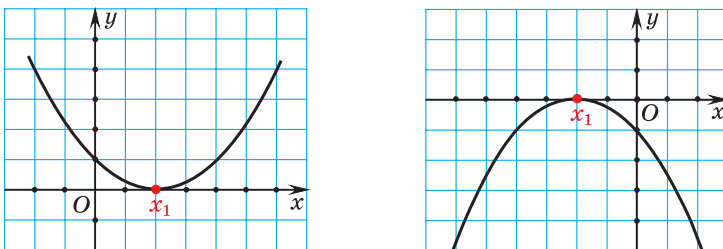
3. Нулі функцыі. Значэнні аргумента, пры якіх значэнні функцыі $y = ax^2 + bx + c$ роўны нулю, з'яўляюцца каранямі квадратнага ўраўнення $ax^2 + bx + c = 0$.

Калі квадратнае ўраўненне $ax^2 + bx + c = 0$ мае два карані x_1 і x_2 , то парабола перасякае вось абсцыс у двух пунктах з каардынатамі $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ (рыс. 49).

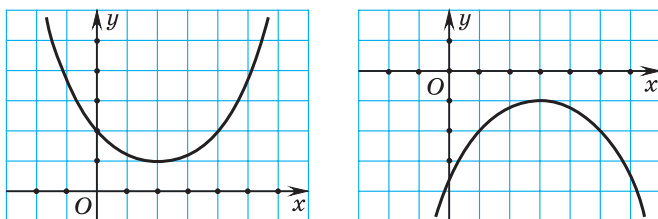


Рыс. 49

Калі квадратнае ўраўненне $ax^2 + bx + c = 0$ мае адзіны корань x_1 , то парабола мае з воссю абсцыс адзіны агульны пункт з каардынатамі $(x_1; 0)$ (рыс. 50).



Рыс. 50

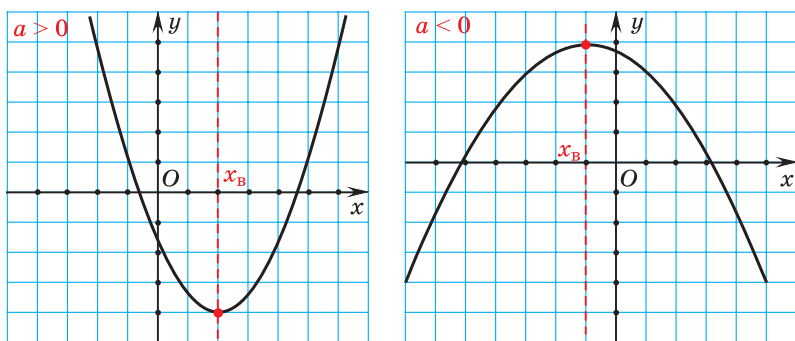


Рыс. 51

Калі квадратнае ўраўненне $ax^2 + bx + c = 0$ не мае каранёў, то парабола не мае з воссю абсцыс агульных пунктаў (рыс. 51).

4. Вось сіметрыі парабалы. Воссю сіметрыі парабалы з'яўляецца прамая, якая праходзіць праз вяршыню парабалы паралельна восі ардынат. Ураўненне восі сіметрыі $x = -\frac{b}{2a}$.

Сіметрычныя часткі графіка называюцца **галінамі парабалы**. Калі $a > 0$, то галіны парабалы накіраваны ўверх. Калі $a < 0$, то галіны парабалы накіраваны ўніз (рыс. 52).



Рыс. 52



Каб пабудаваць графік квадратычнай функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, трэба:

① Вызначыць напрамак галін парабалы.
(Калі $a > 0$, то галіны парабалы накіраваны ўверх.
Калі $a < 0$, то галіны парабалы накіраваны ўніз.)

Пабудуйце графік функцыі

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

① $a = 1 > 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўверх.

② Визначиць координаты вершины параболы:

$$x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = f(x_v).$$

Побудоваць вершину параболы і вось симетричної параболы $x = -\frac{b}{2a}$.

③ Знайди нулі функції, калі яны ёсць, і адзначыць іх на восі абсцыс.

④ Визначыць пункт перасячэння параболы з воссю ардынаты.

(Калі $x = 0$, то значэнне функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ роўна c .)

Пабудоваць пункт з координатамі $(0; c)$ і пункт, симетрычны яму адносна прамой $x = -\frac{b}{2a}$.

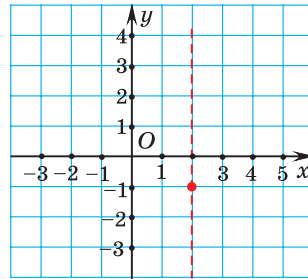
⑤ Злучыўшы адзначаныя пункты плаўнай лініяй, пабудаваць графік функцыі.

$$② x_v = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2;$$

$$y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

Вершыняй параболы з'яўляецца пункт з координатамі $(2; -1)$. Восцю симетрычнай параболы з'яўляецца прамая $x = 2$.

Пабудуем іх на координатнай плоскасці.

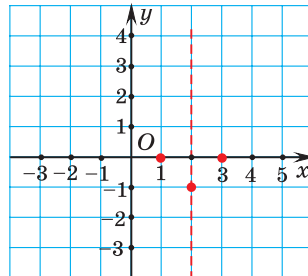


$$③ x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4,$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3, x_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Адзначым нулі функцыі на восі абсцыс.

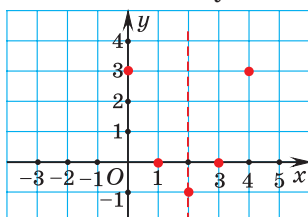


$$④ \text{ Калі } x = 0, \text{ то } y = 3.$$

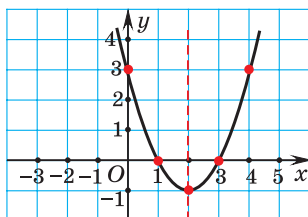
Парабола перасякае вось ардынаты ў пункце з координатамі $(0; 3)$.

Пункт з каардынатамі (4; 3) сіметрычны яму адносна восі сіметрыі парабалы.

Адзначым гэтыя пункты.



⑤



Каардынаты вяршыні парабалы

1. Вызначыце каардынаты вяршыні парабалы:

а) $y = 3(x - 1,2)^2 - 5$;

б) $y = (2x - 3)(x - 1)$;

в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.

а) Калі квадратычная функцыя запісана ў выглядзе $y = a(x - m)^2 + n$, то $x_{\text{в}} = m$; $y_{\text{в}} = n$. Для функцыі

$y = 3(x - 1,2)^2 - 5$ атрымаем $x_{\text{в}} = 1,2$; $y_{\text{в}} = -5$.

б) Запішам квадратычную функцыю ў выглядзе мнагачлена $(2x - 3)(x - 1) = 2x^2 - 5x + 3$.

Знойдзем абсцысу вяршыні парабалы: $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$.

Для знаходжання ардынаты вяршыні парабалы можна выкарыстаць формулу

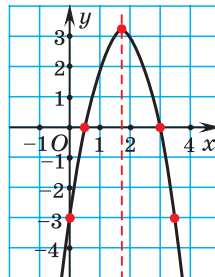
$y_{\text{в}} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, тады

$y_{\text{в}} = -\frac{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$.

	Ардынату вяршыні парабалы можна таксама знайсці, падставіўшы знойдзенае значэнне абсцысы вяршыні ў формулу функцыі: $y_{\text{в}} = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8}.$ в) $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1;$ $y_{\text{в}} = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0.$
Найбольшае і найменшае значэнні квадратичнай функцыі	
2. Знайдзіце найбольшае (найменшае) значэнне функцыі: а) $y = 3(x - 1,2)^2 - 5;$ б) $y = (2x - 3)(x - 1);$ в) $y = -2x^2 + 4x - 2.$	а) Паколькі $a = 3 > 0$, то функцыя прымае найменшае значэнне, роўнае ардынаце вяршыні парабалы, г. зн. найменшае значэнне дадзенай функцыі роўна $y_{\text{в}} = -5.$ б) Паколькі $a = 2 > 0$, то функцыя прымае найменшае значэнне, роўнае ардынаце вяршыні парабалы. Паколькі вяршыня парабалы мае каардынаты $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, то найменшае значэнне дадзенай функцыі роўна $y_{\text{в}} = -\frac{1}{8}.$ в) Паколькі $a = -2 < 0$, то функцыя прымае найбольшае значэнне, роўнае ардынаце вяршыні парабалы. Ардыната вяршыні парабалы роўна нулю, значыць, найбольшае значэнне дадзенай функцыі роўна $y_{\text{в}} = 0.$

Мноства значэнняў квадратычнай функцыі	
3. Знайдзіце мноства значэнняў квадратычнай функцыі: а) $y = 3(x - 1,2)^2 - 5$; б) $y = (2x - 3)(x - 1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Паколькі $a = 3 > 0$, то $E = [y_{\text{в}}; +\infty)$. Паколькі $y_{\text{в}} = -5$, то $E = [-5; +\infty)$. б) Паколькі $a = 2 > 0$, то $E = [y_{\text{в}}; +\infty)$. Паколькі $y_{\text{в}} = -\frac{1}{8}$, то $E = [-\frac{1}{8}; +\infty)$. в) Паколькі $a = -2 < 0$, то $E = (-\infty; y_{\text{в}}]$. Паколькі $y_{\text{в}} = 0$, то $E = (-\infty; 0]$.
Пункты перасячэння графіка функцыі з восьмі каардынат	
4. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння графіка квадратычнай функцыі з восьмі каардынат: а) $f(x) = -(x - 1,2)^2 + 25$; б) $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$; в) $p(x) = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Для вызначэння каардынат пунктаў перасячэння графіка функцыі $f(x) = -(x - 1,2)^2 + 25$ з восьсю абсцыс знойдзем нулі гэтай функцыі, г. зн. рэшым ураўненне $-(x - 1,2)^2 + 25 = 0;$ $(x - 1,2 + 5)(x - 1,2 - 5) = 0;$ $(x + 3,8)(x - 6,2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6,2, \\ x = -3,8. \end{cases}$ Для вызначэння каардынат пункта перасячэння графіка з восьсю ардынаты знойдзем значэнне функцыі пры $x = 0$ і атрымаем $f(0) = -(0 - 1,2)^2 + 25 = -1,44 + 25 = 23,56$. Адказ: $(6,2; 0); (-3,8; 0); (0; 23,56)$. б) Знойдзем нулі функцыі $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$. Выкарыстаем уласцівасць аб роўнасці здабытку нулю і атрымаем: $\begin{cases} x - 1 = 0, & x = 1, \\ x + 4 = 0, & x = -4. \end{cases}$

	$h(0) = 2(0 - 1)(0 + 4) = -8.$ <i>Адказ:</i> (1; 0); (-4; 0); (0; -8). в) $-2x^2 + 4x - 2 = 0,$ $x^2 - 2x + 1 = 0, \quad (x - 1)^2 = 0,$ $x = 1. \quad p(0) = -2.$ <i>Адказ:</i> (1; 0); (0; -2).
Пабудова графіка квадратичнай функцыі	
5. Пабудуйце графік функцыі $y = -2x^2 + 7x - 3.$	① $a = -2 < 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўніз. ② Каардынаты вяршыні парабалы: $x_{\text{в}} = -\frac{7}{-4} = \frac{7}{4}; \quad y_{\text{в}} = -2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{4} - 3 = 3\frac{1}{8}.$ Вось сіметрыі парабалы — прамая $x = 1\frac{3}{4}$. ③ Пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс: $2x^2 - 7x + 3 = 0; \quad D = 25,$ $x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{1}{2}; \quad (3; 0); \quad \left(\frac{1}{2}; 0\right).$ ④ Пункт перасячэння графіка з воссю ардынат: $x = 0$, $y = -3$. Пункт (3,5; -3) сіметрычны пункту (0; -3) адносна восі сіметрыі парабалы. ⑤ Пабудуем графік функцыі $y = -2x^2 + 7x - 3.$



6. Пабудуйце графік функцыі $y = (x - 3)^2 - 4$.

① $a = 1 > 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўверх.

② Каардынаты вяршыні парабалы: $x_v = 3$; $y_v = -4$.

Вось сіметрыі парабалы — прамая $x = 3$.

③ Пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс:

$$(x - 3)^2 - 4 = 0;$$

$$(x - 3 + 2)(x - 3 - 2) = 0;$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0;$$

$$x_1 = 1; x_2 = 5; (1; 0); (5; 0).$$

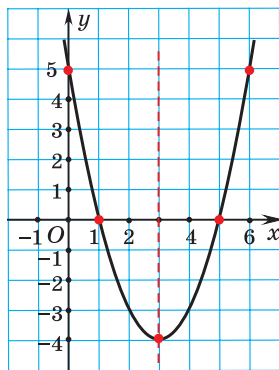
④ Пры $x = 0$

$$y = (0 - 3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5.$$

Графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце $(0; 5)$.

Пункт $(6; 5)$ сіметрычны пункту $(0; 5)$ адносна восі сіметрыі парабалы.

⑤ Пабудуем графік функцыі $y = (x - 3)^2 - 4$.



7. Пабудуйце графік функцыі $y = 0,5x^2 - 2$.

① $a = 0,5 > 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўверх.

② Каардынаты вяршыні парабалы: $x_v = -\frac{0}{1} = 0$;

$$y_v = 0,5 \cdot 0^2 - 2 = -2.$$

Восью сіметрії парабалы з'яўляецца прамая $x = 0$, г. зн. вось ардынаты.

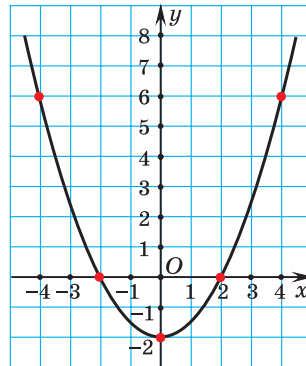
③ Пункты перасячэння графіка з восьсю абсцыс:

$$0,5x^2 - 2 = 0, \quad x^2 - 4 = 0, \\ x_1 = 2; \quad x_2 = -2; (2; 0); (-2; 0).$$

④ Пункт перасячэння графіка з восьсю ардынаты $(0; -2)$.

⑤ Знайдзем каардынаты некалькіх дадатковых пунктаў: $(4; 6); (-4; 6)$.

Пабудуем графік функцыі $y = 0,5x^2 - 2$.



8. Пабудуйце графік функцыі $y = -4x^2$.

① $a = -4 < 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўніз.

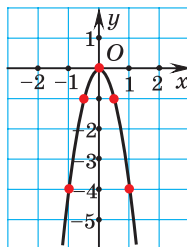
② Каардынаты вяршыні парабалы: $x_v = -\frac{0}{-8} = 0$;
 $y_v = -4 \cdot (0)^2 = 0$.

Вось сіметрыі парабалы $x = 0$ — вось ардынаты.

③ Нулі функцыі: $-4x^2 = 0$, $x = 0$.

④ Пункт перасячэння графіка з восьсю ардынаты $(0; 0)$.

⑤ Знайдемо координати небагатьох додаткових пунктів: $(1; -4); (-1; -4); (0,5; -1); (-0,5; -1)$. Побудуємо графік функції $y = -4x^2$.



1. Яка з наступних функцій не з'являється квадратичною:

а) $f(x) = (3x - 2) + (5x + 4)$;

б) $g(x) = (3x + 1)(5x + 4)$;

в) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$?

2. Дадені три функції: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$; $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ і $h(x) = 2(x - 1)(x + 3)$. Ці правда, що f , g , h — три форми запису одної і той же функції?



3.4. Використавши означення квадратичної функції, серед наведених функцій виберіть квадратичні:

а) $y = -x^2 + 7x - 2$;

б) $y = 5x^2 + x$;

в) $y = -2x^2 + 9$;

г) $y = -x + 7$;

д) $y = 5x^2$;

е) $y = x^3 + 3x^2$.

3.5. Для кожної з квадратичних функцій визначте, у якій формі вона записана:

а) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$;

б) $f(x) = (x + 1)(x - 5)$;

в) $f(x) = 7(x - 2)^2 + 8$;

г) $f(x) = -2x^2 + 7x - 1$;

д) $f(x) = (9 - x)(3x + 4)$;

е) $f(x) = -4(x + 1)^2 - 5$.

3.6. Виберіть рівняння парабол, графіки яких накривані знизу:

а) $y = 3x^2 - x - 2$;

б) $y = -2x^2 + 4x - 1$;

в) $y = -x^2 + 10x$;

г) $y = 9 - x^2$;

д) $y = 0,1x^2$;

е) $y = 4x^2 - 1$.

Приведіть кілька прикладів функцій, графіками яких з'являються параболы, графіки яких накривані зверху.

3.7. Визначьте, якім параболом належить пункт з координатами (1; 4):

- а) $y = x^2 - x - 4$; б) $y = -3(x + 1)^2 + 16$;
 в) $y = (x - 2)(x - 5)$; г) $y = -x^2 + 3$.

3.8. Для квадратичної функції, заданої формулою $f(x) = x^2 - 5x + 1$, знайдіть:

- а) $f(1)$; б) $f(-3)$; в) $f(0)$.

3.9. Для квадратичної функції, заданої формулою $g(x) = -0,25x^2 + 3$, парафуйте:

- а) $g(-2)$ і $g(4)$; б) $g(-0,5)$ і $g(0,5)$;
 в) $g(-2\sqrt{3})$ і $g(\sqrt{6})$; г) $g(-2\sqrt{5})$ і $g(2\sqrt{5})$.

3.10. Для квадратичної функції $f(x) = x^2 - 4x + 9$ знайдіть значення аргумента, при яких:

- а) $f(x) = 9$; б) $f(x) = 6$; в) $f(x) = 21$.

3.11. Визначте, ці існують значення аргумента, при яких квадратична функція:

- а) $y = x^2 - 4x + 7$ приймає значення, роїнає 4;
 б) $y = -2x^2 + 6$ приймає значення, роїнає 9;
 в) $y = 5x^2 - x + 1$ приймає значення, роїнає 1.

3.12. Для парабол, показаних на рисунку 53, запишіть:

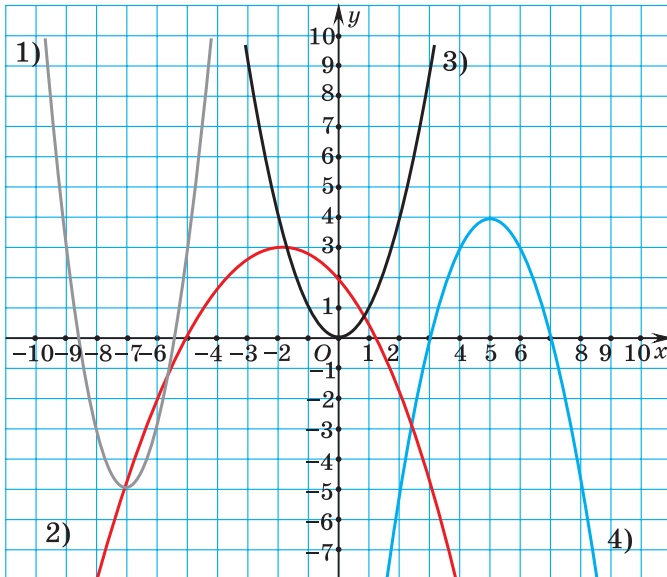


Рис. 53

а) напрамак галін; б) каардынаты вяршыні; в) ураўненне восі сіметрыі; г) найбольшае (найменшае) значэнне; д) мноства значэнняў.

3.13. Вызначыце напрамак галін і каардынаты вяршыні парабалы:

а) $y = (x - 2)^2 + 3$;

б) $y = 4(x + 1)^2 - 6$;

в) $y = -(x - 5)^2 - 8$;

г) $y = -7(x + 9)^2$;

д) $y = 2x^2 + 5$;

е) $y = -8x^2$.

3.14. Прывядзіце па два прыклады ўраўненняў парабал, вяршынямі якіх з'яўляюцца пункты:

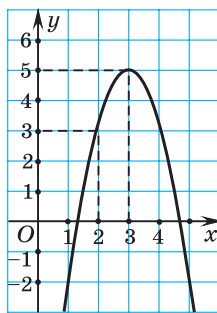
а) (3; 8);

б) (-8; -6);

в) (0; -3);

г) (5; 0).

3.15. Графік функцыі $f(x) = a(x - m)^2 + n$ паказаны на рысунку 54. Выкарыстаўшы графік, знайдзіце a , m і n . Запішыце функцыю $y = f(x)$ у выглядзе мнагачлена.



Рыс. 54

3.16. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы і запішыце ўраўненне яе восі сіметрыі:

а) $y = 2x^2 - 4x + 1$;

б) $y = 2x^2 + 4x$;

в) $y = -0,5x^2 - 4x + 1$;

г) $y = -x^2 + 4x - 7$.

3.17. Вызначыце, у якой каардынатнай чвэрці знаходзіцца вяршыня парабалы:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 7$;

б) $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$;

в) $f(x) = 4x^2 + 4x - 5$;

г) $f(x) = -3x^2 - 12x$.

Запішыце ўраўненне восі сіметрыі для кожнай парабалы.

3.18. Запішыце квадратычную функцыю $y = (x - 4)(x + 2)$ у выглядзе мнагачлена і знайдзіце ардынату вяршыні парабалы, якая з'яўляецца графікам дадзенай функцыі.

3.19. Знайдзіце найменшае (найбольшае) значэнне функцыі:

а) $y = (x - 8)^2 + 9$;

б) $y = -4(x + 1)^2 + 5$;

в) $y = 2x^2 - 6x + 4$;

г) $y = -x^2 + 4x - 3$;

д) $y = (x + 8)(x - 4)$;

е) $y = -3(x - 1)(x + 5)$.

3.20. Прывядзіце два прыклады квадратычных функцый:

а) найменшым значэннем якіх з'яўляецца лік 7;

б) найбольшым значэннем якіх з'яўляецца лік 15.

3.21. Знайдіть абсяг визначення і мноства значенняў функцыі:

а) $f(x) = 7(x + 6)^2 - 1$;

б) $f(x) = -(x - 4)^2 + 2$;

в) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;

г) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$;

д) $f(x) = -(x - 6)(x + 2)$;

е) $f(x) = 2(x + 4)(x + 8)$.

3.22. Визначыце каардынаты пунктаў, у якіх графік функцыі перасякае восі каардынат:

а) $y = (x - 8)(x + 3)$;

б) $y = -2x^2 + 5x - 2$;

в) $y = (x + 7)^2 - 4$;

г) $y = x^2 - 9$.

3.23. Сярод квадратичных функцый выберыце функцыі, якія не маюць нулёў:

а) $y = (x + 1)(x - 6)$;

б) $y = x^2 + x + 3$;

в) $y = -(x - 5)^2 + 1$;

г) $y = x^2 + 4$.

3.24. Пабудуйце графік квадратичнай функцыі:

а) $y = x^2 - 2x - 8$;

б) $y = -x^2 + 5x - 6$;

в) $y = 2x^2 - 8x + 6$;

г) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5$.

3.25. Пабудуйце графік квадратичнай функцыі і знайдзіце мноства яе значенняў:

а) $f(x) = x^2 - 6x$;

б) $f(x) = -x^2 + 9$;

в) $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$;

г) $f(x) = -3x^2$.

3.26. Пабудуйце графік квадратичнай функцыі:

а) $y = (x - 1)^2 - 4$;

б) $y = -2(x + 3)^2 + 8$;

в) $y = (x - 5)(x + 1)$;

г) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 7)$.

Ці можна вызначыць вось сіметрыі парабалы, не выконваючы пабудову графіка?

3.27. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = -x^2$.

Прааналізуйце атрыманыя вынікі і зрабіце вывад.

3.28. На рысунку 55 паказаны графік адной з функцый:

а) $y = -x^2 - 2x + 2$;

б) $y = -x^2 + 2x + 3$;

в) $y = -x^2 + x + 2$;

г) $y = -x^2 + 2x + 2$.

Визначыце, графік якой функцыі паказаны на рысунку. Растлумачце свой выбар.

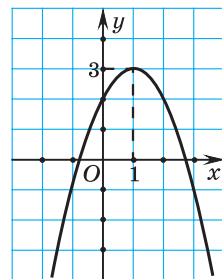
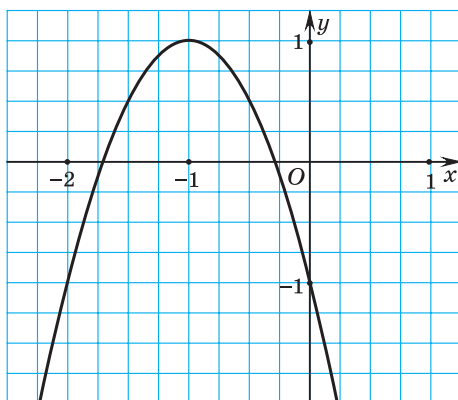


Рис. 55



Рыс. 56

3.29. Пабудуйце графік квадратычнай функцыі і вызначыце, колькі каранёў мае ўраўненне $f(x) = 2$:

- а) $f(x) = x^2 - 8x + 7$; б) $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$;
 в) $f(x) = x^2 + 4x + 6$; г) $f(x) = -x^2 + 4x$;
 д) $f(x) = (x - 3)^2$; е) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

3.30. Графік функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ паказаны на рысунку 56. Выкарыстаўшы графік:

- а) вызначыце $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$; б) знайдзіце a , b і c .

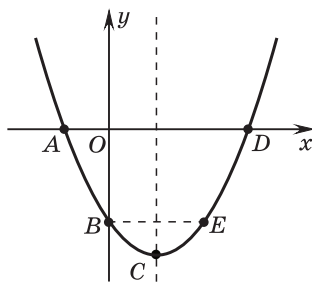
3.31. Для таго каб абгарадзіць прамавугольны ўчастак для пасадкі агародніны, было куплена 24 м сеткі. Плошча ўчастка S з'яўляецца функцыяй ад даўжыні адной з яго старон x . Задайце гэту функцыю формулай. Знайдзіце, пры якім значэнні аргумента функцыя прымае найбольшае значэнне.

3.32. На рысунку 57 паказаны графік квадратычнай функцыі $y = 0,5x^2 - 2x - 2,5$. Вызначыце каардынаты пунктаў A , B , C , D , E .

3.33. Пабудуйце графікі функцый і знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння гэтых графікаў:

- а) $y = x^2 - 6x + 5$ і $y = -x + 1$;
 б) $y = x^2 - 4$ і $y = -x + 2$;
 в) $y = -x^2 + 4x - 5$ і $y = -2$.

Праверце атрыманыя вынікі.



Рыс. 57

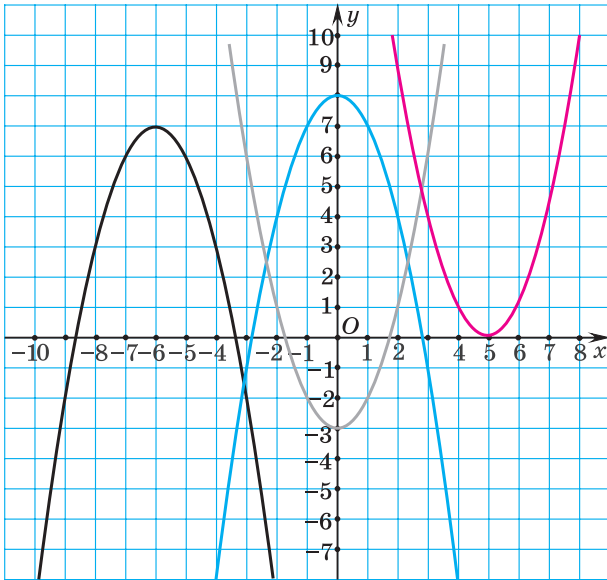


Рис. 58

3.34. Визначьте, графіка якої з даних функцій на рисунку 58:

- а) $y = x^2 - 3$; б) $y = -(x + 6)^2 + 7$; в) $y = (x - 5)^2$;
 г) $y = -(x - 6)^2 + 7$; д) $y = -x^2 + 8$.

3.35. Побудуйте графіки квадратичних функцій $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$ і $g(x) = (x + 3)^2 - 4$. Визначте, ці мають параболы агульні точки. Ці можна гэта визначыць, не выконваючы пабудову графікаў?

3.36. На рисунку 59 паказаны графікі функцій $f(x) = 3x^2 + 24x + c$ і $g(x) = -x^2 + bx - 18$. Выкарыстаўшы даныя рысунка: а) знайдзіце лікі b і c ; б) вызначце агульную ўласцівасць для двох парабол; в) рашыце графічна ўраўненне $f(x) = g(x)$.

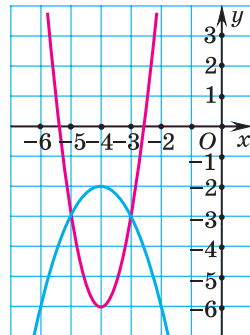


Рис. 59

3.37. Знайдзіце значэнне ліку b , пры якім графікі функцій $y = -3x + b$ і $y = (x - 3)(x - 7)$ перасякаюцца ў пункце, які належыць восі ардынат.

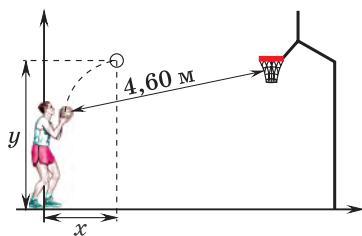
3.38. Вызначыце, пры якіх значэннях m і n вяршыня парабалы $y = a(x - m)^2 + n$:

- належыць восі ардынаты;
- належыць восі абсцысы;
- знаходзіцца ў пачатку каардынат.

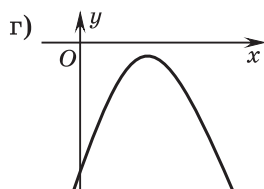
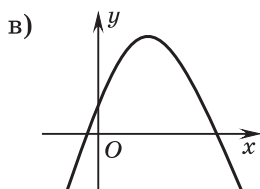
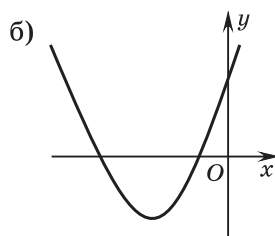
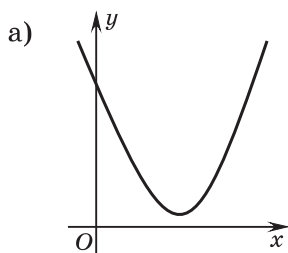
3.39. Падчас штрафнога кідка ў баскетболе мяч знаходзіўся прыкладна за 4,60 м ад цэнтра каша, размешчанага на вышыні 3,05 м ад падлогі. Гулец кінуў мяч ад узроўню плеч, а гэта прыблізна 1,65 м ад падлогі (рыс. 60). Мяркуецца, што крывой, апісанай у прасторы мячом, з'яўляецца парабала $y = -0,5x^2 + 1,95x + 1,65$, дзе x — адлегласць па гарызанталі ад гульца да мяча, y — вышыня, на якой знаходзіцца мяч. Ці можна сцвярджаць, што гулец здолеў закінуць мяч у кош? Якая максімальная вышыня дасягнута мячом?

Ці ведаеце вы, што сярод выхаванцаў беларускай школы баскетбола ёсць гульцы сусветнага ўзроўню? Напрыклад, Таццяна Івінская ў складзе жаночай баскетбольнай зборнай на XXII Летніх Алімпійскіх гульнях 1980 года ў Маскве стала алімпійскай чэмпіёнкай. Якіх яшчэ выдатных беларускіх баскетбалістаў вы ведаеце?

3.40. На рысунку 61 паказаны відарысы графікаў парабал $y = ax^2 + bx + c$. Вызначыце знакі каэфіцыентаў a , b і c , знак дыскрымінанта адпаведнага квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$ для кожнай з парабал.



Рыс. 60



Рыс. 61

3.41. Покажите схематично відарыс графіка квадратичнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$, калі:

а) $a > 0, c > 0, D > 0, -\frac{b}{2a} < 0$; б) $a < 0, D = 0, -\frac{b}{2a} > 0$;

в) $a > 0, D < 0, -\frac{b}{2a} < 0$; г) $a < 0, D > 0, -\frac{b}{2a} > 0$,

дзе D — дыскрымінант квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$.

3.42. Знайдзіце абсцысу вяршыні парабалы, калі вядома, што нулямі функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, з'яўляюцца лікі:

а) -11 і 13 ; б) $-3 + 2\sqrt{5}$ і $25 - 2\sqrt{5}$.

3.43. Графік квадратичнай функцыі $y = -x^2 + 8x + c$ праходзіць праз пункт $A(9; 0)$. Знайдзіце:

- а) каардынаты вяршыні парабалы;
- б) вось сіметрыі парабалы;
- в) найбольшае значэнне функцыі;
- г) нулі функцыі.

3.44. Знайдзіце значэнні c , пры якіх графік квадратичнай функцыі $y = x^2 + 10x + c$:

- а) мае з воссю абсцыс толькі адзін агульны пункт;
- б) перасякае вось ардынаты у пункце $A(0; -7)$;
- в) праходзіць праз пачатак каардынаты;
- г) не мае з воссю абсцыс агульных пунктаў.

3.45. Графік квадратичнай функцыі $f(x) = 2x^2 + bx + 4$ праходзіць праз пункт $B(-1; -12)$. Знайдзіце:

- а) каардынаты вяршыні парабалы;
- б) вось сіметрыі парабалы;
- в) мноства значэнняў функцыі;
- г) нулі функцыі.

3.46. Знайдзіце значэнні b , пры якіх графік квадратичнай функцыі $y = -x^2 + bx - 9$:

- а) мае з воссю абсцыс толькі адзін агульны пункт;
- б) сіметрычны адносна восі ардынаты;
- в) перасякае вось абсцыс у пунктах, сіметрычных адносна прамой $x = 5$.

 **3.47.** На рысунку 62 паказаны графік функцыі $y = 3x^2 + bx + c$. Выкарыстаўшы даныя рысунка, знайдзіце b і c .

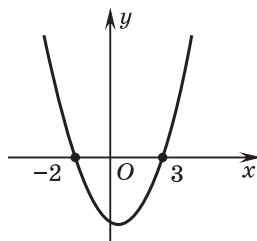


Рис. 62

 **3.48.** Нулямі квадратычнай функцыі $y = -4x^2 + bx + c$ з'яўляюцца лікі -1 і 3 . Знайдзіце:

- а) каардынаты вяршыні парабалы;
- б) вось сіметрыі парабалы;
- в) мноства значэнняў функцыі.

 **3.49.** Прамая $x = 2$ з'яўляецца воссю сіметрыі парабалы $f(x) = -x^2 + (a^2 + 4)x + 2$. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы.



3.50. Выберыце функцыі, графікамі якіх з'яўляюцца парабалы, галіны якіх накіраваны ўверх:

- а) $y = 5x^2 - x + 2$; б) $y = 5x - 1$;
- в) $y = -x^2 + 12$; г) $y = 9x^2 + x$.

3.51. Выберыце пункт, які належыць графіку квадратычнай функцыі $y = 4x^2 - 3x + 1$:

- а) $(1; -1)$; б) $(4; -3)$; в) $(0; -3)$; г) $(-2; 23)$.

3.52. Квадратычная функцыя зададзена формулай $f(x) = x^2 + 6x + 3$. Знайдзіце:

- а) $f(2)$; б) $f(-1)$; в) значэнні аргумента, пры якіх $f(x) = -5$.

3.53. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:

- а) $y = (x + 5)^2 - 4$; б) $y = -2(x - 8)^2 + 1$;
- в) $y = -x^2 + 6$; г) $y = 7(x - 1)^2$.

Запішыце вось сіметрыі для кожнай парабалы.

3.54. Выберыце парабалу, вяршыняй якой з'яўляецца пункт з каардынатамі $(-3; 5)$:

- а) $f(x) = x^2 - 6x + 14$; б) $f(x) = 2x^2 + 12x + 28$;
- в) $f(x) = -2x^2 - 12x - 13$; г) $f(x) = -3x^2 + 5$.

3.55. Знайдзіце найменшае (найбольшае) значэнне квадратычнай функцыі:

- а) $y = 3(x + 1)^2 - 7$; б) $y = -x^2 - 6x - 2$;
- в) $y = (x - 1)(x + 3)$; г) $y = -2x^2 + 10$.

3.56. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў квадратычнай функцыі:

- а) $f(x) = -(x - 5)^2 + 8$; б) $f(x) = x^2 - 8x + 3$;
- в) $f(x) = 4(x + 5)(x - 7)$; г) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

3.57. Визначте координати пункту, у яких графік квадратичної функції пересікає осі координат:

а) $y = (x + 2)(x - 8)$;

б) $y = -x^2 + 8x - 7$;

в) $y = -(x - 6)^2 + 9$;

г) $y = x^2 + 1$.

3.58. Побудуйте графік квадратичної функції:

а) $y = x^2 + 4x + 3$;

б) $y = -x^2 + 6x - 5$.

3.59. Побудуйте графік квадратичної функції і знайдіть множення значення:

а) $f(x) = -x^2 + 4x$;

б) $f(x) = x^2 - 1$;

в) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$;

г) $f(x) = 2x^2$.

3.60. Побудуйте графік квадратичної функції:

а) $y = (x + 5)^2 - 9$;

б) $y = -(x - 2)(x + 4)$.

Запишіть рівняння осі симетрії кожної з атриманих парабол.

3.61. Побудуйте графік квадратичної функції:

а) $y = (x - 4)(x + 2)$;

б) $y = 4x - x^2$;

в) $y = 3x^2 + 6x + 4$;

г) $y = -(x - 2)^2$.

Для кожної параболы визначте, чи пересікає парабала графік функції $y = -9$, і калі пересікає, то ў кількіх пунктах.

3.62. На рисунку 63 показаны графік функції $y = -2x^2 + 7x + 9$. Визначте координати пункту A і B .

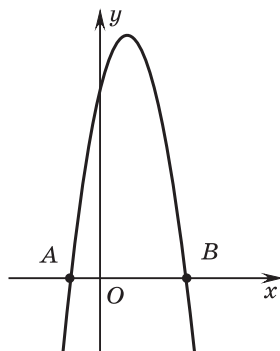


Рис. 63

3.63. Побудуйте графіки функцій і знайдіть координати пункту пересічення гэтых графікаў:

а) $y = x^2 - 2x - 8$ і $y = 2x - 3$;

б) $y = -x^2 + 6x$ і $y = 9$.

3.64. На рисунку 64 показаны графік адной з функцій:

а) $y = x^2 - 3x$;

б) $y = x^2 - 2x - 2$;

в) $y = x^2 - 2$;

г) $y = x^2 + 2x - 2$.

Визначте, графік якой функції показаны на рисунку. Растлумачце свой выбар.

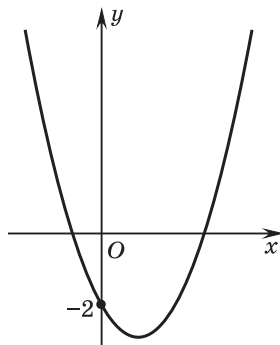


Рис. 64

3.65. Пабудуйце графікі функцый $f(x) = -(x + 4)^2 + 9$ і $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, вызначыце, ці маюць парабалы агульныя пункты.

3.66. Прадпрымальнік шые ад 0 да 50 вырабаў за дзень і лічыць, што ўзровень выдаткаў (у рублях) на вытворчасць x вырабаў задаецца пры дапамозе функцыі $C(x) = x^2 - 10x + 500$. Няхай $R(x)$ — выручка ад продажу x вырабаў, кожны з якіх каштуе 50 р.

а) Выразіце залежнасць $R(x)$.

б) Разлічыце выдаткі, выручку і прыбытак пры продажы 20 швейных вырабаў.

в) Дакажыце, што велічыня прыбытку задаецца пры дапамозе функцыі $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

г) Знайдзіце максімальна выгадную для продажу колькасць створаных вырабаў.

3.67. Пункт $M(2; 47)$ належыць графіку квадратычнай функцыі $y = -x^2 + bx + 7$. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі.

3.68. На рысунку 65 паказаны графік квадратычнай функцыі $y = x^2 + bx + c$. Выкарыстаўшы даныя рысунка, знайдзіце b і c .

3.69. Пакажыце схематычна відарыс графіка квадратычнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$, калі:

а) $a > 0, c < 0, D > 0, -\frac{b}{2a} > 0$;

б) $a > 0, D = 0, -\frac{b}{2a} < 0$;

в) $a < 0, D < 0, -\frac{b}{2a} > 0$,

дзе D — дыскрымінант квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$.

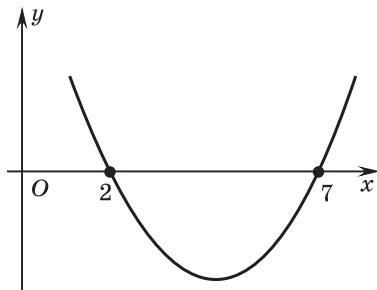
 **3.70.** Нулямі квадратычнай функцыі $y = 3x^2 + bx + c$ з'яўляюцца лікі -4 і 5 . Знайдзіце:

а) каардынаты вяршыні парабалы;

б) вось сіметрыі парабалы;

в) найменшае значэнне функцыі.

 **3.71.** Прамая $x = 1$ з'яўляецца воссю сіметрыі парабалы $f(x) = 4x^2 + (a^2 - 8)x + 2$. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы.



Рыс. 65



3.72. Выкарыстайце формулы скарачанага множання і вылічыце: $\frac{48^2 - 12^2}{89^2 + 31^2 + 89 \cdot 62}$.

3.73. Знайдзіце значэнне выразу $b^3 - 4b^{-2}$, калі $b = -2$.

3.74. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $5a + 5b - 8$, калі $-a - b = 3$;

б) $x + 1 - 6y$, калі $-x + 6y = 8$.

3.75. Спрасціце выраз $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - 2$ пры $x < 1$.

3.76. Даўжыня экватара складае каля 40 076 км. Выразіце даўжыню экватара ў метрах, запішыце атрыманы лік у стандартным выглядзе і вызначыце парадак ліку.

3.77. Запішыце ў выглядзе здабытку:

а) $m^3 + mn^2 + 13m^2n + 13n^3$;

б) $a^2b^2 + 5a^2b - 5ab - ab^2$.

3.78. Рашыце сістэму няроўнасцей
$$\begin{cases} \frac{3x - 13}{4} \leq \frac{x - 1}{4} - \frac{7}{8}, \\ 2 \geq \frac{x}{4} + \frac{3 - 2x}{3}. \end{cases}$$

3.79. Кліент аператара мабільнай сувязі выбірае адзін з двух тарыфаў. Абодва тарыфы прадугледжваюць штомесячную абаненцкую плату і аплату кожнай хвілінкі размовы. Па тарыфе *A* трэба плаціць 15 р. за месяц і 10 к. за хвілінку. Па тарыфе *B* — 10 р. за месяц і 15 к. за хвілінку. Які тарыф больш выгадны, калі кліент плануе размаўляць па тэлефоне:

а) 80 хвілін за месяц;

б) 150 хвілін за месяц?

Колькі хвілін за месяц трэба размаўляць, каб выніковая сума была аднолькавай для абодвух тарыфаў?

3.80. Спрасціце выраз

$$(\sqrt{21} + \sqrt{14} - 2\sqrt{35}) \cdot \frac{1}{7}\sqrt{7} + \sqrt{20}.$$

3.81. (Задача Л. Эйлера.) Некаторы чыноўнік купіў коней і быкоў за 1770 талераў. За кожнага каня ён заплаціў па 31 талер, за кожнага быка — па 21 талер. Колькі коней і колькі быкоў купіў чыноўнік?

§ 14. Манатоннасць, прамежкі знакапастаянства квадратычнай функцыі



3.82. Для функцыі $f(x) = x^2 + 2$ параўнайце:

- а) $f(-3)$ і $f(-2)$; б) $f(2)$ і $f(3)$.

3.83. Для функцыі $f(x) = x^2 - 4$ параўнайце з нулём:

- а) $f(-1)$; б) $f(-2)$; в) $f(2)$; г) $f(4)$.

3.84. Ці праўда, што значэнні функцыі $y = f(x)$ дадатныя для ўсіх значэнняў аргумента:

- а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = x^2 - 1$; в) $f(x) = -x^2 + 1$?

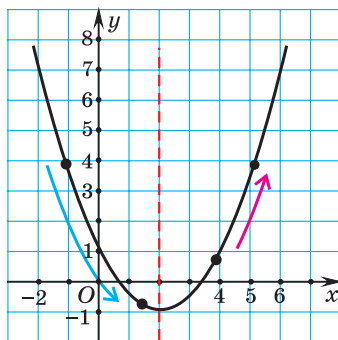


Двое сяброў вывучалі ўласцівасці квадратычнай функцыі. Адзін з іх сцвярджаў, што, не выконваючы вылічэнні, можа даказаць, што $f(5,2145) > f(3,987)$, а $f(-1,23) > f(1,59)$, калі зададзена функцыя $f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 1$. «Якая ўласцівасць квадратычнай функцыі выкарыстоўваецца?» — зацікавіўся яго сябар.

Пабудуем графік функцыі $f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 1$ (рыс. 66).

На восі абсцыс пункт 5,2145 размешчаны справа ад пункта 3,987, і абодва яны размешчаны справа ад пункта 2. Пункты графіка, размешчаныя справа ад вяршыні $(2; -1)$, з павелічэннем значэнняў абсцыс «паднімаюцца ўверх», дакладней, значэнні ардынаты гэтых пунктаў (значэнні функцыі) павялічваюцца з павелічэннем значэнняў аргумента. Паколькі $5,2145 > 3,987 > 2$, то $f(5,2145) > f(3,987)$.

Такім чынам, для функцыі $f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 1$ пры $x > 2$ большаму значэнню аргумента адпавядае большае значэнне функцыі. Гавораць, што дадзеная функцыя нарастае на прамежку $[2; +\infty)$ або што $[2; +\infty)$ — **прамежак нарастання функцыі**.



Рыс. 66

Азначэнне

Функцыя нарастае на некаторым прамежку, калі для любых двух значэнняў аргумента з гэтага прамежку большаму значэнню аргумента адпавядае большае значэнне функцыі.

На промежку $(-\infty; 2]$ пункти графіка «апускаюцца ўніз» пры павелічэнні значэнняў іх абсцыс, г. зн. з павелічэннем значэнняў аргумента на гэтым прамежку значэнні функцыі памяншаюцца.

Азначэнне

Функцыя спадае на некаторым прамежку, калі для любых двух значэнняў аргумента з гэтага прамежку большаму значэнню аргумента адпавядае меншае значэнне функцыі.

Так, для функцыі $f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 1$ праўда, што $f(-1,23) > f(1,59)$, паколькі $-1,23 < 1,59$, а лікі $-1,23$ і $1,59$ належаць прамежку, на якім функцыя спадае (**прамежку спадання функцыі**).

У агульным выпадку для функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ маем: калі $a > 0$ (галіны парабалы накіраваны ўверх), то функцыя спадае на прамежку $(-\infty; x_B]$ і нарастае на прамежку $[x_B; +\infty)$ (рыс. 67, а);

калі $a < 0$ (галіны парабалы накіраваны ўніз), то функцыя спадае на прамежку $[x_B; +\infty)$ і нарастае на прамежку $(-\infty; x_B]$ (рыс. 67, б).

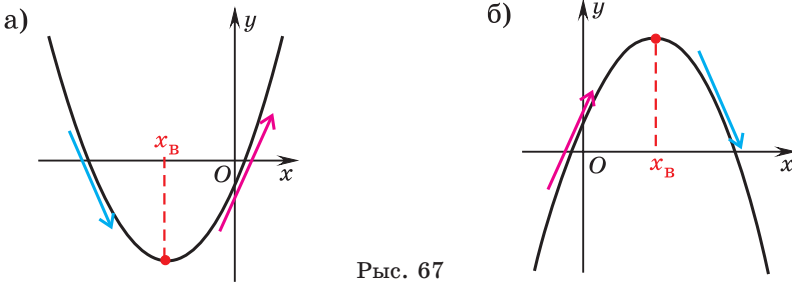


Рис. 67

Прыклад. Знайдзіце прамежкі спадання і нарастання квадратичнай функцыі:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

б) $f(x) = -x^2 + 5$.

Рашэнне. а) Галіны парабалы накіраваны ўверх, паколькі $a = 1 > 0$. Знайдзем абсцысу вяршыні парабалы: $x_B = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$.

Складзём табліцу змянення функцыі ў залежнасці ад змянення значэнняў аргумента.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x),$ $a > 0$			

Функція $f(x) = x^2 - 4x + 3$ спадає на проміжку $(-\infty; 2]$ і нарастає на проміжку $[2; +\infty)$.

б) Галіни параболы накіранаваны ўніз ($a = -1 < 0$) і $x_{\text{в}} = 0$. Складзём табліцу змянення функцыі ў залежнасці ад змянення значэнняў аргумента.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x),$ $a < 0$			

Функцыя $f(x) = -x^2 + 5$ спадає на проміжку $[0; +\infty)$ і нарастає на проміжку $(-\infty; 0]$.

 **Каб вызначыць проміжкі нарастання і спадання квадратичнай функцыі, трэба:**

① Знайсці абсцысу вяршыні параболы $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$.

② Вызначыць знак першага каэфіцыента.

③ Запоўніць табліцу змянення функцыі ў залежнасці ад змянення значэнняў аргумента.

x	$-\infty$	$x_{\text{в}}$	$+\infty$
$f(x),$ $a > 0$			

або

x	$-\infty$	$x_{\text{в}}$	$+\infty$
$f(x),$ $a < 0$			

④ Запісаць адказ.

(Калі $a > 0$, то функцыя спадає на проміжку $(-\infty; x_{\text{в}}]$ і нарастає на проміжку $[x_{\text{в}}; +\infty)$;

калі $a < 0$, то функцыя спадає на проміжку $[x_{\text{в}}; +\infty)$ і нарастає на проміжку $(-\infty; x_{\text{в}}].$)

Знайдзіце проміжкі нарастання і спадання квадратичнай функцыі

$$y = -2x^2 - 6x + 8.$$

① $x_{\text{в}} = -\frac{-6}{2 \cdot (-2)} = -1,5.$

② $a = -2 < 0.$

③

x	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
$f(x),$ $a < 0$			

④ **Адказ:** проміжак нарастання $(-\infty; -1,5]$; проміжак спадання $[-1,5; +\infty)$.



Прамежкі спадання і наростання функцыі называюцца прамежкамі манатоннасці функцыі.

Прамежкі знакапастаянства квадратычнай функцыі

Для таго каб вызначыць, на якім прамежку значэнні квадратичнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$ дадатныя, а на якім адмоўныя, выкарыстаем яе схематычны відарыс.

Квадратичная функцыя, графік якой паказаны на рысунку 68, прымае толькі дадатныя значэнні пры ўсіх значэннях аргумента, паколькі пры ўсіх $x \in \mathbf{R}$ графік гэтай функцыі размешчаны вышэй за вось абсцыс, г. зн.

$$y > 0 \text{ пры } x \in (-\infty; +\infty).$$

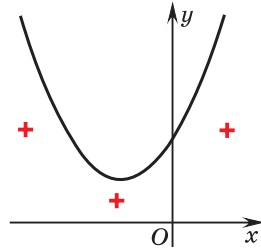
Квадратичная функцыя, графік якой паказаны на рысунку 69, прымае толькі дадатныя значэнні пры ўсіх значэннях аргумента, акрамя $x = x_b$, паколькі пры ўсіх $x \neq x_b$ графік функцыі размешчаны вышэй за вось абсцыс. Значыць,

$$y > 0 \text{ пры } x \in (-\infty; x_b) \cup (x_b; +\infty).$$

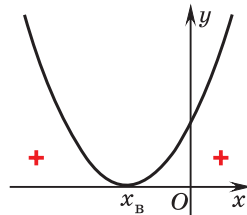
Квадратичная функцыя, графік якой паказаны на рысунку 70, прымае дадатныя значэнні на адкрытых лікавых праменах $(-\infty; x_1)$ і $(x_2; +\infty)$, адмоўныя значэнні — паміж нулямі функцыі, г. зн. на інтэрвале $(x_1; x_2)$.

Квадратичная функцыя, графік якой паказаны на рысунку 71, прымае толькі адмоўныя значэнні пры ўсіх значэннях аргумента, паколькі пры ўсіх $x \in \mathbf{R}$ графік гэтай функцыі размешчаны ніжэй за вось абсцыс, г. зн.

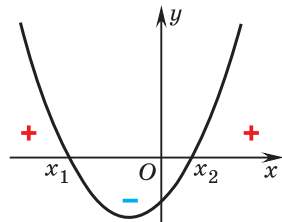
$$y < 0 \text{ пры } x \in (-\infty; +\infty).$$



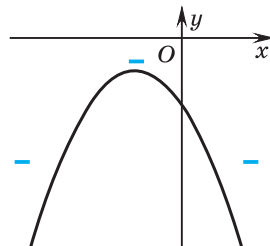
Рыс. 68



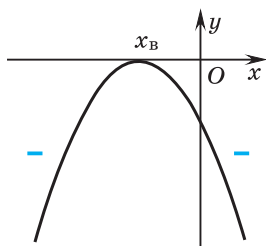
Рыс. 69



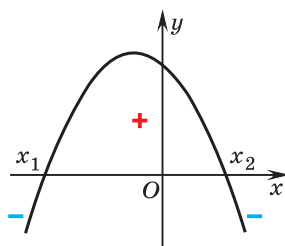
Рыс. 70



Рыс. 71



Рыс. 72



Рыс. 73

Квадратычная функцыя, графік якой паказаны на рысунку 72, прымае толькі адмоўныя значэнні пры ўсіх значэннях аргумента, акрамя $x = x_B$, паколькі пры ўсіх $x \neq x_B$ графік функцыі размешчаны ніжэй за вось абсцыс. Значыць,

$$y < 0 \text{ пры } x \in (-\infty; x_B) \cup (x_B; +\infty).$$

Квадратычная функцыя, графік якой паказаны на рысунку 73, прымае дадатныя значэнні паміж нулямі функцыі, г. зн. на інтэрвале $(x_1; x_2)$. Адмоўныя значэнні гэта функцыя прымае на адкрытых лікавых праменях $(-\infty; x_1)$ і $(x_2; +\infty)$.



Прамежкі, на якіх функцыя прымае толькі дадатныя або толькі адмоўныя значэнні, называюцца прамежкамі знакапастаянства функцыі.



Манатоннасць квадратнай функцыі

1. Знайдзіце прамежкі на-
растання і спадання функ-
цыі $y = x^2 - 4x + 3$.

① Знайдзем абсцысу вяршы-
ні парабалы: $x_B = -\frac{-4}{2} = 2$.

② Вызначым знак першага
каэфіцыента: $a = 1 > 0$.

③

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x),$ $a > 0$			

④ **Адказ:** функцыя нарастае
на лікавым прамені $[2; +\infty)$
і спадае на лікавым прамені
 $(-\infty; 2]$.

2. Знайдіть промежутки монотонности функции $y = -5(x + 7)^2 + 1$.

① $x_{\text{в}} = -7$.

② $a = -5 < 0$.

③

x	$-\infty$	-7	$+\infty$
$f(x),$ $a < 0$			

④ **Аджказ:** функция спадает на лівом промені $[-7; +\infty)$ і нарастає на лівом промені $(-\infty; -7]$.

3. На рисунку 74 показаны графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Вызначте промежутки нарастания і спадання гэтых функций.

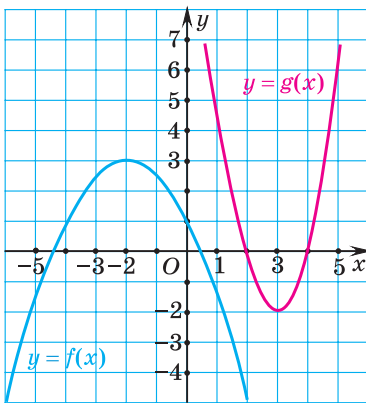


Рис. 74

Функции $y = f(x)$ адпавядає парабала, галіны якой накіраваны ўніз. Абсцысы вяршыні парабалы роўна $x_{\text{в}} = -2$. Гэта функция нарастає на лівом промені $(-\infty; -2]$ і спадает на лівом промені $[-2; +\infty)$.

Парабала, галіны якой накіраваны ўверх, адпавядає функции $y = g(x)$. Паколькі $x_{\text{в}} = 3$, то функция нарастає на лівом промені $[3; +\infty)$ і спадает на лівом промені $(-\infty; 3]$.

4. Дадзена функция $f(x) = -7(x - 5)^2 - 1$.

Не выконваючы вылічэнняў, размясціце ў парадку нарастання:

а) $f(9,8)$; $f(6,2)$; $f(5,6)$;

б) $f(-1,2)$; $f(2,8)$; $f(4,9)$.

Функция $f(x) = -7(x - 5)^2 - 1$ спадает на лівом промені $[5; +\infty)$ і нарастає на лівом промені $(-\infty; 5]$.

а) Лікі 9,8; 6,2 і 5,6 належаць прамежку спадання функции, таму з таго, што $9,8 > 6,2 > 5,6$, вынікае $f(9,8) < f(6,2) < f(5,6)$.

б) Лікі $-1,2$; $2,8$ і $4,9$ належаць прамежку нарастання функцыі, таму з таго, што $-1,2 < 2,8 < 4,9$, вынікае $f(-1,2) < f(2,8) < f(4,9)$.

Прамежкі знакапастаянства квадратычнай функцыі

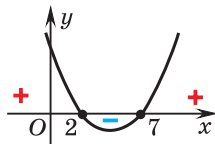
5. Вызначыце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $y = x^2 - 9x + 14$;

б) $y = x^2 + 4$;

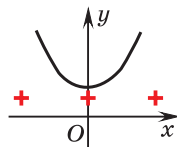
в) $y = (x - 1)^2$.

а) Пабудуем схему графіка функцыі $y = x^2 - 9x + 14$. Для гэтага вызначым нулі функцыі, г. зн. рэшым ураўненне $x^2 - 9x + 14 = 0$. Карані ўраўнення: $x_1 = 2$; $x_2 = 7$. Паколькі $a = 1$, то галіны парабалы накіраваны ўверх.



Адмоўныя значэнні функцыя прымае паміж нулямі функцыі, г. зн. на інтэрвале $(2; 7)$. Дадатныя значэнні функцыя прымае на адкрытых лікавых прамянях $(-\infty; 2)$ і $(7; +\infty)$.

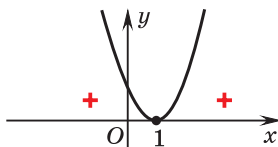
б) Пабудуем схему графіка функцыі $y = x^2 + 4$. Графік не перасякае вось абсцыс, галіны парабалы накіраваны ўверх.



Функцыя прымае дадатныя значэнні пры ўсіх значэннях аргумента $x \in \mathbf{R}$.

в) Побудуем схему графика функции $y = (x - 1)^2$.

График функции имеет ось абсцисс только один действительный пункт $x = 1$, ветви параболы направлены вверх.



Функция принимает положительные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = 1$, т. е. $y > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

? Сопоставьте таблицы изменения функции и зависимости от изменения значения аргумента с функциями:

а) $f(x) = -3(x+1)^2 + 2$;

б) $g(x) = 3(x-1)^2 + 2$;

в) $h(x) = 3(x-2)^2 + 1$.

1)

x	$-\infty$	2	$+\infty$

2)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$

3)

x	$-\infty$	1	$+\infty$

Какие из данных функций принимают только положительные значения?



3.85. Среди данных квадратичных функций выберите функцию, которая возрастает на промежутке $(-\infty; 5]$:

а) $f(x) = (x - 5)^2 + 3$;

б) $f(x) = (x - 3)^2 + 5$;

в) $f(x) = -(x - 5)^2 + 3$;

г) $f(x) = -(x - 3)^2 + 5$.

3.86. Найдите промежутки возрастания и убывания квадратичной функции, используя алгоритм:

а) $y = x^2 - 6x + 4$;

б) $y = -x^2 + 8x - 1$;

в) $y = 4x^2 + 12x - 5$;

г) $y = -3x^2 - 6x + 8$;

д) $y = 9x^2 - 6x$;

е) $y = -5x^2 + 7$.

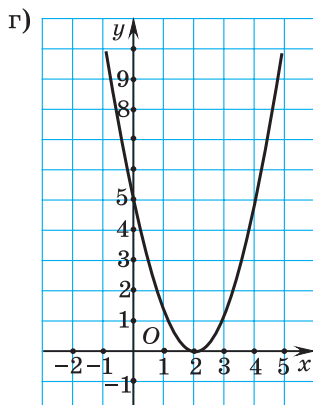
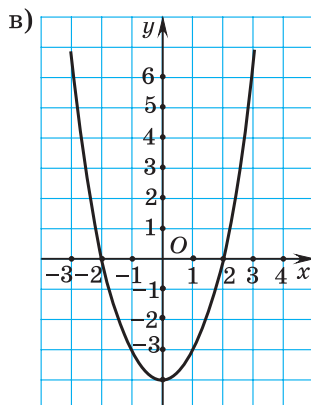
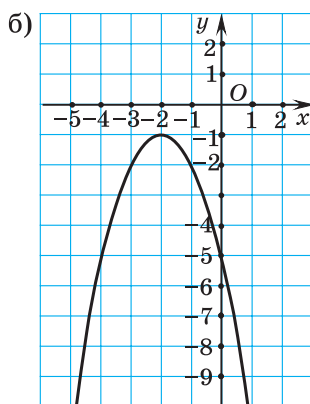
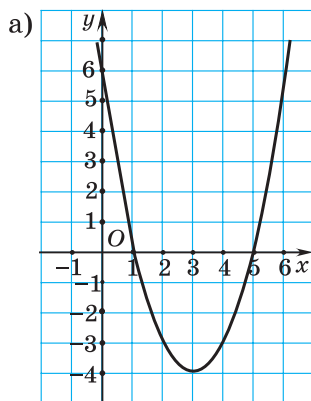


Рис. 75

3.87. Складзіце таблиці зм'янення функції у залежності ад зм'янення значення аргумента для квадратичних функцій, графіки яких показані на рисунку 75.

3.88. Приведіть по два приклади квадратичних функцій, які:

- спадають на проміжку $[8; +\infty)$ і нарастають на проміжку $(-\infty; 8]$;
- нарастають на проміжку $[-5; +\infty)$ і спадають на проміжку $(-\infty; -5]$.

3.89. Побудуйте графік квадратичної функції і знайдіть її проміжки монотонності:

а) $y = (x - 6)^2 - 1$;

б) $y = -2x^2 - 4x + 16$;

в) $y = (x - 1)(x + 5)$;

г) $y = -x^2 + 6x$.

Ці можна знайсці прамежкі манатоннасці квадратичнай функцыі, не выконваючы пабудову графіка?

3.90. Вядома, што квадратичная функцыя $y = f(x)$ спадае на прамежку $[3; +\infty)$ і нарастае на прамежку $(-\infty; 3]$. Запішыце ўраўненне восі сіметрыі графіка функцыі $y = f(x)$.

3.91. Прамая $x = -4$ — вось сіметрыі парабалы, якая з'яўляецца графікам квадратичнай функцыі $y = f(x)$. Вядома, што галіны парабалы накіраваны ўніз. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі $y = f(x)$.

3.92. Пабудуйце графік квадратичнай функцыі:

а) $y = (x - 7)^2$; б) $y = -2x^2 + 8$; в) $y = -3(x + 2)^2$.

Знайдзіце прамежак спадання функцыі.

3.93. Сярод дадзеных квадратичных функцый выберыце ўсе функцыі, якія нарастаюць на прамежку $(-\infty; 2]$:

а) $y = (x - 2)^2 - 1$; б) $y = -7(x - 2)^2 + 4$;

в) $y = -5x^2 + 20x + 3$; г) $y = -x^2 - 2$;

д) $y = x^2 - 2x - 7$; е) $y = -6x^2 + 12$.

Прывядзіце прыклады квадратичных функцый, якія спадаюць на прамежку $(-\infty; -2]$.

3.94. Дадзена функцыя $f(x) = (x + 6)^2 - 8$. Не выконваючы вылічэнні, параўнайце:

а) $f(3)$ і $f(5,2)$; б) $f(-9)$ і $f(-7)$;

в) $f(-5,23)$ і $f(-4,72)$; г) $f(-\sqrt{65})$ і $f(-\sqrt{45})$.

3.95. Дадзена функцыя

$$g(x) = -x^2 + 8x - 1.$$

Не выконваючы вылічэнні, размясціце ў парадку спадання:

а) $g(5)$; $g(6,2)$ і $g(7,4)$;

б) $g(-2)$; $g(1,8)$ і $g(-3,7)$.

3.96. На рысунку 76 паказаны графік квадратичнай функцыі $y = f(x)$. Ці праўда, што $f(3) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) = 0$, $f(5) < 0$? Запішыце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.

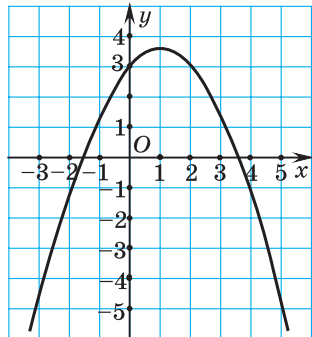


Рис. 76

3.97. Знайдіть прамежки знакапастаянства функції:

- а) $y = x^2 - 8x + 7$; б) $y = -2x^2 + 5x - 2$;
 в) $y = x^2 + 8x + 16$; г) $y = -3x^2 + x - 5$;
 д) $y = -9x^2 - 6x - 1$; е) $y = 2x^2 + 9$.

3.98. Знайдіть значення аргумента, при яких функція приймає адмоўныя значення:

- а) $y = -(x - 8)^2 + 16$; б) $y = (3x - 1)(x + 5)$;
 в) $y = -x^2 + 9$; г) $y = x(x + 5)$.

3.99. Приведіть приклад квадратичної функції, яка приймає додатні значення тільки на: а) прамежку $(-3; 3)$; б) прамежку $(-1; 5)$; в) прамежках $(-\infty; 1)$ і $(6; +\infty)$.

3.100. Побудуйте графік квадратичної функції $y = -x^2 + 4$. Знайдіть:

- а) значення аргумента, при яких функція приймає адмоўныя значення;
 б) прамежак, на яких функція спадає.

3.101. Побудуйте графік квадратичної функції $f(x) = 2x^2 + 6x$. Знайдіть:

- а) значення аргумента, при яких функція приймає додатні значення;
 б) прамежак настання функції;
 в) мноства значенняў функції;
 г) усе значення аргумента, для яких виконваецца няроўнасць $f(x) \leq 0$.

3.102. На рисунку 77 показаны графік квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Запишіть:

- а) абсяг вызначэння функцыі;
 б) мноства значэнняў функцыі;
 в) найменшае значэнне функцыі;
 г) ураўненне восі сіметры парабалы;
 д) нулі функцыі;
 е) прамежкі знакапастаянства функцыі;
 ж) прамежкі манатоннасці функцыі.

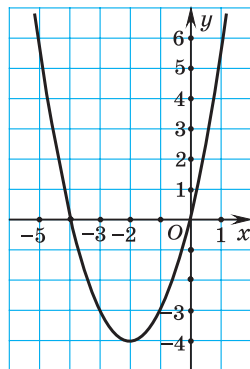


Рис. 77

3.103. Побудуйте графік квадратичнай функцыі $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ і назавіце:

- а) абсяг вызначэння функцыі;
 б) мноства значэнняў функцыі;

- в) найменшае значэнне функцыі;
- г) ураўненне восі сіметрыі парабалы;
- д) нулі функцыі;
- е) прамежкі знакапастаянства функцыі;
- ж) прамежкі манатоннасці функцыі.

3.104. Прывядзіце прыклад квадратичнай функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$, якая нарастае на прамежку $[1; +\infty)$ і прымае дадатныя значэнні пры ўсіх значэннях аргумента.

3.105. Пабудуйце графік квадратичнай функцыі $y = -2(x + 1)^2 + 8$ і назавіце: а) абсяг вызначэння функцыі; б) мноства значэнняў функцыі; в) найбольшае значэнне функцыі; г) ураўненне восі сіметрыі парабалы; д) нулі функцыі; е) прамежкі знакапастаянства функцыі; ж) прамежкі манатоннасці функцыі.

3.106. Прывядзіце прыклад квадратичнай функцыі $g(x) = ax^2 + bx + c$, якая мае найменшае значэнне ў пункце $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і прымае адмоўныя значэнні на прамежку $(-3; 4)$.

3.107. Вядома, што галіны парабалы $y = ax^2 + bx + c$ накіраваны ўніз, а нулямі функцыі з'яўляюцца лікі 8 і 32. Знайдзіце прамежкі:

- а) знакапастаянства функцыі;
- б) манатоннасці функцыі.

 **3.108.** Знайдзіце значэнне ліку n , пры якім функцыя $y = -3x^2 + x + n$ прымае толькі адмоўныя значэнні.

 **3.109.** Вядома, што функцыя $y = 10x^2 + tx + k$ не мае нулёў. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі.

 **3.110.** Знайдзіце значэнне ліку b , пры якім прамежак $(-\infty; -2]$ з'яўляецца прамежкам спадання функцыі $y = 3x^2 + bx - 11$.

 **3.111.** Прамая $x = -1$ з'яўляецца воссю сіметрыі парабалы $f(x) = ax^2 + (a^2 - 8)x - 2$, галіны якой накіраваны ўніз. Знайдзіце прамежкі манатоннасці і прамежкі знакапастаянства функцыі $y = f(x)$.

 **3.112.** Пры якім значэнні ліку a графік квадратичнай функцыі $y = ax^2 - 4x + 5$ датыкаецца да восі абсцыс?

 **3.113.** Пры якім значэнні ліку a адзін з пунктаў перасячэння парабалы $y = x^2 + (a - 4)x + a - 4$ з воссю абсцыс ляжыць справа ад пачатку каардынат, а другі — злева?



3.114. Сярод дадзеных квадратычных функцый выберыце функцыю, якая спадае на прамежку $(-\infty; 7]$:

а) $f(x) = (x - 2)^2 - 7$; б) $f(x) = (x - 7)^2 + 2$;

в) $f(x) = -(x - 7)^2 + 2$; г) $f(x) = (x + 7)^2 - 3$.

3.115. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання квадратычнай функцыі, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $y = x^2 + 10x - 3$; б) $y = -5x^2 - 15x + 7$;

в) $y = 4x^2 - 5$; г) $y = -8x^2 + 2x$.

3.116. Пабудуйце графік квадратычнай функцыі і знайдзіце яе прамежкі манатоннасці:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; б) $y = -2(x + 3)^2 + 8$;

в) $y = (x - 3)(x + 1)$; г) $y = -x^2 + 4x$.

3.117. Вядома, што квадратычная функцыя $y = f(x)$ спадае на прамежку $(-\infty; -6]$ і нарастае на прамежку $[-6; +\infty)$. Запішыце ўраўненне восі сіметрыі графіка функцыі $y = f(x)$.

3.118. Пабудуйце графік квадратычнай функцыі і знайдзіце прамежак нарастання функцыі:

а) $y = (x + 2)^2$; б) $y = -x^2 + 1$; в) $y = -2(x - 3)^2$.

3.119. Сярод дадзеных квадратычных функцый выберыце ўсе функцыі, якія спадаюць на прамежку $[-1; +\infty)$:

а) $y = (x - 1)^2 - 2$; б) $y = -(x + 1)^2 + 3$;

в) $y = -x^2 + 1$; г) $y = -x^2 - 2x - 6$.

Прывядзіце прыклад квадратычнай функцыі, якая нарастае на прамежку $(-\infty; 1]$.

3.120. Дадзена функцыя $f(x) = (x - 4)^2 + 5$. Не выконваючы вылічэнні, параўнайце:

а) $f(5)$ і $f(6)$; б) $f(2)$ і $f(3)$; в) $f(-2,4)$ і $f(3,75)$.

3.121. Дадзена функцыя $g(x) = -3x^2 - 12x + 2$. Не выконваючы вылічэнні, размясціце ў парадку нарастання:

а) $g(-3)$; $g(-4,8)$ і $g(-6,5)$; б) $g(10)$; $g(18)$ і $g(15)$.

3.122. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $y = x^2 + 2x - 8$; б) $y = -3x^2 + 10x - 3$;

в) $y = x^2 - 4x + 4$; г) $y = -2x^2 + 3x - 7$.

3.123. Знайдіть значення аргумента, при яких функція приймає додатні значення:

а) $y = (x - 1)^2 - 9$; б) $y = (x + 9)(3 - 2x)$;

в) $y = x^2 - 4$; г) $y = x(5 - x)$.

3.124. Приведіть приклад квадратичної функції, яка приймає адом'юня значення толькi на:

а) промiжку $(-5; 5)$; б) промiжках $(-\infty; 4)$ i $(7; +\infty)$.

3.125. Побудуйте графiк квадратичної функції $y = -x^2 + 2x$. Знайдіть:

а) значення аргумента, при яких функція приймає додатні значення;

б) промiжок, на якому функція нарастає.

3.126. Побудуйте графiк квадратичної функції $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ i записуйте: а) абсцисс визначення функції; б) мноства значення функції; в) найменше значення функції; г) ураунення осi симетрії парабали; д) нулі функції; е) промiжки знакапастаянства функції; ж) промiжки манатоннасці функції.

3.127. Побудуйте графiк квадратичної функції $y = -(x - 5)^2 + 1$ i записуйте: а) абсцисс визначення функції; б) мноства значення функції; в) найбільше значення функції; г) ураунення осi симетрії парабали; д) нулі функції; е) промiжки знакапастаянства функції; ж) промiжки манатоннасці функції.

 **3.128.** Знайдіть значення ліку m , при якому функція $y = 2x^2 - 3x + m$ приймає толькi додатні значення.



3.129. Виконайте дзеяння: $1\frac{5}{36} + 0,07 : (0,85 \cdot 0,4 - 0,4)$.

3.130. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{5^{13} \cdot (5^{10})^2}{5^{31}}$; б) $\frac{12^8}{27^2 \cdot 2^{15}}$.

3.131. Пазбаується ад ірацянальнасці у назоуіку дробу:

а) $\frac{14}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{11}{5 - \sqrt{3}}$.

3.132. Рашите няроунась $(0,2x - 3)^2 \geq (0,1x + 6)(0,4x - 1)$.

3.133. Крама закупа на аптовай базе 100 кг сліў па цане 3 р. за кілаграм. Падчас сартавання высветлілася, што 10 % пладоў страціла таварны выгляд. Якую мінімальную рознічную цану павінна ўстанавіць крама на слівы, каб атрымаць не менш за 20 % прыбытку?

§ 15. Квадратныя няроўнасці



3.134. Рашыце няроўнасць:

- а) $2x - 6 \leq 0$; б) $-7x - 4 > 2$; в) $8 + 2,5x > 0$.

3.135. Пры якім значэнні аргумента значэнні функцыі $y = 2x - 6$:

- а) дадатныя б) адмоўныя; в) недадатныя?

3.136. Калі для значэнняў аргумента з некаторага інтэрвалу функцыя прымае толькі дадатныя значэнні, то:

- а) графік функцыі на гэтым інтэрвале размешчаны вышэй за вось абсцыс;
 б) графік функцыі на гэтым інтэрвале размешчаны правей за вось ардынаты;
 в) размяшчэнне графіка нельга вызначыць.

Выберыце правільны адказ.



Разгледзім задачу. Дзяржаўнае прадпрыемства «Бабруйскі завод біятэхналогій» вырабляе гелі для рук «Чыстыя ручкі», максімальная сутачная вытворчасць — 3500 л. Калі вырабляецца x соцень літраў гелі ў дзень, сабекошт прадукцыі разлічваецца па формуле $C(x) = 0,3x^2 - 12x + 640$. Вызначыце аб'ём вытворчасці гелі, пры якім яго сабекошт не перавышаў бы 550 р. за 100 л.

Паколькі кожнаму значэнню аргумента x , якое не перавышае 3500 л, адпавядае значэнне $C(x)$, а па ўмове патрабуецца знайсці такія значэнні x , пры якіх сабекошт не перавышае 550 р. за 100 л, то трэба рашыць няроўнасць $C(x) \leq 550$, або $0,3x^2 - 12x + 640 \leq 550$, або $0,3x^2 - 12x + 90 \leq 0$. Атрыманая няроўнасць — **квадратная**.

Няроўнасці выгляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, дзе $a \neq 0$, называюцца **квадратнымі**.

Для того каб знайсці значэнні зменнай, пры якіх трохчлен $ax^2 + bx + c$ прымае дадатныя, адмоўныя, недадатныя або неадмоўныя значэнні, г. зн. рашыць квадратную няроўнасць, можна выкарыстаць уласцівасці функцыі $y = ax^2 + bx + c$.

Для рашэння квадратнай няроўнасці дастаткова пабудаваць схему графіка функцыі $y = ax^2 + bx + c$, вызначыўшы яе нулі.

Разгледзім прыклады рашэння квадратных няроўнасцей.

Рэшым няроўнасць $2x^2 - 5x + 3 > 0$.

Для рашэння няроўнасці дастаткова ведаць размяшчэнне пунктаў графіка квадратичнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$ адносна восі абсцыс. Таму знойдзем нулі функцыі: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$. Адзначым іх на восі абсцыс.

Вызначым напрамак галін параболы: $a = 2 > 0$ — галіны накіраваны ўверх.

Пабудуем схему графіка функцыі і вызначым, пры якіх значэннях аргумента парабала ляжыць вышэй за вось абсцыс, г. зн. $2x^2 - 5x + 3 > 0$ (рыс. 78). Атрымаем рашэнне няроўнасці:

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1,5; +\infty).$$

Адказ: $x \in (-\infty; 1) \cup (1,5; +\infty)$.

Рэшым няроўнасць $-2x^2 + 5x - 3 > 0$. Памножым абедзве часткі няроўнасці на -1 і атрымаем раўназначную няроўнасць $2x^2 - 5x + 3 < 0$.

Выкарыстаем схему графіка функцыі $y = 2x^2 - 5x + 3$ і вызначым, пры якіх значэннях аргумента парабала ляжыць ніжэй за вось абсцыс (гл. рыс. 78). Рашэннем няроўнасці $2x^2 - 5x + 3 < 0$ з'яўляецца інтэрвал $(1; 1,5)$.

Адказ: $x \in (1; 1,5)$.

Для рашэння няроўнасці $-x^2 + 3x - 4 > 0$ памножым абедзве яе часткі на -1 , атрымаем раўназначную няроўнасць $x^2 - 3x + 4 < 0$. Пабудуем схему графіка функцыі $y = x^2 - 3x + 4$ і вызначым, пры якіх значэннях аргумента значэнні функцыі $y = x^2 - 3x + 4$ адмоўныя, г. зн. пры якіх значэннях аргумента парабала ляжыць ніжэй за вось абсцыс. Галіны параболы накіраваны ўверх. Дыскрымінант ураўнення $x^2 - 3x + 4 = 0$

Квадратныя няроўнасці

$$3x^2 - 10x + 3 > 0$$

$$x^2 - 5 < 0$$

$$x^2 + 6x \geq 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

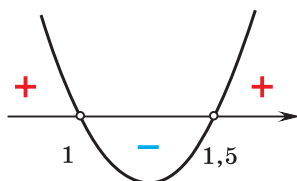
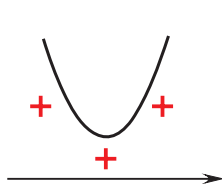
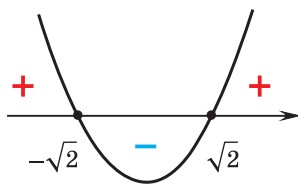


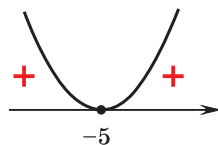
Рис. 78



Рыс. 79



Рыс. 80



Рыс. 81

адмоўны, значыць, графік функцыі не перасякае вось абсцыс (рыс. 79), парабола ляжыць вышэй за яе і пры ўсіх значэннях аргумента значэнні функцыі дадатныя. Такім чынам, няроўнасць $x^2 - 3x + 4 < 0$ не мае рашэнняў.

Адказ: $x \in \emptyset$.

Рэшым няроўнасць $3x^2 - 6 \geq 0$. Пабудуем схему графіка функцыі $y = 3x^2 - 6$. Нулі функцыі: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, галіны парабалы накіраваны ўверх. Парабола (рыс. 80) ляжыць не ніжэй за вось абсцыс пры $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$. Значыць, аб'яднанне гэтых лікавых праменяў з'яўляецца рашэннем няроўнасці.

Адказ: $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

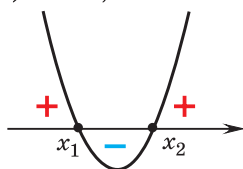
Рэшым няроўнасць $(x + 5)^2 \leq 0$. Пабудуем схему графіка функцыі $y = (x + 5)^2$. Нуль функцыі $x = -5$, галіны парабалы накіраваны ўверх (рыс. 81). Няроўнасць $(x + 5)^2 \leq 0$ задавальняе толькі адно значэнне зменнай $x = -5$.

Адказ: $x \in \{-5\}$.

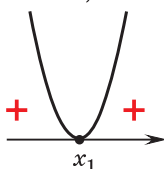
Такім чынам, для таго каб рашыць квадратную няроўнасць, дастаткова пабудаваць схематычны відарыс графіка функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ (рыс. 82) і ў адпаведнасці са знакам няроўнасці прааналізаваць размяшчэнне графіка гэтай функцыі адносна восі абсцыс.

Калі ў квадратнай няроўнасці першы каэфіцыент адмоўны, то, памножыўшы абедзве часткі няроўнасці на -1 , можна перайсці да раўназначнай няроўнасці.

а) $a > 0, D > 0$

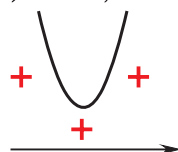


б) $a > 0, D = 0$



Рыс. 82

в) $a > 0, D < 0$



⌘ Каб рашыць квадратную няроўнасць, можна:

① Пабудаваць схему графіка функцыі $y = ax^2 + bx + c$.

② У адпаведнасці са знакам няроўнасці вызначыць значэнні зменнай x , якія задавальняюць няроўнасць.

③ Запісаць адказ.

Рашыце няроўнасць

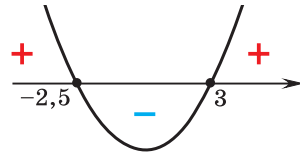
$$2x^2 - x - 15 \leq 0.$$

① Знойдзем нулі функцыі

$$y = 2x^2 - x - 15:$$

$$x_1 = 3, x_2 = -2,5.$$

Галіны парабалы накіраваны ўверх ($a = 2 > 0$).



② Адмоўныя значэнні функцыі $y = 2x^2 - x - 15$ прымае паміж нулямі.

Паколькі дадзеная няроўнасць нястрогая, рашэннем няроўнасці з'яўляецца адрэзак $[-2,5; 3]$.

③ Адказ: $x \in [-2,5; 3]$.



Рашэнне квадратных няроўнасцей

1. Выкарыстаўшы алгарытм, рашыце няроўнасць $-3x^2 + x + 4 < 0$.

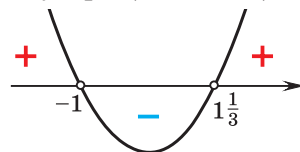
Памножым абедзве часткі няроўнасці на -1 , атрымаем раўназначную няроўнасць $3x^2 - x - 4 > 0$.

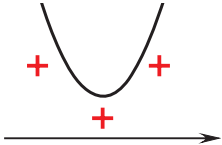
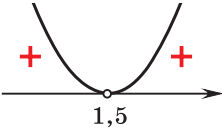
① Знойдзем нулі функцыі

$$y = 3x^2 - x - 4:$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

Галіны парабалы накіраваны ўверх ($a = 3 > 0$).



	② Дадатныя значэнні функцыя $y = 3x^2 - x - 4$ прымае злева ад меншага кораня або справа ад большага. ③ <i>Адказ:</i> $x \in (-\infty; -1) \cup (1\frac{1}{3}; +\infty)$.
2. Рашыце няроўнасць: а) $x^2 + 3 > 0$; б) $4x^2 - 12x + 9 > 0$.	а) ① Ураўненне $x^2 + 3 = 0$ не мае каранёў, г. зн. функцыя $y = x^2 + 3$ не мае нулёў. Галіны парабалы накіраваны ўверх.  ② Дадатныя значэнні функцыя $y = x^2 + 3$ прымае пры ўсіх значэннях аргумента. ③ <i>Адказ:</i> $x \in \mathbb{R}$. б) ① Знойдзем нулі функцыі $y = 4x^2 - 12x + 9$: $4x^2 - 12x + 9 = 0$; $(2x - 3)^2 = 0$; $x = 1,5$. Галіны парабалы накіраваны ўверх.  ② Дадатныя значэнні функцыя прымае пры ўсіх значэннях x, акрамя $x = 1,5$. ③ <i>Адказ:</i> $x \in (-\infty; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$.

- ?** 1. Калі парабола $y = ax^2 + bx + c$ размешчана вышэй за вось абсцыс, то няроўнасць $ax^2 + bx + c \leq 0$:
- а) мае адно рашэнне;
 - б) не мае рашэнняў;
 - в) мае бясконца многа рашэнняў.
- Выберыце правільны адказ.
2. Калі галіны парабалы $y = ax^2 + bx + c$ накіраваны ўверх, то няроўнасць $ax^2 + bx + c > 0$ можа:
- а) мець адно рашэнне;
 - б) не мець рашэнняў;
 - в) мець бясконца многа рашэнняў.
- Выберыце правільны адказ.



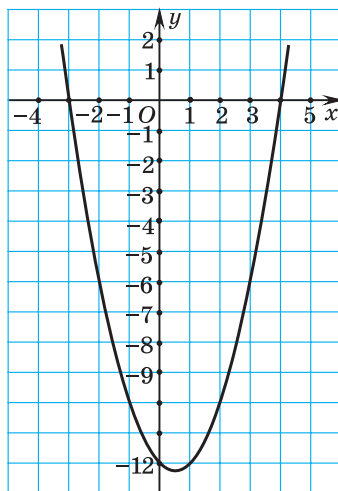
3.137. Выкарыстаўшы азначэнне квадратнай няроўнасці, сярод дадзеных няроўнасцей выберыце квадратныя:

- а) $8x^2 + 5x - 4 \leq 0$;
- б) $-3x^2 + 9x - 1 > 0$;
- в) $x^2 + 7 \geq 0$;
- г) $6x + 25 \leq 0$;
- д) $-10x^2 + 7x < 0$;
- е) $18 - x > 0$.

Прывядзіце па два прыклады строгіх і нястрогіх квадратных няроўнасцей.

3.138. На рысунку 83 паказаны графік функцыі $y = x^2 - x - 12$. Рашыце няроўнасць:

- а) $x^2 - x - 12 > 0$;
- б) $x^2 - x - 12 \geq 0$;
- в) $x^2 - x - 12 < 0$;
- г) $x^2 - x - 12 \leq 0$.



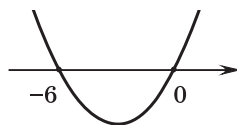
Рыс. 83

3.139. Выкарыстаўшы схему графіка функцыі $y = x^2 + 6x$, паказаную на рысунку 84, рашыце няроўнасць:

- а) $x^2 + 6x > 0$;
- б) $x^2 + 6x \geq 0$;
- в) $x^2 + 6x < 0$;
- г) $x^2 + 6x \leq 0$.

3.140. Рашыце квадратную няроўнасць, выкарыстаўшы алгарытм:

- а) $x^2 + 5x - 6 > 0$;
- б) $x^2 + 2x - 8 < 0$;



Рыс. 84

- в) $6x^2 + x \geq 0$; г) $x^2 - 25 \leq 0$;
 д) $x^2 - 14x + 49 > 0$; е) $9x^2 - 30x + 25 < 0$;
 ж) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$; з) $x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$;
 і) $2x^2 - 7x + 7 > 0$; к) $5x^2 - x + 7 < 0$;
 л) $8x^2 - 3x + 5 \geq 0$; м) $3x^2 - 2x + 9 \leq 0$.

3.141. Рашыце квадратную няроўнасць:

- а) $-3x^2 + 5x + 8 \geq 0$; б) $-x^2 + 6x - 8 < 0$;
 в) $-5x^2 - 6x + 8 \geq 0$; г) $-x^2 - 6x - 9 < 0$.

3.142. Прывядзіце прыклад квадратнай няроўнасці, рашэннем якой з'яўляюцца ўсе лікі.

3.143. Рашыце квадратную няроўнасць:

- а) $x^2 - 9 > 0$; б) $4 - x^2 > 0$; в) $-x^2 + 15 \leq 0$;
 г) $x^2 + 9 > 0$; д) $-2x^2 - 7 \geq 0$; е) $8x^2 - 2 > 0$;
 ж) $5x^2 \leq 0$; з) $-7x^2 < 0$; і) $-3x^2 \leq 0$.

3.144. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх двухчлен:

- а) $-x^2 + 16$ прымае недадатныя значэнні;
 б) $-5x^2 - 8$ прымае адмоўныя значэнні.

3.145. Рашыце квадратную няроўнасць:

- а) $x^2 - 5x < 0$; б) $x^2 + x \geq 0$; в) $8x - x^2 > 0$;
 г) $x - x^2 \leq 0$; д) $2x^2 - 18x \geq 0$; е) $0,3x + 9x^2 \leq 0$;
 ж) $3x - 5x^2 < 0$; з) $x - 9x^2 \geq 0$; і) $2x - 0,1x^2 > 0$.

3.146. Знайдзіце ўсе цэлыя рашэнні няроўнасці:

- а) $x^2 + 3x \leq 0$; б) $5x^2 + x - 4 \leq 0$;
 в) $13 - x^2 > 0$; г) $3 + x - 0,25x^2 > 0$.

3.147. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх функцыя:

- а) $y = -3x^2 + 7x - 4$ прымае адмоўныя значэнні;
 б) $y = 5x - x^2 - 4$ прымае неадмоўныя значэнні;
 в) $y = 9x - 2x^2$ прымае дадатныя значэнні.

3.148. Прывядзіце прыклад квадратнай няроўнасці, рашэннем якой з'яўляецца:

- а) адрэзак $[-3; 3]$; б) лік 8.

3.149. Рашыце няроўнасць:

- а) $-10x^2 \leq -9x - 1$; б) $x^2 > 4$; в) $x^2 \geq -6x$;
г) $4x^2 + 1 > 4x$; д) $3x + 2 \leq 2x^2$; е) $2x^2 \geq 14$;
ж) $3x + 6 < -4x^2$; з) $x \geq x^2$; і) $-x \leq 3x^2$.

3.150. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх значэнні трохчлена:

- а) $4x^2 + 3x + 5$ не перавышаюць 6;
б) $\frac{1}{3}x^2 - x + 8$ большыя за 8;
в) $-3x^2 + 8x + 6$ не меншыя за $-\frac{2}{3}$.

3.151. Рашыце няроўнасць:

- а) $x^2 - 2x - 5 < 0$; б) $-6x^2 \leq x - 3$;
г) $2x^2 - 3 > 4x$; г) $8x + 3 \geq x^2$.

3.152. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх мае сэнс выраз:

- а) $\sqrt{2 + x - x^2}$; б) $\sqrt{8x^2 - x}$;
в) $\sqrt{45 - 9x^2}$; г) $\sqrt{5x - 2x^2 - 2}$.

3.153. Прывядзіце два прыклады квадратных няроўнасцей, якія не маюць рашэнняў.

3.154. Рашыце няроўнасць:

- а) $2x^2 + 6x - 1 > x^2 - 2x - 16$;
б) $5x^2 - 12x \leq x^2 + 8x - 25$;
в) $12x^2 + 15 \geq 11x^2 + 7x - 6$;
г) $2x^2 + 4x - 2 > 5x^2 - 9x + 8$.

3.155. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх значэнні выразу:

- а) $3x^2 + 30x + 10$ большыя за значэнні выразу $x - x^2 + 3$;
б) $13x^2 - x + 9$ не перавышаюць значэнні выразу $7x^2 + 18x - 6$.

3.156. Рашыце няроўнасць:

- а) $(x + 3)^2 > 4$; б) $(2x - 1)^2 \leq 9$;
в) $36 < (x - 6)^2$; г) $(3x + 2)^2 \geq 25$.

3.157. На дачным участку плануюць пабудаваць аднапавярховы дом прамавугольнай формы, даўжыня якога на 6 м большая за шырыню. Знайдзіце, якую шырыню павінен мець дом, каб яго плошча была не меншая за 72 м^2 .

3.158. Выканайце неабходныя тоесныя пераўтварэнні і рашыце няроўнасць:

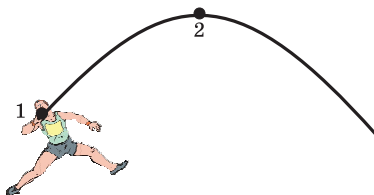
- а) $2x(x-1) < 3(x+1)$; б) $x(x+1) \geq 2(1-2x-x^2)$;
 в) $(x-8)(x+5) \geq -40$; г) $(x-1)(2x+3) < 3$;
 д) $(x-8)(x+2) \leq -6x$; е) $(2-x)(3x+1) < 5x-1$.

3.159. Вызначыце, ці існуюць такія значэнні аргумента, пры якіх функцыя $y = x^2 - 12x + 40$ прымае значэнні, меншыя за 5.

3.160. Знайдзіце найменшае і найбольшае цэлыя рашэнні няроўнасці:

- а) $(3x+1)(5x-2) \leq 12x^2 + 7x + 1$;
 б) $(4x-1)(x+7) < 2x^2 + 29x - 3$;
 в) $(x+4)(2x-3) \geq (5x-6)(x-3) + 10$;
 г) $(x-4)(3x+1) - (2x-6)(x-2) < 4$.

3.161. Траекторыя ядра, якое штурхнуў спартсмен пад вуглом да гарызонту пры здачы юніёрскага нарматыву, ёсць парабола (рыс. 85), зададзеная ўраўненнем $y = -x^2 + 3x + 1,2$, дзе x — час руху ядра (у секундах), а y — вышыня яго пад'ёму (у метрах) адносна зямлі. Вызначыце:



Рыс. 85

- а) ці здаў ён нарматыў, які складае 7 м;
 б) колькі часу ядро знаходзілася на вышыні, меншай чым у становішчы 2, але большай чым у становішчы 1.

Ці ведаеце вы, што пераможцам II Гульняў краін СНД у штурханні ядра стаў Анатоль Хоміч?

Выкарыстаўшы розныя крыніцы інфармацыі, знайдзіце звесткі аб беларускіх алімпійскіх чэмпіёнах.

3.162. Выкарыстаўшы формулы скарачанага множання, рашыце няроўнасць:

- а) $5(x-1)^2 \leq 5-6x$;
 б) $(x+1)^2 - 14 > 5(1+x)$;
 в) $(x-2)^2 \geq 1-(x-1)^2$;
 г) $(x+2)^2 + 13x < (3x-1)^2$;
 д) $2(2x+1) - (x-1)(x+1) \geq 2(x+1)^2$;
 е) $(5x+1)^2 + (1-5x)(5x+1) > 2(x^2+1)$.

3.163. Знайдіть значення змінної, при яких:

- а) значення квадрата двучлена $x + 1$ менші за значення квадрата двучлена $2x - 1$;
 б) значення квадрата двучлена $3x - 5$ не перевищують значення квадрата двучлена $x + 7$.

3.164. Докажіть, що при всіх значеннях змінної правельна нерівність $-3x^2 + x \leq \frac{1}{3}$.

3.165. Розв'яжіть нерівність:

- а) $\frac{x^2}{10} + 2 \leq \frac{9x}{10}$; б) $\frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4}$;
 в) $\frac{x^2+2}{14} > \frac{x^2-23}{4}$; г) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x-5}{4} < \frac{2x}{3}$;
 д) $\frac{x^2+2}{6} - \frac{3x-1}{8} \leq 1$; е) $2x^2 - \frac{x+1}{2} < \frac{x-3}{3}$.

3.166. Знайдіть значення аргумента, при яких значення функції:

- а) $y = x^2 - 0,25$ більші за значення функції $y = \frac{5-2x}{4}$;
 б) $y = \frac{x^2}{3}$ не менші за значення функції $y = 2x - 3$.

3.167. Розв'яжіть нерівність:

- а) $\frac{(x-2)^2}{2} < \frac{2x-4}{3}$; б) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{4} \leq 1-x$;
 в) $\frac{(2x-1)^2}{10} > \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{1-x}{2}$; г) $\frac{(x-1)^2}{2} + 7\frac{2}{3} \geq \frac{(x-7)^2}{4} + \frac{x^2-5x}{3}$.

 **3.168.** Знайдіть значення k , при яких рівняння $x^2 + kx + 9 = 0$ має два корені.

 **3.169.** Знайдіть значення a , при яких рівняння $x^2 + ax + 16 = 0$ не має коренів.



3.170. Використавши схему графіка функції $y = x^2 - 25$, показану на рисунку 86, розв'яжіть нерівність:

- а) $x^2 - 25 > 0$; б) $x^2 - 25 \geq 0$;
 в) $x^2 - 25 < 0$; г) $x^2 - 25 \leq 0$.

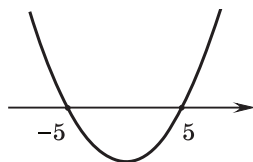


Рис. 86

3.171. Рашыце квадратную няроўнасць, выкарыстаўшы алгарытм:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| а) $x^2 + 6x - 7 \geq 0$; | б) $x^2 - 3x + 2 < 0$; |
| в) $x^2 - 7x > 0$; | г) $x^2 - 4 \leq 0$; |
| д) $x^2 - 8x + 16 > 0$; | е) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$; |
| ж) $8x^2 + 3 \geq 0$; | з) $3x^2 - x + 9 < 0$. |

3.172. Рашыце квадратную няроўнасць:

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| а) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; | б) $-x^2 + 4x + 5 < 0$; |
| в) $x^2 - 1 \geq 0$; | г) $16 - x^2 > 0$; |
| д) $3x - 9x^2 > 0$; | е) $-2x^2 - 5x + 3 \leq 0$; |
| ж) $7x^2 - x + 1 > 0$; | з) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$. |

3.173. Знайдзіце ўсе цэлыя рашэнні няроўнасці:

- | | |
|---------------------|------------------------------|
| а) $x^2 - 4x < 0$; | б) $x^2 - 5x - 6 \leq 0$; |
| в) $x^2 - 6 < 0$; | г) $-4x^2 + 3x + 1 \geq 0$. |

3.174. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх функцыя:

- а) $y = 4 + x^2 - 5x$ прымае дадатныя значэнні;
б) $y = 36 - 4x^2$ прымае неадмоўныя значэнні.

3.175. Рашыце няроўнасць:

- | | |
|---------------------------|---------------------|
| а) $-9x^2 \geq -8x - 1$; | б) $x^2 < 36$; |
| в) $x^2 \leq 3x$; | г) $x^2 + 9 > 6x$; |
| д) $3x + 7 < -2x^2$; | е) $3x^2 \leq 15$; |
| ж) $5x^2 + 1 \geq 2x$; | з) $7x \leq x^2$. |

3.176. Рашыце няроўнасць:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| а) $x^2 + 2x - 7 < 0$; | б) $7x - 1 \leq 5x^2$. |
|-------------------------|-------------------------|

3.177. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх мае сэнс выраз:

- | | |
|------------------------------|-------------------------|
| а) $\sqrt{10x - 3 - 3x^2}$; | б) $\sqrt{5x - 3x^2}$. |
|------------------------------|-------------------------|

3.178. Рашыце няроўнасць:

- | |
|---|
| а) $4x^2 - 7x + 7 > 3x^2 - 11x + 52$; |
| б) $10x^2 + 8x - 2 \leq x^2 - 16x - 18$. |

3.179. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх значэнні двух-члена $6x^2 - 4x$ меншыя за значэнні трохчлена $4x^2 + 3x + 9$.

3.180. Рашыце няроўнасць:

- а) $(x - 2)^2 < 1$; б) $(4x - 1)^2 \geq 9$;
 в) $4 > (x + 3)^2$; г) $(3x - 4)^2 \leq 16$.

3.181. Напярэдадні правядзення цырымоніі ўзнагароджання пераможцаў штогадовага рэспубліканскага фестывалю-кірмашу працаўнікоў сяла «Дажынкi» ў зале для правядзення ўрачыстасцей расстаўляюць крэслы. Колькасць крэслаў у кожным радзе павінна быць на 15 большай, чым колькасць радоў у зале. Знайдзіце максімальную колькасць радоў крэслаў, якія можна ўстанавіць, калі ў зале адначасова можна размясціць не больш за 250 чалавек.

3.182. Знайдзіце найменшае і найбольшае цэлыя рашэнні няроўнасці:

- а) $2(2x^2 - 7) < -8x - 9$; б) $x(x - 4) \leq 2x - 8$;
 в) $(x + 5)(x - 7) \leq -35$; г) $(x - 8)(x + 3) < 1 - 5x$.

3.183. Рашыце няроўнасць:

- а) $(x + 3)(x - 2) \leq 6 - x^2 - x$;
 б) $2x(3x + 1) > (3x - 1)(x + 3)$.

3.184. Выкарыстаўшы формулы скарачанага множання, рашыце няроўнасць:

- а) $(x + 4)^2 \geq 6x + 40$;
 б) $(2x + 1)^2 + 2 \leq 2(x - 3x^2)$;
 в) $(3x + 1)^2 + 33 > (2x + 5)^2$;
 г) $(x - 1)(x + 1) > x^2 + 4 - (x - 5)^2$.

3.185. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх значэнні квадрата двухчлена $3x - 2$ не перавышаюць значэнні выразу $3x^2 - 10x + 8$.

3.186. Дакажыце, што не існуе такіх значэнняў зменнай, пры якіх выконваецца няроўнасць $-5x^2 + 2x > \frac{1}{5}$.

3.187. Рашыце няроўнасць:

- а) $\frac{x^2}{2} \leq \frac{11x - 4}{5}$; б) $\frac{x - 1}{3} + \frac{x^2}{5} \geq \frac{7}{15}$;
 в) $\frac{x^2 - 5}{2} - \frac{x - 8}{5} < 3$; г) $\frac{x^2 + 6x}{12} - \frac{2x + 3}{4} > 6$.

3.188. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх значэнні функцыі $y = x^2 + 2x$ не перавышаюць значэнні функцыі $y = \frac{7x + 3}{4}$.

3.189. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{(x+2)(x+3)}{15} - \frac{x-1}{3} > \frac{x+3}{5};$

б) $\frac{(2x-5)^2}{8} \geq 5 - 3x;$

в) $\frac{3-x^2}{4} - \frac{x}{3} \geq \frac{(x-3)^2}{12};$

г) $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{3x+1}{6} > \frac{(x+1)^2}{3}.$



3.190. Знайдзіце такія значэнні a , пры якіх ураўненне $2x^2 + ax + 2 = 0$ мае два розныя карані.



3.191. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{\text{НАК}(25,40)}{\text{НАД}(25,40)}.$

3.192. Вылічыце:

а) $\frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}};$

б) $\frac{0,125^3 \cdot 32^2}{0,5^{-2}}.$

3.193. Рашыце сістэму ўраўненняў
$$\begin{cases} 5x + \frac{1}{2}y = -3, \\ -4x - \frac{3}{4}y = 1. \end{cases}$$

3.194. Па кальцавым маршруце курсіравалі два аўтобусы з інтэрвалам 50 мін. У сувязі з увядзеннем у эксплуатацыю новага жыллага раёна на маршрут плануецца вывесці яшчэ тры аўтобусы. Якім стане інтэрвал руху пасля павелічэння колькасці аўтобусаў на маршруце? На колькі працэнтаў скароціцца інтэрвал руху?

3.195. Раскладзіце на множнікі:

а) $y^3 - 49y;$

б) $-3a^2 - 6ab - 3b^2;$

в) $(a-6)^2 - 9a^2;$

г) $c^2 - b^2 - c + b.$

3.196. Выканайце дзеянні:

а) $(3\sqrt{2} - 2)(4\sqrt{2} + 7) - 13\sqrt{2};$

б) $(3\sqrt{2} + 2)^2 + (6 - \sqrt{2})^2.$

3.197. Па даных Белстата колькасць насельніцтва Беларусі на 1 студзеня 2024 г. складала каля 9 156 000 чал., а яе плошча прыблізна роўна 207 600 км². Знайдзіце шчыльнасць насельніцтва Беларусі (колькасць жыхароў, якая прыпадае на 1 км² тэрыторыі). З дапамогай даведчанай літаратуры знайдзіце інфармацыю аб шчыльнасці насельніцтва ў кожнай вобласці Беларусі. Падайце атрыманыя вынікі ў выглядзе слупковай дыяграмы.

§ 16. Сістэмы і сукупнасці квадратных няроўнасцей



3.198. Рашыце сістэму няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} -2(x - 2,5) > 0, \\ 2x - (2 - x) \leq 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -2x - 2,6 \leq 0, \\ x - 2(1 - 3x) \leq 0. \end{cases}$$

3.199. Знайдзіце рашэнне сукупнасці няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 4 \leq -15, \\ 2(x - 3) > 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 4 \geq -15, \\ 2(x - 3) < 8. \end{cases}$$



Разгледзім рашэнне некалькіх задач.

Задача 1. Плошча ўчастка для дзіцячай пляцоўкі павінна быць не меншай за 39 м^2 і не большай за 144 м^2 . Якія памеры ўчастка, калі яго даўжыня на 10 м большая за шырыню?

Рашэнне. Абазначым шырыню пляцоўкі праз $x \text{ м}$, тады яе даўжыня роўна $(x + 10) \text{ м}$, а плошча — $x(x + 10) \text{ м}^2$. Па ўмове задачы адначасова павінны выконвацца дзве ўмовы: $x(x + 10) \geq 39$ і $x(x + 10) \leq 144$. Аб'яднаем гэтыя ўмовы ў сістэму

$$\begin{cases} x(x + 10) \geq 39, \\ x(x + 10) \leq 144. \end{cases}$$

Рашым кожную няроўнасць сістэмы:

$$1) \ x(x + 10) \geq 39; \ x^2 + 10x - 39 \geq 0; \ x_1 = -13, \ x_2 = 3; \\ x \in (-\infty; -13] \cup [3; +\infty);$$

$$2) \ x(x + 10) \leq 144; \ x^2 + 10x - 144 \leq 0; \ x_1 = -18, \ x_2 = 8; \\ x \in [-18; 8].$$

Знойдзем перасячэнне мностваў рашэнняў першай і другой няроўнасцей (рыс. 87). Рашэннем сістэмы няроўнасцей з'яўляецца аб'яднанне адрэзкаў $[-18; -13] \cup [3; 8]$.



Рыс. 87

Умову задачы задавальняюць толькі дадатныя значэнні x , г. зн. $x \in [3; 8]$.

Адказ: шырыня пляцоўкі можа змяняцца ад 3 да 8 м , а адпаведныя значэнні даўжыні — ад 13 да 18 м .

Задача 2. Пры планаванні залы для канферэнцый, разлічанай не больш чым на 360 месцаў, праектнай арганізацыі трэба было ўлічыць наступныя ўмовы: колькасць радоў павінна быць або на два меншай, чым колькасць месцаў у радзе,

або на 9 большай. Якая колькасць радоў можа быць у зале, калі іх павінна быць не менш за 10?

Рашэнне. Абзначым колькасць радоў у зале праз x . Па першай умове атрымаем $x(x+2) \leq 360$, па другой умове — $x(x-9) \leq 360$. Паколькі павінна выконвацца або першая, або другая ўмова, то аб'яднаем абедзве ўмовы ў сукупнасць

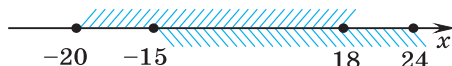
$$\begin{cases} x(x+2) \leq 360, \\ x(x-9) \leq 360. \end{cases}$$

Рэшым кожную няроўнасць сукупнасці:

1) $x(x+2) \leq 360$; $x^2 + 2x - 360 \leq 0$; $x_1 = -20$, $x_2 = 18$;
 $x \in [-20; 18]$;

2) $x(x-9) \leq 360$; $x^2 - 9x - 360 \leq 0$; $x_1 = -15$, $x_2 = 24$;
 $x \in [-15; 24]$.

Знойдзем аб'яднанне мностваў рашэнняў першай і другой няроўнасцей (рыс. 88). Рашэннем сукупнасці няроўнасцей з'яўляецца адрэзак $x \in [-20; 24]$.



Рыс. 88

Па ўмове задачы колькасць радоў павінна быць не меншай за 10, колькасць радоў з'яўляецца натуральным лікам. Тады $x \in \{10, 11, \dots, 24\}$.

Адказ: $x \in \{10, 11, \dots, 24\}$.



Сістэмы квадратных няроўнасцей

1. Рашыце сістэму няроўнасцей

$$\begin{cases} 4x^2 \geq -(x-3), \\ x^2 \leq 6. \end{cases}$$

Рэшым кожную няроўнасць сістэмы:

1) $4x^2 \geq -(x-3)$;

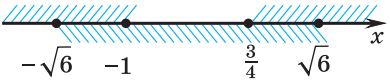
$$4x^2 + x - 3 \geq 0;$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{3}{4} \quad \text{— нулі функцыі } y = 4x^2 + x - 3.$$

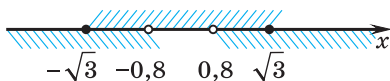
Рашэннем няроўнасці $4x^2 \geq -(x-3)$ з'яўляецца аб'яднанне прамежкаў $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

2) $x^2 \leq 6$; $x^2 - 6 \leq 0$;

$$x_1 = -\sqrt{6}, \quad x_2 = \sqrt{6} \quad \text{— нулі функцыі } y = x^2 - 6.$$

	Рашэннем няроўнасці $x^2 - 6 \leq 0$ з'яўляецца адрэзак $[-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$. Знойдзем перасячэнне мностваў рашэнняў няроўнасцей сістэмы.  Рашэнне сістэмы няроўнасцей: $[-\sqrt{6}; -1] \cup [\frac{3}{4}; \sqrt{6}]$. Адказ: $[-\sqrt{6}; -1] \cup [\frac{3}{4}; \sqrt{6}]$.
Сукупнасці квадратных няроўнасцей	
2. Знайдзіце рашэнне сукупнасці няроўнасцей $\begin{cases} 3x^2 \leq 9, \\ 4x^2 > 2,56. \end{cases}$	Рэшым кожную няроўнасць сукупнасці: 1) $3x^2 \leq 9$; $x^2 \leq 3$; $x^2 - 3 \leq 0$. Нулі функцыі $y = x^2 - 3$: $x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = \sqrt{3}$. Рашэннем няроўнасці $x^2 - 3 \leq 0$ з'яўляецца адрэзак $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. 2) $4x^2 > 2,56$; $x^2 > 0,64$; $x^2 - 0,64 > 0$. Нулі функцыі $y = x^2 - 0,64$: $x_1 = -0,8$; $x_2 = 0,8$. Рашэннем няроўнасці $x^2 - 0,64 > 0$ з'яўляецца аб'яднанне пражкаў: $(-\infty; -0,8) \cup (0,8; +\infty)$.

Знойдзем аб'яднанне мностваў рашэнняў першай і другой няроўнасцей.



Аб'яднаннем мностваў з'яўляецца ўся лікавая прамая.

Адказ: $x \in \mathbb{R}$.

- ?** 1. Ці можа рашэннем сістэмы квадратных няроўнасцей быць пустое мноства?
 2. Ці можа рашэннем сістэмы квадратных няроўнасцей быць мноства, якое складаецца з аднаго ліку?
 3. Ці можа рашэннем сукупнасці квадратных няроўнасцей быць мноства, якое складаецца з аднаго ліку?



3.200. Рашыце сістэму квадратных няроўнасцей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ x^2 - 4x - 5 < 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x^2 - x - 20 \leq 0, \\ x^2 + 3x - 18 \geq 0; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x^2 - x - 12 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \geq 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x^2 + 7x - 8 \leq 0, \\ x^2 + 8x + 12 < 0. \end{cases} \end{array}$$

3.201. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх функцыя $y = x^2 + x$ прымае адмоўныя значэнні, а функцыя $y = -x^2 + 2x + 3$ прымае неадмоўныя значэнні.

3.202. Рашыце сістэму няроўнасцей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3x^2 - x - 4 < 0, \\ x > 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 \geq 0, \\ x - 1 \leq 0; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 > 0, \\ 3 - 2x \geq 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 \leq 0, \\ 4 - 5x > 0. \end{cases} \end{array}$$

3.203. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх і функцыя $y = 2x^2 + 9x + 4$, і функцыя $y = 6 - 5x$ прымаюць неадмоўныя значэнні.

3.204. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне сістэмы няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 8x \leq 0, \\ x^2 + 3x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - 25 > 0, \\ x^2 - 49 \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 - 6x \leq 0, \\ 4x^2 - 9 > 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 - 5 \leq 0, \\ x^2 + x \geq 0. \end{cases}$$

3.205. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $y = -x^2$ размешчаны вышэй за прамую $y = -9$ і ніжэй за прамую $y = -1$.

3.206. Рашыце сістэму квадратных няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 2x - 24 \leq 0, \\ x^2 \geq 16; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x^2 + x - 3 \leq 0, \\ -x^2 < 2x. \end{cases}$$

3.207. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

$$\text{а) } \sqrt{-x^2 + 3x + 4} + \sqrt{2 - x}; \quad \text{б) } \sqrt{36 - x^2} - \sqrt{2x - 12}.$$

3.208. У лекцыйнай аўдыторыі колькасць радоў на 8 большая за колькасць месцаў у адным радзе, пры гэтым агульная колькасць месцаў у аўдыторыі не перавышае 105, а колькасць радоў не меншая за 9. Якая найбольшая магчымая колькасць радоў у гэтай аўдыторыі?

3.209. Знайдзіце колькасць цэлых рашэнняў сістэмы няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ \frac{x-1}{4} > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x-1}{4} + \frac{x+2}{6} < 1, \\ 9 - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

3.210. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне сістэмы няроўнасцей
$$\begin{cases} -2x + 3 \geq 3(x + 2), \\ -x^2 - 4x > 0. \end{cases}$$

3.211. Рашыце двайную няроўнасць, замяніўшы яе сістэмай няроўнасцей:

$$\text{а) } 0 \leq x^2 + 8x < 9;$$

$$\text{б) } 3 < x^2 - 8x + 23 \leq 16;$$

$$\text{в) } 2x < x^2 - 24 < 10x;$$

$$\text{г) } 2x - 1 < x^2 \leq 4x - 3.$$

3.212. Рашыце сістэму квадратных няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} (x+2)^2 \leq (2x-3)^2 - 8(x-5), \\ x^2 - x - 42 < 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x-2)^2 < (2x+3)^2 - 8(x+5), \\ x^2 + x - 42 \leq 0. \end{cases}$$

3.213. Рашыце сукупнасць квадратных няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 2x - 35 \geq 0, \\ x^2 + 10x + 9 > 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 > 25, \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0. \end{cases}$$

3.214. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $y = x^2 - x$ размешчаны вышэй за прамую $y = 20$ або ніжэй за прамую $y = 12$.

3.215. Рашыце сукупнасць квадратных няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x^2 + 2x + 7 < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ 2x^2 + x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

3.216. Для праходжання практыкі студэнт можа выбраць адзін з двух графікаў: колькасць дзён у тыдзень на 1 меншая, чым колькасць гадзін працы ў дзень, або колькасць гадзін працы на 1 меншая, чым колькасць працоўных дзён у тыдзень. Колькасць працоўных гадзін павінна быць не меншай за 30. Колькі працоўных дзён можа быць у студэнта на практыцы?

3.217. Рашыце сукупнасць няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 7x - 8 \geq 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 - 12x \leq 0, \\ 15 - 3x > 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ 1 - 2x \leq 0. \end{cases}$$



3.218. Рашыце сістэму квадратных няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 5x - 24 > 0, \\ x^2 - 5x - 36 \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 3x - 10 > 0. \end{cases}$$

3.219. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх функцыя $y = x^2 + x - 6$ прымае неадмоўныя значэнні, а функцыя $y = -x^2 + 4x$ — дадатныя значэнні.

3.220. Рашыце сістэму няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 < 0, \\ x \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 \geq 0, \\ 7 - 4x < 0. \end{cases}$$

3.221. Знайдзіце найменшае і найбольшае цэлыя рашэнні сістэмы няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 6x > 0, \\ x^2 - 2x \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 36 < 0, \\ 9x^2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

3.222. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $y = 2x^2$ размешчаны вышэй за прамую $y = 8$ і ніжэй за прамую $y = 18$.

3.223. Рашыце сістэму квадратных няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0, \\ x^2 \leq 25; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x^2 - 9x + 4 \geq 0, \\ -x^2 > -4x. \end{cases}$$

3.224. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

$$\text{а) } \sqrt{-x^2 + x + 2} + \sqrt{1 - x}; \quad \text{б) } \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{2x - 10}.$$

3.225. Вучні 9-х класаў вырашылі ўзяць удзел у рэспубліканскай навагодняй дабрачыннай акцыі «Нашы дзеці» і падрыхтавалі падарункі. Пры гэтым яны заўважылі, што калі падарункаў будзе столькі ж, колькі цукерак у кожным падарунку, то колькасць усіх цукерак не перавысіць 400, а калі цукерак у кожным падарунку будзе на 10 менш, чым падарункаў, то колькасць цукерак не перавысіць 144. Якая максімальная магчымая колькасць падарункаў?

3.226. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне сістэмы няроўнасцей
$$\begin{cases} 2(1 - x) < 7x + 5, \\ 4 - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

3.227. Рашыце двайную няроўнасць, замяніўшы яе сістэмай няроўнасцей:

$$\text{а) } 0 < x^2 - 6x \leq 7; \quad \text{б) } x + 2 < x^2 \leq 16.$$

3.228. Рашыце сукупнасць квадратных няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0, \\ x^2 - 11x + 28 < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 4 \leq 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0. \end{cases}$$

3.229. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $y = -3x^2$ размешчаны вышэй за прамую $y = -3$ або ніжэй за прамую $y = -12$.

3.230. Рашыце сукупнасць квадратных няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x^2 - x + 3 \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 \leq 0, \\ x^2 + 3x + 7 > 0. \end{cases}$$

3.231. Рашыце сукупнасць няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x + 2 \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 36 \leq 0, \\ 5 - 2x > 0. \end{cases}$$



3.232. Вылічыце:

$$\text{а) } \sqrt{1\frac{24}{25}} - \frac{1}{7}\sqrt{1,96}; \quad \text{б) } \frac{3\sqrt{6,25} - 2\sqrt{3,24}}{\sqrt{900}}.$$

3.233. Параўнайце значэнні выказаў $a^{-3} - b^{-3}$ і $(a - b)^{-3}$ пры $a = 0,5$; $b = 0,25$.

3.234. Раскладзіце на множнікі квадратны трохчлен:

$$\text{а) } x^2 + 7x - 18; \quad \text{б) } 5x^2 - 14x - 3; \quad \text{в) } -25x^2 + 10x - 1.$$

3.235. Рыхтуючыся да алімпіяды па матэматыцы, да якой заставалася 17 дзён, васьмікласнік запланаваў рашаць кожны дзень аднолькавую колькасць задач. Рашэнне задач так яго захапіла, што ён рашаў штодзень на 5 задач больш, чым планаваў, і таму за 5 дзён да пачатку алімпіяды папрасіў у настаўніка дадатковае заданне для падрыхтоўкі. Колькі задач рашаў васьмікласнік штодзень?

3.236. Функцыя зададзена формулай $y = -8$. Выберыце ўсе правільныя сцверджанні: а) графік функцыі праходзіць праз пункт $A(100; -8)$; б) функцыя не мае нулёў; в) графік функцыі праходзіць праз пачатак каардынат; г) графік функцыі сіметрычны адносна восі ардынат; д) графік функцыі не перасякае вось абсцыс.

3.237. Выканайце замену зменнай і рашыце ўраўненне $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- умець адрозніваць квадратичную функцыю ў розных формах яе запісу;

- умець знаходзіць:

- нулі квадратичнай функцыі;

- прамежкі манатоннасці квадратичнай функцыі;

- прамежкі знакапастаянства квадратичнай функцыі;

- найбольшае або найменшае значэнне квадратичнай функцыі;

- ведаць алгарытм пабудовы графіка квадратичнай функцыі і ўмець будаваць парабалу па ўраўненні квадратичнай функцыі, запісаным у розных формах;

- ведаць, якія рэальныя працэсы можна апісваць пры дапамозе квадратичнай функцыі;

- ведаць алгарытм рашэння квадратных няроўнасцей і ўмець рашаць квадратныя няроўнасці;

- умець рашаць сістэмы і сукупнасці квадратных няроўнасцей.

Я правяраю свае веды

1. Якую функцыю называюць квадратичнай? Сярод дадзеных функцый выберыце квадратичныя:

а) $y = -x^2 - 8x + 4$;

б) $y = x^2 + 2x$;

в) $y = -7x^2 - 1$;

г) $y = -4x + 3$;

д) $y = -8x^2$;

е) $y = x^3 - 4x^2$.

Як называецца графік квадратичнай функцыі?

2. На рысунку 89 паказаны графік адной з функцый:

а) $y = x - 4$;

б) $y = x^2 - 2x - 3$;

в) $y = 3x - 1$;

г) $y = -x^2 - x - 3$.

Вызначыце, графік якой функцыі паказаны на рысунку.

3. Квадратичная функцыя зададзена формулай $f(x) = -x^2 + 5x - 3$. Знайдзіце:

а) $f(0)$;

б) $f(2)$;

в) $f(-1)$.

4. Вызначыце напрамак галін і знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:

а) $y = 4x^2 - 8x + 1$;

б) $y = -3(x + 6)^2 + 5$;

в) $y = (x - 6)(x + 2)$;

г) $y = -5x^2 + 9$.

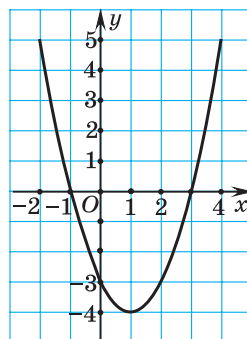


Рис. 89

5. Рашыце квадратную няроўнасць:

- а) $x^2 - 11x + 10 \geq 0$; б) $4x^2 + 9x + 2 < 0$;
 в) $x^2 + x + 6 > 0$; г) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$;
 д) $3x^2 - x < 0$; е) $4x^2 - 9 \geq 0$.

6. Пабудуйце графікі квадратычных функцый $f(x) = (x - 4)^2 - 1$, $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$ і $h(x) = (x - 2)(x + 6)$. Для кожнай з функцый назавіце: а) абсяг вызначэння функцыі; б) мноства значэнняў функцыі; в) найменшае (найбольшае) значэнне функцыі; г) ураўненне восі сіметрыі парабалы; д) нулі функцыі; е) прамежкі знакапастаянства функцыі; ж) прамежкі манатоннасці функцыі. Ці можна выканаць заданні а) — ж) без пабудовы графіка?

7. Рашыце сістэму квадратных няроўнасцей:

- а) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 < 0, \\ 6x - x^2 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0, \\ x^2 + 3x - 10 \leq 0. \end{cases}$

8. Рашыце сукупнасць няроўнасцей:

- а) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 < 0, \\ x + 4 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$

9. Фірма вырабляе ад 0 да 60 керамічных ваз за дзень. Прыбытак у рублях задаецца функцыяй $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, дзе x — колькасць ваз.

- а) Разлічыце прыбытак пры продажы 40 ваз.
 б) Знайдзіце колькасць вырабляемых ваз, найбольш выгадную для продажу.

10. Знайдзіце значэнні ліку t , пры якіх ураўненне:

- а) $2x^2 - tx + 8 = 0$ мае два карані;
 б) $5x^2 + tx + 3 = 0$ не мае каранёў.

Практычная матэматыка

1. Калі перыметр прамавугольнага ўчастка зямлі роўны 100 м, то якая яго найбольшая плошча?

2. Веласіпедыст, выязджаючы з горада са скорасцю $v_0 = 12 \frac{\text{км}}{\text{г}}$, пачынае разганяцца з пастаянным паскарэннем,

модуль якога $a = 2 \frac{\text{км}}{\text{г}^2}$, досягаючы скорасці $20 \frac{\text{км}}{\text{г}}$. Залежнасць шляху s (км) веласіпедыста ад часу t (г) яго руху за горадам задаецца выразам $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Вызначыце найбольшы час, на працягу якога веласіпедыст будзе знаходзіцца ў зоне пакрыцця сатавай сувязі, калі аператар гарантуе наяўнасць сувязі ў радыусе, не большым за 20 км ад горада.

3. Мяч кінулі вертыкальна ўверх з вышыні 1,2 м з пачатковай скорасцю, модуль якой $v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Залежнасць вышыні пад'ёму мяча над зямлёй h (м) ад часу палёту t (с) выражаецца формулай $h = -5t^2 + 10t + 1,2$. На якую максімальную вышыню паднімецца мяч?

4. Падчас вучэнняў даследуецца запуск ракеты ў ваду. З дапамогай камеры адзначаецца вышыня h , на якой знаходзіцца ракета ў залежнасці ад часу t (рыс. 90). Мяркуецца, што залежнасць вышыні h ад часу t задаецца ўраўненнем $h(t) = -\frac{1}{2}g(t - \alpha)^2 + \beta$, дзе g — паскарэнне свабоднага падзення, модуль якога можна лічыць роўным $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

- На якой вышыні знаходзіцца ракета праз 1 с? Праз 3 с?
- Знайдзіце h у верхнім пункце траекторыі.
- Знайдзіце значэнні α і β .
- Якая функцыя выгляду $h(t) = at + b$ можа мадэляваць рух для $t > 3$ с?

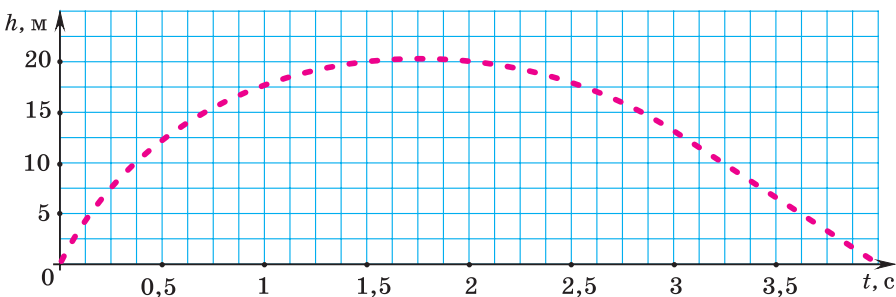


Рис. 90

Займальная матэматыка

Даследуем, абагульняем, робім вывады

Даследчае заданне 1. Вызначыце, якія часткі малюнка (рыс. 91) адпавядаюць наступным функцыям:

1) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 5, x \in [2; 8];$

2) $y = -(x-8)^2 + 7, x \in [7,5; 9];$

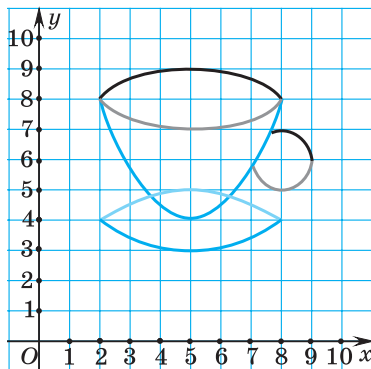
3) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 9, x \in [2; 8];$

4) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 + 7, x \in [2; 8];$

5) $y = (x-8)^2 + 5, x \in [7,2; 9];$

6) $y = \frac{4}{9}(x-5)^2 + 4, x \in [2; 8];$

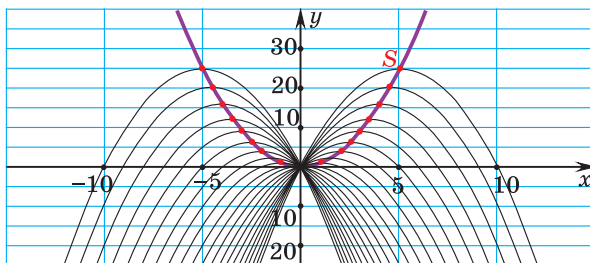
7) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 + 3, x \in [2; 8].$



Рыс. 91

Пры дапамозе графікаў пабудуйце свой малюнак.

Даследчае заданне 2. Разгледзім сям'ю графікаў функцый $y = -x^2 + kx$, дзе k можа змяняцца ад -10 да 10 з крокам 1. Адзначым вершыні парабал чырвонымі пунктамі і злучым іх плаўнай лініяй (рыс. 92). Якую гіпотэзу можна выказаць? Чаму?



Рыс. 92

Рыхтуем ся да алімпіяд

1. Удзельнікаў парада планавалі расставіць так, каб у кожным радзе стаяла па 24 чалавекі. Аднак аказалася, што не ўсе змогуць удзельнічаць у парадзе, і людзей пераставілі так, што колькасць радоў стала на 2 меншай, а колькасць чалавек у радзе — на 26 большай за новую колькасць радоў. Вызначыце, колькі чалавек прыбылі на парад, ведаючы, што калі б усе яны ўдзельнічалі, то іх можна было б расставіць так, каб колькасць радоў была роўна колькасці чалавек у радзе.

2. Вядома, што графік квадратычнай функцыі $y = x^2 + px + q$ датыкаецца да прамой $y = 2x + p$. Дакажыце, што ўсе такія квадратычныя функцыі маюць адно і тое ж найменшае значэнне.

Цікава ведаць. *Фаіна Міхайлаўна Кірылава* (29 верасня 1931 г., в. Зуеўка, Расія) — заслужаны дзеяч навукі Рэспублікі Беларусь, член-карэспандэнт Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі, доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар. Ф. М. Кірылава — вядомы ў нашай краіне і за яе межамі спецыяліст у тэорыі аптымальнага кіравання.



Задачы аптымальнага кіравання — гэта выбар найбольш выгадных рэжымаў кіравання складанымі дынамічнымі аб'ектамі. Напрыклад, да такіх задач адносяцца аптымізацыя траекторый палёту самалётаў і касмічных караблёў, паляпшэнне рэжымаў работы робатаў, аптымізацыя ядзерных рэактараў, выбар праграм лячэння на аснове матэматычных мадэляў імуннай і сардэчна-сасудзістай сістэм.