

ФУНКЦЫІ $y = \frac{k}{x}$, ДЗЕ $k \neq 0$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$

§ 17. Уласцівасці і графік функцыі $y = \frac{k}{x}$, дзе $k \neq 0$



4.1. Калі 4 снегаўборачныя машыны расчышчаюць трасу за 2 г, то за які час гэту ж работу выканаюць 6 машын такой жа магутнасці?

4.2. З дапамогай 10 камбайнаў аграфірма планавала сабраць ураджай за 6 дзён. Колькі такіх жа камбайнаў трэба дадаць, каб скараціць тэрміны ўборачнай на 2 дні?

4.3. У турыстычным кемпінгу для 24 чалавек зроблены запас харчавання на 9 дзён. На колькі дзён хопіць гэтага запasu, калі ў кемпінг прыбудзе 36 чалавек?



Многія задачы апісваюць адваротна прапарцыянальную залежнасць паміж велічынямі. Калі адну са зменных велічынь абазначыць праз x , а другую — праз y , то атрымаецца формула $y = \frac{k}{x}$, дзе $k \neq 0$, што задае функцыю, якая называецца **адваротнай прапарцыянальнасцю**.

Разгледзім уласцівасці і графік гэтай функцыі.

1. Абсяг вызначэння функцыі.

Паколькі дроб $\frac{k}{x}$ мае сэнс пры ўсіх значэннях x , акрамя нуля, то $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Графічна гэта азначае, што графік функцыі $y = \frac{k}{x}$ не перасякае вось ардынат.

2. Мноства значэнняў функцыі. Паколькі $k \neq 0$, то $\frac{k}{x} \neq 0$, значыць, $y \neq 0$, г. зн. $E = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Графічна гэта азначае, што графік функцыі не перасякае вось абсцыс.

3. Нулі функцыі. Паколькі $y \neq 0$, то функцыя $y = \frac{k}{x}$ не мае нулёў.

4. Прамежкі знакапастаянства функцыі. Калі $k > 0$, то $y > 0$ пры $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$ пры $x \in (-\infty; 0)$.

Калі $k < 0$, то $y > 0$ пры $x \in (-\infty; 0)$, $y < 0$ пры $x \in (0; +\infty)$.

**Адваротная
прапарцыянальнасць**

$$y = \frac{k}{x}, \text{ дзе } k \neq 0$$

5. Графік функцыі. Пабудуем графік функцыі $y = \frac{4}{x}$ ($k = 4 > 0$). Выберам некалькі значэнняў аргумента і складзем табліцу значэнняў функцыі.

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-1	-2	-4	4	2	1

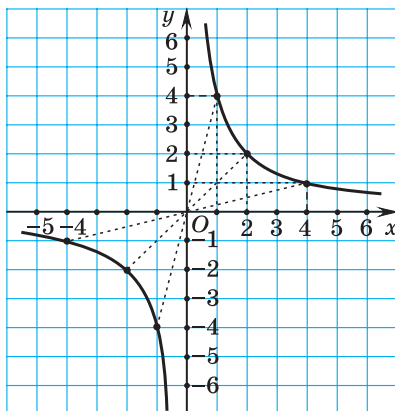
Адзначым атрыманыя пункты на каардынатнай плоскасці і злучым іх дзвюма плаўнымі лініямі (рыс. 93). Графік адваротнай прапарцыянальнасці называецца **гіпербалай** (ад грэч. *hyperbole* — пераход, лішак, перабольшванне). Гіпербала мае дзве галіны. Галіны гіпербалы сіметрычныя адносна пачатку каардынат.

Калі $k > 0$, то графік адваротнай прапарцыянальнасці размяшчаецца ў першай і трэцяй каардынатных чвэрцях.

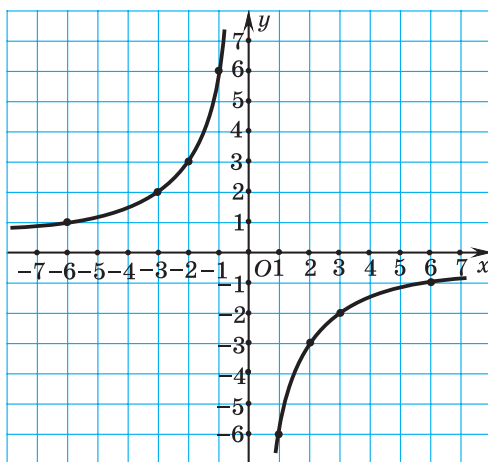
Пабудуем графік функцыі $y = -\frac{6}{x}$ ($k = -6 < 0$).

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1

Адзначым атрыманыя пункты на каардынатнай плоскасці і злучым іх дзвюма плаўнымі лініямі (рыс. 94).



Рыс. 93



Рыс. 94

Калі $k < 0$, то графік адваротнай прапарцыянальнасці размяшчаецца ў другой і чацвёртай каардынатных чвэрцях.

6. Прамежкі манатоннасці функцыі. Калі $k > 0$, то з павелічэннем значэнняў аргумента значэнні функцыі памяншаюцца на кожным з прамежкаў $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, г. зн. функцыя спадае на кожным з прамежкаў $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Калі $k < 0$, то з павелічэннем значэнняў аргумента значэнні функцыі павялічваюцца на кожным з прамежкаў $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, г. зн. функцыя $y = \frac{k}{x}$ нарастае на кожным з прамежкаў $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

	Уласцівасці адваротнай прапарцыянальнасці
1. Ці з'яўляецца функцыя адваротнай прапарцыянальнасцю: а) $y = \frac{0,4}{x}$; б) $y = -\frac{1}{x}$; в) $y = \frac{x}{5}$?	а) Функцыя $y = \frac{0,4}{x}$ мае выгляд $y = \frac{k}{x}$, дзе $k = 0,4$, значыць, яна з'яўляецца адваротнай прапарцыянальнасцю. б) Функцыя $y = -\frac{1}{x}$ мае выгляд $y = \frac{k}{x}$, дзе $k = -1$, значыць, яна з'яўляецца адваротнай прапарцыянальнасцю. в) Функцыя $y = \frac{x}{5}$ лінейная ($y = kx + b, k = \frac{1}{5}, b = 0$).
2. Якія з наступных функцый прымаюць дадатныя значэнні для $x \in (-\infty; 0)$: $y = \frac{1,8}{x}$; $y = -\frac{5}{x}$; $y = \frac{12}{x}$; $y = -\frac{3}{x}$?	Функцыя $y = \frac{k}{x}$, дзе $k \neq 0$, прымае дадатныя значэнні для $x \in (-\infty; 0)$, калі $k < 0$. Гэта ўмова выконваецца для функцый $y = -\frac{5}{x}$ і $y = -\frac{3}{x}$.
3. Параўнайце: а) $f(3,54)$ і $f(4,24)$, калі $f(x) = \frac{15}{x}$; б) $g(10,8)$ і $g(12,9)$, калі $g(x) = -\frac{29}{x}$.	а) Функцыя $f(x) = \frac{15}{x}$ спадае на прамежку $(0; +\infty)$. Паколькі $3,54 < 4,24$ і $\{3,54; 4,24\} \subset (0; +\infty)$, то $f(3,54) > f(4,24)$.

б) Функцыя $g(x) = -\frac{29}{x}$ нарастае на прамежку $(0; +\infty)$. Паколькі $10,8 < 12,9$ і $\{10,8; 12,9\} \subset (0; +\infty)$, то $g(10,8) < g(12,9)$.

Графік адваротнай прапарцыянальнасці

4. У якіх каардынатных чвэрцях размяшчаецца графік функцыі:

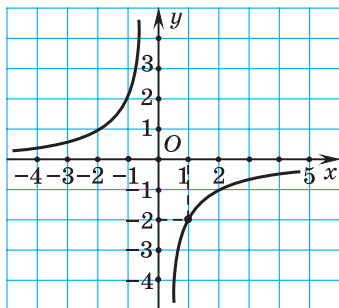
а) $f(x) = -\frac{24}{x}$;

б) $h(x) = \frac{4,5}{x}$?

а) Калі $k < 0$, то графік функцыі $y = \frac{k}{x}$ размяшчаецца ў другой і чацвёртай каардынатных чвэрцях, значыць, у гэтых чвэрцях размяшчаецца графік функцыі $f(x) = -\frac{24}{x}$.

б) Калі $k > 0$, то графік функцыі $y = \frac{k}{x}$ размяшчаецца ў першай і трэцяй каардынатных чвэрцях, значыць, у гэтых чвэрцях размяшчаецца графік функцыі $h(x) = \frac{4,5}{x}$.

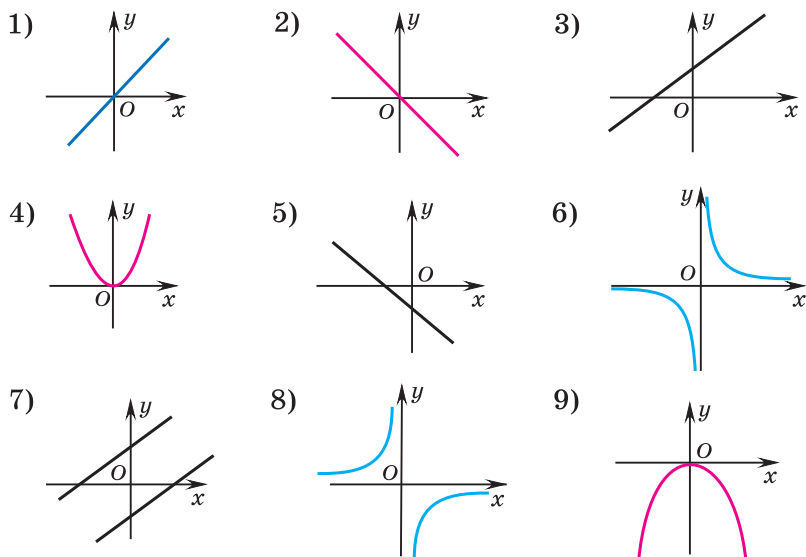
5. Па графіку адваротнай прапарцыянальнасці $y = \frac{k}{x}$ (рыс. 95) вызначыце каэфіцыент k .



Рыс. 95

На гіпербале выберам які-небудзь пункт і вызначым яго каардынаты, напрыклад пункт $(1; -2)$.

Падставім каардынаты гэтага пункта ва ўраўненне гіпербалы $y = \frac{k}{x}$, атрымаем ураўненне $-2 = \frac{k}{1}$, адкуль $k = -2$.



Рыс. 96



1. Вызначыце, якія з паказаных на рысунку 96 графікаў з'яўляюцца гіпербаламі.

2. Які з графікаў (гл. рыс. 96) адпавядае функцыі:

а) $y = \frac{k}{x}$, дзе $k > 0$;

б) $y = \frac{k}{x}$, дзе $k < 0$?



4.4. Выберыце функцыі, графікамі якіх з'яўляюцца гіпербалы:

а) $y = -\frac{11}{x}$;

б) $y = \frac{5}{x}$;

в) $y = \frac{x}{7}$;

г) $y = \frac{x}{9} - 6$;

д) $y = -\frac{1,8}{x}$;

е) $y = x^2 + 1$.

4.5. Для адваротнай прапарцыянальнасці $f(x) = -\frac{10}{x}$ знайдзіце:

а) $f(5)$, $f(-2)$ і $f(-20)$;

б) значэнне аргумента, пры якім $f(x) = -4$.

4.6. Выберыце пункты, якія належаць графіку адваротнай прапарцыянальнасці $y = \frac{45}{x}$:

а) $A(45; 1)$;

б) $B(-10; -4,5)$;

в) $C(0,1; 4,5)$;

г) $D(-2; 22,5)$;

д) $E(0,45; 100)$;

е) $F(2; 90)$.

4.7. Для кожнай з функцый $f(x) = -\frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{4,6}{x}$; $h(x) = -\frac{0,3}{x}$ і $p(x) = \frac{39}{x}$ знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх функцыя прымае адмоўныя значэнні. Прыведзіце прыклад адваротнай прапарцыянальнасці, якая прымае дадатныя значэнні пры $x \in (0; +\infty)$.

4.8. Адваротная прапарцыянальнасць зададзена формулай $f(x) = -\frac{13}{x}$. Параўнайце:

- а) $f(2)$ і $f(3)$; б) $f(-7)$ і $f(-5)$;
в) $f(18,4)$ і $f(18,9)$; г) $f(-56,29)$ і $f(-67,48)$.

4.9. Дадзена функцыя $g(x) = \frac{29}{x}$. Размясціце ў парадку спадання:

- а) $g(13)$; $g(23)$; $g(38)$; б) $g(-6,49)$; $g(-6,52)$; $g(-6,78)$.

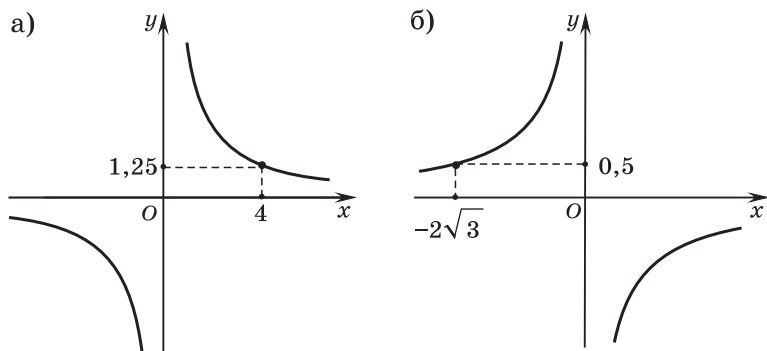
4.10. Для перавозкі разнастайных грузаў выкарыстоўваюць самазвалы МАЗ-650126 рознай грузападымальнасці, якая залежыць ад мадыфікацыі машыны. (Грузападымальнасць — максімальная маса груза, на перавозку якога разлічаны дадзены транспартны сродак.) Патрабуйце перавезці груз масай 250 т. Вызначыце залежнасць паміж грузападымальнасцю машыны (m) і колькасцю машын аднолькавай грузападымальнасці (n), неабходных для перавозкі гэтага груза.

4.11. Адваротная прапарцыянальнасць зададзена формулай $y = \frac{k}{x}$. Знайдзіце каэфіцыент k , калі вядома, што:
а) пры значэнні аргумента, роўным 2,5, значэнне функцыі роўна 0,2; б) графік функцыі праходзіць праз пункт з каардынатамі $(-10; 8)$.

4.12. Назавіце абсяг вызначэння функцыі $y = \frac{8}{x}$ і пабудуйце яе графік. Нарастае ці спадае дадзеная функцыя пры $x < 0$?

4.13. Назавіце мноства значэнняў функцыі $y = -\frac{12}{x}$ і пабудуйце яе графік. Ці праўда, што значэнні функцыі адмоўныя пры $x < 0$? Знайдзіце каардынаты пунктаў, у якіх гіпербала $y = -\frac{12}{x}$ перасякаецца з прамой $y = -4$; $y = 6$.

4.14. Выразіце колькасць сшыткаў n , якія можна купіць на суму 20 р., як функцыю ад цаны сшытка x (р.), дзе $x \in N$, $x \leq 10$. Пабудуйце графік гэтай функцыі.



Рыс. 97

4.15. Па графіку адваротнай прапарцыянальнасці (рыс. 97) вызначыце каэфіцыент k .

4.16. Вядома, што графік адваротнай прапарцыянальнасці праходзіць праз пункт $A(3\sqrt{5}; -\sqrt{5})$. Ці дастаткова гэтых даных для пабудовы графіка функцыі? Калі дастаткова, то пабудуйце гэты графік.

4.17. Функцыя зададзена формулай $f(x) = \frac{7,8}{x}$. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $f(-9,5) + f(9,5)$; б) $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3})$.

Абагульніце атрыманыя вынікі. Для функцыі $f(x) = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) знайдзіце $f(a) + f(-a)$, дзе a — любы рэчаісны лік.

4.18. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый і знайдзіце каардынаты іх агульных пунктаў:

а) $y = \frac{6}{x}$ і $y = -x + 5$; б) $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$.

4.19. Для кожнай з адваротных прапарцыянальнасцей, графікі якіх паказаны на рысунку 98, знайдзіце каэфіцыент k . Вызначыце, якому з дадзеных графікаў належыць пункт $(-64; -0,25)$.

4.20. Графік адваротнай прапарцыянальнасці $y = \frac{k}{x}$ размяшчацца ў першай і трэцяй каардынатных чвэрцях. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства і прамежкі манатоннасці дадзенай функцыі.

 **4.21.** Вядома, што графік адваротнай прапарцыянальнасці $f(x) = \frac{k}{x}$ праходзіць праз пункт $A(-13; 59)$.

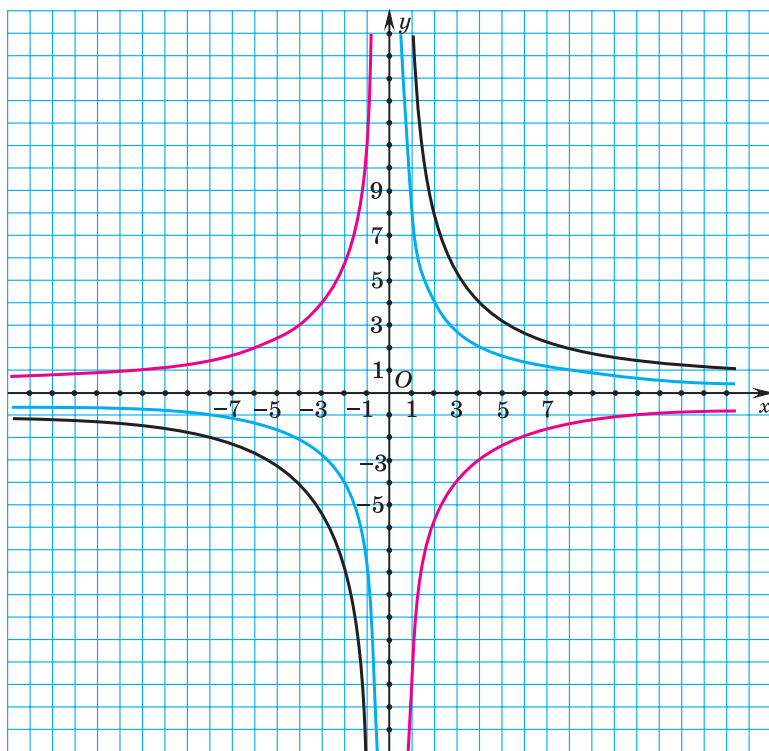


Рис. 98

Визначьте, ці мають агульня пункты гіпербала $f(x) = \frac{k}{x}$ і графік функції:

- а) $g(x) = \frac{17}{x}$; б) $h(x) = -5x$.

4.22. Знайдзіце каардынаты некалькіх пунктаў, якія належаць графіку функцыі $y = -\frac{10}{x}$ і знаходзяцца ад восі:

- а) абсцыс на адлегласці, меншай за 0,5;
б) ардынаты на адлегласці, большай за 100.

4.23. Ці праўда, што ўсе пункты, для кожнага з якіх здабытак каардынаты роўны 18, утвараюць на каардынатнай плоскасці гіпербалу?

4.24. Знайдзіце значэнні k і b , пры якіх графікі функцый $y = \frac{k}{x}$ і $y = kx + b$ праходзяць праз пункт:

- а) (3; 1); б) (0,1; -2).

 **4.25.** Вызначыце, колькі пунктаў, у якіх абсцыса процілеглая ардынаце, належыць графіку функцыі:

а) $y = -\frac{25}{x}$; б) $y = -\frac{3}{x}$.

Знайдзіце каардынаты ўсіх такіх пунктаў. Рацыянальнымі ці ірацыянальнымі лікамі з'яўляюцца каардынаты гэтых пунктаў?

 **4.26.** Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = -\frac{6}{|x|}$; б) $y = \frac{8}{|x|}$.



4.27. Выберыце функцыі, якія з'яўляюцца адваротнай прапарцыянальнасцю:

а) $y = \frac{15}{x}$; б) $y = \frac{x}{9}$; в) $y = -\frac{7}{x}$;
г) $y = \frac{6,2}{x}$; д) $y = -\frac{x}{4} + 1$; е) $y = x^2$.

4.28. Для адваротнай прапарцыянальнасці $f(x) = \frac{14}{x}$ знайдзіце: а) $f(-2)$ і $f(3,5)$; б) значэнне аргумента, пры якім $f(x) = 7$.

4.29. Выберыце функцыю, графіку якой належыць пункт $A(-0,1; 12)$:

а) $f(x) = -\frac{12}{x}$; б) $g(x) = -\frac{120}{x}$;
в) $h(x) = -\frac{1,2}{x}$; г) $p(x) = \frac{12}{x}$.

4.30. Выберыце функцыі, якія прымаюць дадатныя значэнні пры $x \in (0; +\infty)$:

а) $f(x) = -\frac{9}{x}$; б) $f(x) = -\frac{5,3}{x}$; в) $f(x) = \frac{17}{x}$;
г) $f(x) = \frac{9,4}{x}$; д) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{x}$; е) $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{x}$.

4.31. Адваротная прапарцыянальнасць зададзена формулай $f(x) = -\frac{19}{x}$. Параўнайце:

а) $f(7)$ і $f(12)$; б) $f(-3,8)$ і $f(-3,9)$.

4.32. Графік функцыі $y = \frac{k}{x}$ праходзіць праз пункт з каардынатамі $(5; -1,2)$. Знайдзіце каэфіцыент k .

4.33. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = -\frac{8}{x}$.

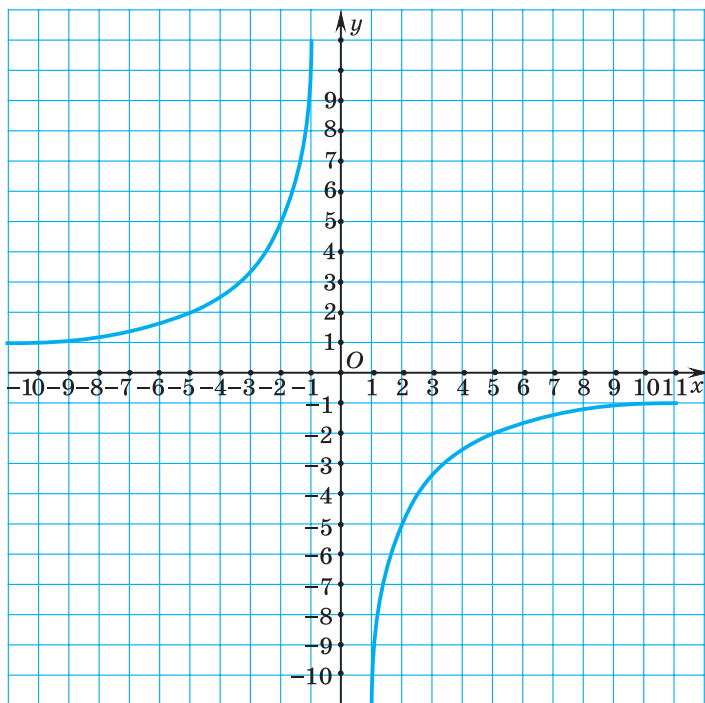
Запішыце абсяг вызначэння, мноства значэнняў і прамежкі знакапастаянства функцыі.

4.34. Плошча прамавугольнага ўчастка зямлі роўна 15 а. Адна з яго старон роўна x м. Выразіце даўжыню другой стараны ўчастка як функцыю ад x і пабудуйце графік гэтай функцыі, выбраўшы зручныя адзінкавыя адрэзкі на восях каардынат.

4.35. Знайдзіце значэнне k , пры якім графік функцыі $y = \frac{k}{x}$ праходзіць праз пункт $A(12\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Пабудуйце гэты графік.

4.36. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый $y = \frac{8}{x}$ і $y = 2x$, знайдзіце каардынаты іх агульных пунктаў.

4.37. На рысунку 99 паказаны графік адваротнай прапарцыянальнасці $f(x) = \frac{k}{x}$. Знайдзіце каэфіцыент k . Вызначыце, ці належаць пункты $(-100; 1)$; $(50; -0,5)$ графіку дадзенай функцыі.



Рыс. 99

4.38. Вядома, што адваротная прапарцыянальнасць $y = \frac{k}{x}$ спадае на прамежку $(-\infty; 0)$. У якіх каардынатных чвэрцях размешчаны яе графік? Знайдзіце прамежкі знакапастаянства дадзенай функцыі.

 **4.39.** Вызначыце, колькі пунктаў, у якіх абсцыса роўна ардынаце, мае графік функцыі:

а) $y = \frac{36}{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$.

Знайдзіце каардынаты ўсіх такіх пунктаў.

 **4.40.** Пабудуйце графік функцыі $y = -\frac{15}{|x|}$.



4.41. Размясціце ў парадку нарастання лікі a , a^2 і a^3 , калі $a < -1$.

4.42. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{6^{-3} \cdot 2^{-4}}{18^{-2}}$.

4.43. Вылічыце: $\frac{|-21| + |-4|}{|24| \cdot |-5|}$.

4.44. Вынесіце множнік за знак кораня ў выразе $\sqrt{18x^6}$ пры $x \leq 0$.

4.45. Сябры падарылі аднакласніку акварыум, які мае форму прамавугольнага паралелепіпеда. Даўжыня акварыума роўна $6\frac{2}{5}$ дм, шырыня — $2\frac{1}{4}$ дм, вышыня — $1\frac{7}{8}$ дм. Колькі поўных 4-літровых вэдзер вады прыйшлося ўліць у акварыум, каб напоўніць яго да $\frac{8}{9}$ вышыні?

§ 18. Уласцівасці і графік функцыі $y = x^3$

 **4.46.** Знайдзіце аб'ём куба, калі даўжыня яго канта роўна:

а) 6 см; б) 10 дм; в) x м.

4.47. Знайдзіце значэнне выразу: 2^3 ; $(-3)^3$; $(\frac{2}{5})^3$; $(-\frac{4}{7})^3$; $(0,1)^3$.

 У матэматыцы функцыі выгляду $y = x^k$ вывучаюць для розных значэнняў k . Мы ўжо разгледзелі ўласцівасці функцыі $y = x^2$, $k = 2$, і адваротнай прапарцыянальнасці $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $k = -1$.

Разгледзім уласцівасці і графік функцыі $y = x^3$.