§ 2. Множество иррациональных чисел. Множество действительных чисел

1.57. Представьте числа 5,2; 6; –2; $3\frac{2}{3}$ в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число.

1.58. Выберите верные утверждения:

а) $2 \in \boldsymbol{N}$; б) $-1{,}2 \notin \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{Q}$.

1.59. Представьте обыкновенные дроби $\frac{2}{25}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{3}{4}$; $\frac{5}{12}$ в виде десятичных.

Всякое рациональное число (целое или дробное) можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число, а любую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной периодической дроби.

Для того чтобы найти длину стороны квадрата, площадь которого равна, например, 2 см^2, 3 м^2 или 15 см^2, необходимо вычислить квадратный корень из этих чисел. Возникает вопрос: какому числовому множеству принадлежат числа вида $\sqrt{x}$, где число x не является квадратом некоторого рационального числа (такие, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$ и т. п.)?

Рассмотрим, например, число $\sqrt{2}$.

Предположим, что это число рациональное, т. е. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь и $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

По определению арифметического квадратного корня получим: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, $\frac{m^2}{n^2} = 2$, тогда $2n^2 = m^2$. Число $2n^2$ является четным, значит, числа m^2 и m тоже четные.

Запишем число m в виде $m = 2k$, где $k \in \boldsymbol{N}$. Равенство $2n^2 = m^2$ примет вид $2n^2 = (2k)^2$, или $2n^2 = 4k^2$, а значит, $n^2 = 2k^2$, т. е. число n — четное.

Таким образом, числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — четные числа, значит, дробь $\frac{m}{n}$ сократима. Получили противоречие с предположением. Следовательно, число $\sqrt{2}$ не является рациональным.

Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Такие числа, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, называют *иррациональными*. Их нельзя записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Для вычисления значений корней такого вида, например $\sqrt{3}$, можно поступить так:

$1<\sqrt{3}<2$, так как $1^2 < 3 < 2^2$,

$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$, так как $1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2$,

$1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$, так как $1{,}73^2 < 3 < 1{,}74^2$. Далее получим:

$1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$,

$1{,}7320<\sqrt{3}<1{,}7321$,

$1{,}73205<\sqrt{3}<1{,}73206$ и т. д.

Получили бесконечную непериодическую десятичную дробь $\sqrt{3}=1{,}73205\ldots$.

Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби. Множество иррациональных чисел обозначают буквой *I*.

К иррациональным числам относится, например, число $\pi = 3{,}1415\ldots$. Бесконечная непериодическая десятичная дробь 2,1211211121111... (количество цифр 1 после каждой цифры 2 увеличивается на одну) также является иррациональным числом.

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел называют множеством действительных чисел и обозначают буквой *R*.

С помощью кругов Эйлера (рис. 8) можно изобразить соотношения между числовыми множествами.

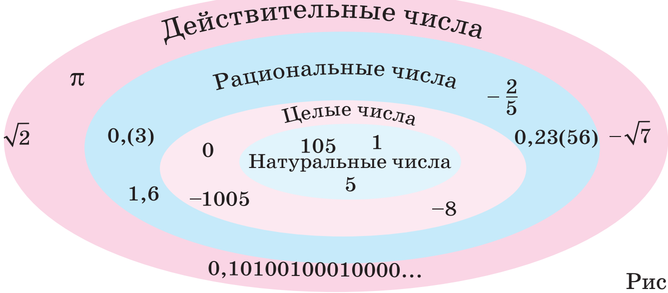

Рис. 8

Так же как и рациональные числа, действительные числа изображают на координатной прямой. Обычно на координатной прямой отмечают приближенное значение иррационального числа (рис. 9).

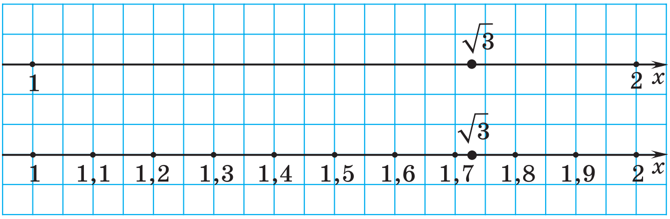

Рис. 9

При сравнении иррациональных чисел рассматривают их десятичные приближения, пока не появится различие в цифрах какого-либо разряда.

Например, сравним $\sqrt{10} = 3{,}1622776...$ и $\pi = 3{,}1415...$. Так как цифра сотых у первого числа больше, чем у второго, то $\sqrt{10} > \pi$.

Иррациональные числа	
1. Какие из данных чисел являются иррациональными: а) $\sqrt{3}$; б) $-\frac{3}{7}$; в) 3,525225222... (десятичные знаки записываются по правилу: количество цифр 2, следующих за каждой цифрой 5, увеличивается на одну)?	а) $\sqrt{3}$ — иррациональное число. б) $-\frac{3}{7} = \frac{-3}{7}$ — число рациональное, так как может быть представлено в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число. в) 3,525225222... — иррациональное число, так как представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь.
Действительные числа	
2. Является ли верным утверждение: а) $-3 \in \boldsymbol{Q}$;	а) Утверждение верное, так как число -3 является рациональным.

б) $7{,}2 \in \boldsymbol{R}$; в) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{I}$?	б) Утверждение верное, так как 7,2 — число рациональное, а множество рациональных чисел является подмножеством множества действительных чисел, $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$. в) Утверждение неверное, так как $\sqrt{9} = 3 \in \boldsymbol{N}$.
3. Можно ли числа $\frac{2}{13}$; $\sqrt{5}$ представить в виде бесконечных периодических десятичных дробей? Представьте, если это возможно.	Запишем дробь $\frac{2}{13}$ в виде частного: $\frac{2}{13} = 2 : 13$ — и выполним деление. После цифры 6 в частном цифры начнут повторяться: $\frac{2}{13} = 0{,}(153846)$, т. е. число $\frac{2}{13}$ можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. $\sqrt{5}$ — иррациональное число, а поэтому не представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби.
4. Сравните числа π и $\frac{22}{7}$ (число Архимеда).	$\pi = 3{,}1415...$. $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} = 3{,}1428571...$. Так как у второго числа цифра тысячных больше, то $\pi < \frac{22}{7}$.

1. Какие из следующих утверждений верные: а) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; б) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{Z}$; г) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}$; д) $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$?

2. Верно ли, что не существует рационального числа, квадрат которого равен: а) 3; б) 0,09; в) 1,6?

1.60. Из чисел –1,8; 12; $\frac{4}{7}$; $\sqrt{5}$; 0; 2,13; –13; $-\frac{3}{11}$; 78; π; –6,7 выберите: а) натуральные; б) целые; в) рациональные; г) иррациональные. Какому числовому множеству принадлежат все эти числа?

1.61. Выберите верные утверждения:

а) $-6 \in \boldsymbol{Z}$; б) $0 \in \boldsymbol{N}$; в) $\sqrt{13} \in \boldsymbol{I}$;

г) $-\frac{2}{13} \in \boldsymbol{R}$; д) $5{,}6 \in \boldsymbol{Q}$; е) $-\sqrt{11} \in \boldsymbol{R}$.

1.62. Верно ли, что:

а) $-75 \notin \boldsymbol{Z}$; б) $\sqrt{51} \notin \boldsymbol{Q}$; в) $-\sqrt{7} \notin \boldsymbol{N}$;

г) $0 \notin \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{3}{7} \notin \boldsymbol{I}$; е) $8{,}9 \notin \boldsymbol{R}$?

1.63. Какие из чисел $\sqrt{16}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{0{,}49}$; $\sqrt{3{,}6}$ являются иррациональными?

1.64. Приведите по два примера числа a, для которого известно, что:

а) $a \in \boldsymbol{Z}$, но $a \notin \boldsymbol{N}$; б) $a \in \boldsymbol{R}$, но $a \notin \boldsymbol{Z}$;

в) $a \in \boldsymbol{R}$, но $a \notin \boldsymbol{I}$; г) $a \in \boldsymbol{R}$, но $a \notin \boldsymbol{Q}$.

1.65. Из чисел $\frac{5}{9}$; $\sqrt{15}$; $\frac{23}{41}$; $\sqrt{0{,}2}$ выберите те, которые можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Какому числовому множеству принадлежат выбранные числа?

1.66. Одна из точек на координатной прямой (рис. 10) соответствует числу $\sqrt{90}$. Укажите эту точку.

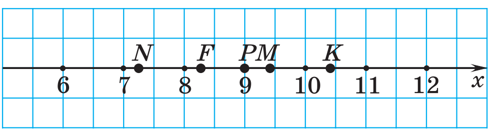

Рис. 10

1.67. На координатной прямой отметьте приближенные значения чисел $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$ (в качестве единичного отрезка возьмите 10 клеток тетради).

1.68. На координатной прямой постройте точки $A(3)$; $B\left(-\frac{1}{2}\right)$; $C\left(\sqrt{2}\right)$; $D(-2{,}5)$; $E\left(-\sqrt{3}\right)$.

1.69. Назовите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{15}$.

1.70. Какие из чисел $\sqrt{18}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{30}$ на координатной прямой находятся между числами 5 и 6?

1.71. Найдите целое число, находящееся на координатной прямой между числами $\sqrt{73}$ и $\sqrt{92}$.

1.72. Найдите все целые числа, находящиеся на координатной прямой между числами:

а) $\sqrt{31}$ и $\sqrt{89}$; б) $-\sqrt{17}$ и $\sqrt{26}$; в) $-\sqrt{120}$ и $-\sqrt{8}$.

1.73. Верно ли, что:

а) $\sqrt{29}+\sqrt{41}>11$; б) $\sqrt{79}+\sqrt{13}<13$?

1.74. Сравните числа:

а) $\sqrt{26}$ и 5; б) $\sqrt{3}$ и 1,7;

в) π и 3,141; г) $\frac{\pi}{2}$ и $\sqrt{2}$.

1.75. Расположите в порядке убывания числа 4, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{17}$.

1.76. Найдите все целые:

а) положительные решения неравенства $3x \leqslant \sqrt{37}$;

б) отрицательные решения неравенства $-2x \leqslant \sqrt{63}$.

1.77. Зная, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ и $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, оцените значение выражения:

а) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$.

1.78. Докажите, что число $\sqrt{7}$ является иррациональным.

1.79. Верно ли, что: а) число 8 является рациональным; б) число $\sqrt{15}$ является иррациональным; в) число 0 является натуральным; г) число $\frac{2}{7}$ является действительным; д) число $\sqrt{81}$ является иррациональным? Приведите примеры чисел, которые являются рациональными, но не являются целыми; являются действительными, но не являются рациональными.

1.80. Из чисел $\frac{7}{11}$; $\sqrt{5}$; $\frac{3}{19}$; $\sqrt{4{,}9}$ выберите те, которые нельзя представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Какому числовому множеству принадлежат выбранные числа?

1.81. На координатной прямой отметьте приближенные значения чисел $\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{15}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{10}$; $-\sqrt{15}$ (в качестве единичного отрезка возьмите 2 клетки тетради).

1.82. На координатной прямой постройте точки $A(2)$; $B(-0{,}8)$; $C\left(-\sqrt{2}\right)$; $D(3{,}5)$; $E\left(\sqrt{5}\right)$.

1.83. Назовите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{17}$.

1.84. Найдите все целые числа, находящиеся на координатной прямой между числами $\sqrt{45}$ и $\sqrt{102}$.

1.85. Сравните числа:

а) $\sqrt{35}$ и 6; б) $\sqrt{2}$ и 1,4; в) π и 3,1415.

1.86. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{13}$, $\sqrt{7}$ и 3.

1.87. Зная, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ и $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, оцените значение выражения $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1.88. Докажите, что число $\sqrt{5}$ является иррациональным.

1.89. Верно ли, что если $a < b$, то:

а) $a + 3 < b + 3$; б) $-5a < -5b$;

в) $a - 4 < b - 4$; г) $\frac{a}{9} < \frac{b}{9}$?

1.90. Вычислите:

а) $(7^{-2})^{-4} : (7^{-3})^{-3}$; б) $(2{,}5^{8})^{0} \cdot 2{,}5^{-1}$; в) $\frac{9^{-4} \cdot 9^{-15}}{27^{-12}}$.

1.91. Найдите значения переменной, при которых значение произведения $(3x - 1)(3x + 1)$ не превосходит значения суммы $9x^2 + 5x$.

1.92. В Минске установлены контейнеры для сбора макулатуры (рис. 11). На них есть информация о том, что 60 кг собранной макулатуры спасают от вырубки одно дерево. Если каждый восьмиклассник вашей школы сдаст по 3 кг макулатуры, то сколько деревьев будет спасено? Сколько деревьев смогут спасти все учащиеся вашей школы, если каждый из них сдаст по 5 кг макулатуры?

Рис. 11