

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 7. Квадратные уравнения.

Решение неполных квадратных уравнений



2.1. Решите уравнение:

а) $2x + 9 = 0$; б) $1,2x = 0$; в) $-3,3x = 0$.

2.2. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - 16$; б) $4x^2 - 49$; в) $2x - x^2$; г) $5x^2 + x$.

2.3. При каких значениях переменных верно равенство:

а) $ab = 0$; б) $a(b - 1) = 0$?



Рассмотрим задачу. Длина страницы книги на 8 см больше ширины, площадь страницы равна 425 см^2 . Каковы размеры страницы?

Обозначим ширину страницы через x см, тогда ее длина равна $(x + 8)$ см, а площадь — $x(x + 8) \text{ см}^2$. По условию задачи площадь страницы равна 425 см^2 . Составим уравнение $x(x + 8) = 425$. Раскроем скобки и перенесем число 425 из правой части в левую, получим уравнение $x^2 + 8x - 425 = 0$. Уравнение такого вида называется **квадратным**. Решение многих задач приводит к квадратным уравнениям.

Определение

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется **квадратным уравнением**. Число a называется первым коэффициентом, b — вторым коэффициентом, c — свободным членом.

Например, уравнение $2x^2 - 5x + 3 = 0$ является квадратным, в нем первый коэффициент $a = 2$, второй коэффициент $b = -5$, свободный член $c = 3$.

В уравнении $4x^2 - x = 0$ первый коэффициент $a = 4$, второй коэффициент $b = -1$, свободный член $c = 0$.

В уравнении $3x^2 - 2 = 0$ первый коэффициент $a = 3$, второй коэффициент $b = 0$, свободный член $c = -2$.

В уравнении $12x^2 = 0$ первый коэффициент $a = 12$, второй коэффициент $b = 0$, свободный член $c = 0$.

Квадратные уравнения

$$6x^2 - x - 4 = 0; a = 6, b = -1, c = -4$$

$$x^2 + 5x = 0; a = 1, b = 5, c = 0$$

$$2x^2 - 7 = 0; a = 2, b = 0, c = -7$$

$$-5x^2 = 0; a = -5, b = 0, c = 0$$

Неполные**квадратные уравнения**

$$ax^2 + bx = 0; a \neq 0, b \neq 0$$

$$ax^2 + c = 0; a \neq 0, c \neq 0$$

$$ax^2 = 0; a \neq 0$$



Квадратные уравнения, в которых или коэффициент b , или свободный член c , или и b и c равны нулю, называются **неполными квадратными уравнениями**.

Решение неполных квадратных уравнений**1. Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$, где $a \neq 0, b \neq 0$**

Найдем корни уравнения $4x^2 - x = 0$. Разложим многочлен в левой части уравнения на множители и получим: $x(4x - 1) = 0$.



Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей произведения равен нулю. Справедливо и обратное: если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю.

Применим это свойство и получим:

$$x(4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 4x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 0,25. \end{cases}$$

Ответ: 0; 0,25.

2. Уравнения вида

$$ax^2 + c = 0, \text{ где } a \neq 0, c \neq 0$$

Решим уравнение:

а) $x^2 - 4 = 0$; б) $3x^2 + 48 = 0$.

а) Разложим на множители двучлен в левой части уравнения: $(x - 2)(x + 2) = 0$.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Знак « \Leftrightarrow » означает, что уравнение $a \cdot b = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

$$x^2 + 5x = 0;$$

$$x(x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -5. \end{cases}$$

Ответ: -5; 0.

$$25x^2 - 1 = 0;$$

$$(5x + 1)(5x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 1 = 0, \\ 5x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,2, \\ x = 0,2. \end{cases}$$

Ответ: -0,2; 0,2.

Применим свойство о равенстве нулю произведения и получим:

$$(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0, \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ: -2 ; 2 .

б) Поскольку сумма в левой части уравнения $3x^2 + 48 = 0$ положительна при любом значении x , то уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

3. Уравнения вида $ax^2 = 0$, где $a \neq 0$

Решим уравнение $5x^2 = 0$. Так как $5 \neq 0$, то произведение равно нулю, если $x^2 = 0$. Уравнение $x^2 = 0$ имеет единственный корень, равный нулю.


Ответ: 0 .

Обобщим полученные результаты:

$$\begin{aligned} -7x^2 &= 0; \\ x^2 &= 0; \quad x = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0 .

Неполное квадратное уравнение	Решение уравнения
$ax^2 + bx = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$	Уравнение имеет два корня, один из которых равен нулю
$ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, $c \neq 0$	Если a и c — числа разных знаков, то уравнение имеет два корня. Если a и c — числа одного знака, то уравнение не имеет корней
$ax^2 = 0$, где $a \neq 0$	Уравнение имеет единственный корень, равный нулю

 Определение квадратного уравнения	
1. Какие из данных уравнений являются квадратными: а) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; б) $x^2 - x + 2,5 = 0$; в) $5x - 4 = 0$;	а) Уравнение является квадратным, поскольку имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Его коэффициенты: $a = 2$; $b = -3$; $c = -2$.

<p>г) $4 - 2x^2 + 3x = 0$; д) $x^4 - 21x - 25 = 0$? Определите коэффициенты квадратных уравнений.</p>	<p>б) Уравнение является квадратным с коэффициентами $a = 1$; $b = -1$; $c = 2,5$. в) Уравнение $5x - 4 = 0$ — линейное. г) Уравнение квадратное, в нем $a = -2$; $b = 3$; $c = 4$. д) Уравнение не является квадратным, поскольку содержит переменную в четвертой степени.</p>
<p>2. Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам: а) $a = 1$; $b = 3$; $c = 7$; б) $a = 5$; $b = -3$; $c = -2$; в) $a = 5$; $b = 0$; $c = 2$; г) $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$.</p>	<p>а) $x^2 + 3x + 7 = 0$; б) $5x^2 - 3x - 2 = 0$; в) $5x^2 + 2 = 0$; г) $x^2 - 2x = 0$.</p>
Решение неполных квадратных уравнений	
<p>3. Решите уравнение: а) $5x^2 + 2x = 0$; б) $x^2 - 3 = 0$; в) $-x^2 - 1 = 0$.</p>	<p>а) $5x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(5x + 2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -0,4. \end{cases}$ <i>Ответ:</i> $-0,4$; 0. б) $x^2 - 3 = 0$; $x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$; $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3}. \end{cases}$ <i>Ответ:</i> $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. в) Уравнение не имеет корней, поскольку левая часть уравнения при всех значениях x является отрицательным числом. <i>Ответ:</i> нет корней.</p>

4. Найдите корни уравнения
 $-2x^2 = 0$.

$-2x^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$. Единственный корень уравнения $x = 0$.

Ответ: 0.



1. Какие из следующих уравнений являются квадратными:

а) $2 - 3x + x^2 = 0$;

б) $-2^2 + 3x = 0$;

в) $-2^2x + 3x^7 = 0$;

г) $-5 + 3x + 0x^2 = 0$?

2. Может ли неполное квадратное уравнение иметь:

а) два корня; б) только один корень; в) три корня; г) не иметь корней?



2.4. Пользуясь определением квадратного уравнения, среди данных уравнений выберите квадратные и определите их коэффициенты:

а) $9x^2 + 2x - 4 = 0$;

б) $3x^2 + x - 6 = 0$;

в) $2x^2 + 7 = 0$;

г) $-8x^2 - x + 7 = 0$;

д) $x^2 + 4x + 3 = 0$;

е) $x^3 + 3x^2 - 6 = 0$;

ж) $10x^2 = 0$;

з) $5x + 7 = 0$;

и) $6x^2 + 5x = 0$;

к) $2x^5 - 3x + 4 = 0$.

Какие из данных уравнений являются неполными квадратными уравнениями?

2.5. Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам:

а) $a = 3$; $b = 7$; $c = 2$;

б) $a = 1$; $b = -3$; $c = 5$;

в) $a = -9$; $b = 1$; $c = 6$;

г) $a = -8$; $b = 3$; $c = 0$;

д) $a = 13$; $b = 0$; $c = -6$;

е) $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$.

2.6. Приведите примеры квадратных уравнений, в которых: а) первый коэффициент и свободный член являются противоположными числами; б) второй коэффициент в три раза меньше свободного члена.

2.7. Решите уравнение:

а) $x^2 - 5x = 0$;

б) $2x^2 + 7x = 0$;

в) $-x^2 + 6x = 0$;

г) $1,2x^2 - 0,3x = 0$;

д) $x^2 - \sqrt{2}x = 0$;

е) $x^2 = -2x$;

ж) $5x^2 - x = 3x$;

з) $9x = x - x^2$;

и) $2x^2 = 3x^2 - x$.

2.8. Решите уравнение:

а) $x^2 - 25 = 0$;

б) $9x^2 - 1 = 0$;

в) $7x^2 + 5 = 0$;

г) $4x^2 - 49 = 0$;

д) $x^2 = 36$;

е) $x^2 - 7 = 0$;

ж) $2x^2 = 10$;

з) $3x^2 = x^2$;

и) $-5x^2 + 15 = 0$.

2.9. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

- а) -7 и 7 ; б) -2 и 0 ; в) $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$; г) 0 и $1,5$.

2.10. Найдите число, не равное нулю, квадрат которого равен утроенному этому числу.

2.11. Решите уравнение:

- а) $\frac{1}{2}x^2 = 50$; б) $\frac{x^2}{7} - 2x = 0$; в) $\frac{x^2+1}{5} = 2$;
 г) $\frac{x}{6} = 7x^2$; д) $\frac{x^2-3x+12}{4} = 3$; е) $\frac{x^2+6x}{2} - 8 = 3x$.

2.12. Примените формулу квадрата суммы (квадрата разности) и решите уравнение:

- а) $(x+2)^2 = 4x+5$; б) $(x+1)^2 = 2x+3$;
 в) $(x-5)^2 = 5(9-2x)$; г) $(x-2)^2 - 6x = 3x^2+4$;
 д) $(3x+1)^2 = 2(3x+1)$; е) $(x+2)^2 = 2(x-1)(x+3)$.

2.13. Найдите положительное число, квадрат которого в девять раз меньше этого числа.

2.14. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите уравнение:

- а) $x(5x+3) = x^2 - 4x$; б) $(x+7)(x-2) = 5x$;
 в) $(x+4)(x+5) = 20$; г) $x^2 - 3 = (2x-3)(x+1)$;
 д) $(x-4)^2 = 17 - 8x$; е) $(x-1)(x+1) = 2x^2 + 5$.

2.15. Решите уравнение:

- а) $(x+3)^2 + (x-4)^2 = 25$; б) $(5x-3)^2 - (3x-1)^2 = 8$.

2.16. Найдите значение переменной, при котором:

- а) значение двучлена $9x^2 - 1$ равно значению произведения $(2x+1)(3x-1)$;
 б) значения выражений $(x+5)(2x-1)$ и $5-x^2$ противоположны;
 в) значение квадрата двучлена $3x+1$ равно значению суммы $2x+1$;
 г) сумма квадратов двучленов $x+2$ и $x-3$ равна 13 .

2.17. Решите уравнение:

- а) $\frac{1}{4}(x^2 - 3x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$; б) $\frac{1}{2}(7x - x^2) = \frac{1}{5}(x^2 + 2x)$;
 в) $\frac{x^2+10x}{5} - 2x = 45$; г) $\frac{4x^2-1}{3} - \frac{3x^2+8}{5} = 1$;

$$\begin{array}{ll} \text{д)} \frac{x^2 + 6x}{12} - \frac{2x + 3}{4} = 6; & \text{е)} \frac{(x + 4)^2}{2} - (x + 2)^2 = 1; \\ \text{ж)} \frac{(x - 2)^2}{2} - \frac{(x - 3)^2}{3} = 3; & \text{з)} \frac{(x - 6)^2}{8} - \frac{(x - 2)^2}{2} + x = 2,5. \end{array}$$

2.18. Найдите корни уравнения:

$$\begin{array}{l} \text{а)} (4x + 7)^2 - 40x = 3x(5x + 9) + 49; \\ \text{б)} (5 + 3x)(3x - 5) + 16x = (x - 5)(5 + x). \end{array}$$

2.19. Решите уравнение:

$$\begin{array}{l} \text{а)} (x^2 + 3)^2 - (x^2 + 2)(x^2 - 8) = 73; \\ \text{б)} (x^2 + 4)^2 - (x^2 - 5)(x^2 + 2) = 11. \end{array}$$



2.20. Найдите значение числа a , при котором:

- а) корни уравнения $x^2 + (a - 7)x + a - 9 = 0$ являются противоположными числами;
 б) один из корней уравнения $x^2 + (a - 7)x + a - 9 = 0$ равен нулю.



2.21. Пользуясь определением квадратного уравнения, среди данных уравнений выберите квадратные и определите их коэффициенты:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} 5x^2 - 3x + 2 = 0; & \text{б)} x^2 + 5x - 1 = 0; \\ \text{в)} x^2 - 8 = 0; & \text{г)} x + 18 = 0; \\ \text{д)} 2x^2 - 9x = 0; & \text{е)} x^4 - 7x^3 + 5x^2 = 0. \end{array}$$

Какие из данных уравнений являются неполными квадратными уравнениями?

2.22. Составьте квадратное уравнение, в котором:

- а) все коэффициенты равны;
 б) первый коэффициент в два раза меньше свободного члена.

2.23. Решите уравнение:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} x^2 - 7x = 0; & \text{б)} 3x^2 + 2x = 0; & \text{в)} x^2 - 36 = 0; \\ \text{г)} 16x^2 - 25 = 0; & \text{д)} x^2 = -8x; & \text{е)} x^2 = 7; \\ \text{ж)} 2x^2 + x = 5x; & \text{з)} x^2 + 3 = 0; & \text{и)} 3x = x^2 - 2x. \end{array}$$

2.24. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{1}{3}x^2 = 27; & \text{б)} \frac{x^2}{5} + 3x = 0; \\ \text{в)} \frac{x^2 - 4}{3} = 4; & \text{г)} \frac{x^2 + 7x + 18}{3} = 6. \end{array}$$

2.25. Найдите число, не равное нулю, квадрат которого в четыре раза больше этого числа.

2.26. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите уравнение:

а) $x^2 + 2x = 5x(x - 1)$;

б) $(x - 2)(x + 8) = 6x$;

в) $(x + 5)^2 = 10x + 29$;

г) $(3x - 1)(3x + 1) = 4x^2 - 2$.

2.27. Решите уравнение:

а) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 5$;

б) $(2x + 5)^2 - (4x - 1)^2 = 24$.

2.28. Найдите значение переменной, при котором:

а) значение двучлена $3x^2 - 9$ противоположно значению выражения $(x + 1)^2 - 2x$;

б) значение квадрата двучлена $x + 4$ равно значению произведения $4(2x + 5)$.

2.29. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{6}(x^2 - x) = \frac{1}{5}(x^2 + 3x)$;


б) $\frac{5x^2 + 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 3\frac{1}{3}$;

в) $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{6x-3}{4} = (x-1)^2$;

г) $\frac{(x-4)^2}{8} = \frac{(x-2)^2}{4} + 1$.

2.30. Найдите корни уравнения

$$(5x + 2)(x - 2) - (1 + x)(x - 1) + 3 = 4x.$$

 **2.31.** Найдите значение числа a , при котором корни уравнения $x^2 - (a - 1)x + a - 4 = 0$ являются противоположными числами.



2.32. На координатной прямой отмечены точки $N(x)$ и $K(y)$ (рис. 37). Верно ли, что $|x - y| > 4$?

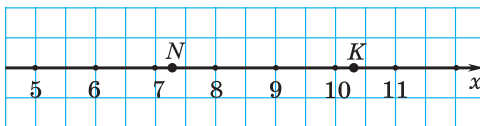


Рис. 37

2.33. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел, записанных в стандартном виде:

а) $6 \cdot 10^9$ и $2 \cdot 10^9$;

б) $8 \cdot 10^{-12}$ и $4 \cdot 10^{-12}$.

2.34. Сравните числа a и b , если известно, что $b + 2 = a + \sqrt{5}$.

2.35. Существует ли такое значение аргумента, при котором значения функций $y = x + 1,5$ и $y = \frac{5x - 1}{3}$ равны?

2.36. Упростите выражение

$$(7a + b)^2 - (7a - b)^2 - (7ab + 1)^2 + (7ab - 1)^2.$$

2.37. В топливный бак грузового автомобиля МАЗ 4371 с авторефрижератором, арендованного для перевозки замороженной рыбы, залили 300 л дизельного топлива. Проехав 400 км, водитель обнаружил, что в топливном баке осталось 190 л дизельного топлива. Сможет ли он проехать еще 650 км без дозаправки?

§ 8. Формулы корней квадратного уравнения



2.38. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 + 4x + 4$; б) $9x^2 - 6x + 1$; в) $25x^2 - 20x + 4$.

2.39. Выделите полный квадрат двучлена в выражении:

а) $x^2 + 4x + 5$; б) $9x^2 - 6x - 1$; в) $25x^2 - 20x - 7$.

2.40. Представьте в виде квадрата число:

а) 36; б) 3; в) d , если $d > 0$.



Решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, в котором ни один из коэффициентов не равен нулю, например уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$. Первый коэффициент данного уравнения равен 1.



Если **первый коэффициент** в квадратном уравнении **равен единице**, то уравнение называется **приведенным**.

1) Выделим в левой части уравнения полный квадрат двучлена: $x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$; $(x - 2)^2 - 1 = 0$.

2) Разложим разность квадратов в левой части уравнения на множители и получим: $(x - 2 - 1)(x - 2 + 1) = 0$; $(x - 3)(x - 1) = 0$.

3) Применим свойство о равенстве произведения нулю:
 $(x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0, \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 1. \end{cases}$

Ответ: 1; 3.



Любое квадратное уравнение можно преобразовать к равносильному ему приведенному уравнению.

Например, уравнение $2x^2 - x - 2 = 0$ не является приведенным, поскольку первый коэффициент этого уравнения равен 2. Разделим обе части уравнения на 2 и получим уравнение $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$, которое является приведенным.