

2.36. Упростите выражение

$$(7a + b)^2 - (7a - b)^2 - (7ab + 1)^2 + (7ab - 1)^2.$$

2.37. В топливный бак грузового автомобиля МАЗ 4371 с авторефрижератором, арендованного для перевозки замороженной рыбы, залили 300 л дизельного топлива. Проехав 400 км, водитель обнаружил, что в топливном баке осталось 190 л дизельного топлива. Сможет ли он проехать еще 650 км без дозаправки?

§ 8. Формулы корней квадратного уравнения



2.38. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 + 4x + 4$; б) $9x^2 - 6x + 1$; в) $25x^2 - 20x + 4$.

2.39. Выделите полный квадрат двучлена в выражении:

а) $x^2 + 4x + 5$; б) $9x^2 - 6x - 1$; в) $25x^2 - 20x - 7$.

2.40. Представьте в виде квадрата число:

а) 36; б) 3; в) d , если $d > 0$.



Решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, в котором ни один из коэффициентов не равен нулю, например уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$. Первый коэффициент данного уравнения равен 1.



Если **первый коэффициент** в квадратном уравнении **равен единице**, то уравнение называется **приведенным**.

1) Выделим в левой части уравнения полный квадрат двучлена: $x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$; $(x - 2)^2 - 1 = 0$.

2) Разложим разность квадратов в левой части уравнения на множители и получим: $(x - 2 - 1)(x - 2 + 1) = 0$; $(x - 3)(x - 1) = 0$.

3) Применим свойство о равенстве произведения нулю:
 $(x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0, \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 1. \end{cases}$

Ответ: 1; 3.



Любое квадратное уравнение можно преобразовать к равносильному ему приведенному уравнению.

Например, уравнение $2x^2 - x - 2 = 0$ не является приведенным, поскольку первый коэффициент этого уравнения равен 2. Разделим обе части уравнения на 2 и получим уравнение $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$, которое является приведенным.

Найдем корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Разделим обе части уравнения на a и получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Выделим полный квадрат в левой части уравнения:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0; \quad \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0;$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0; \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a} = 0;$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

В уравнении $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ обозначим выражение $b^2 - 4ac$ через D . Получим:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0. \quad (1)$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называется **дискриминантом*** квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.



Если $D > 0$, то $D = (\sqrt{D})^2$.

Разложим на множители левую часть уравнения (1):

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(\sqrt{D})^2}{4a^2} = 0; \quad \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0.$$

Применим свойство о равенстве произведения нулю:

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \\ x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \end{cases} \quad \text{— формулы}$$

корней квадратного уравнения. В этом случае квадратное уравнение имеет два корня.



Если $D = 0$, то уравнение (1) примет вид $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, т. е. в левой части уравнения — квадрат двучлена. Из равенства квадрата двучлена нулю следует: $x + \frac{b}{2a} = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$, значит, квадратное уравнение имеет единственный корень.

* Название происходит от латинского слова *discriminans*, что означает *различающий, разделяющий*.



Если $D < 0$, то выражение $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}$ в левой части уравнения (1) принимает положительные значения при всех значениях переменной и в нуль не обращается, т. е. квадратное уравнение не имеет корней.

Таким образом, число корней квадратного уравнения зависит от знака его дискриминанта.

Знак дискриминанта	Число корней уравнения
$D > 0$	Два корня $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
$D = 0$	Один корень $x = -\frac{b}{2a}$
$D < 0$	Нет корней



Чтобы решить квадратное уравнение, нужно:

<p>① Определить коэффициенты уравнения.</p> <p>② По формуле $D = b^2 - 4ac$ найти дискриминант квадратного уравнения и определить его знак.</p> <p>③ Если $D > 0$, то найти два корня по формулам $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.</p> <p>Если $D = 0$, то найти один корень по формуле $x = -\frac{b}{2a}$.</p> <p>Если $D < 0$, то записать, что уравнение не имеет корней.</p> <p>④ Записать ответ.</p>	<p>Решите уравнение</p> $2x^2 - 5x + 3 = 0.$ <p>① $a = 2; b = -5; c = 3.$</p> <p>② $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0.$</p> <p>③ Так как $D > 0$, то</p> $x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 1}{2 \cdot 2} = 1,$ $x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 1}{2 \cdot 2} = 1,5.$ <p>④ <i>Ответ:</i> 1; 1,5.</p>
---	---

Пример. Решите уравнение:

а) $4x^2 + 4x + 1 = 0;$

б) $x^2 - 2x + 7 = 0.$

Решение:

а) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

① $a = 4; b = 4; c = 1$;

② $D = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 =$
 $= 16 - 16 = 0$.

③ Так как $D = 0$, то
 $x = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$.

④ *Ответ:* $-0,5$.

б) $x^2 - 2x + 7 = 0$;

① $a = 1; b = -2; c = 7$;

② $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 =$
 $= 4 - 28 = -24 < 0$.

③ Так как $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

④ *Ответ:* нет корней.



Формулы корней квадратного уравнения

1. Определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $-x^2 + x - 4 = 0$;

б) $1,2x^2 - 21x - 25 = 0$;

в) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

а) Определим коэффициенты уравнения: $a = -1; b = 1; c = -4$. Определим знак дискриминанта:

$D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 1 - 16 < 0$.
Поскольку $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

б) $a = 1,2; b = -21; c = -25$;
 $D = (-21)^2 - 4 \cdot 1,2 \cdot (-25) =$
 $= 21^2 + 4 \cdot 1,2 \cdot 25 > 0$.

Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня.

в) $a = 1; b = -6; c = 9$;
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$.

Так как $D = 0$, то уравнение имеет один корень.

2. Решите уравнение
 $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

① Определим коэффициенты уравнения: $a = 2; b = -3; c = -2$.

② Определим знак дискриминанта: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) =$
 $= 9 + 16 = 25 > 0$.

③ Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня. Применим формулы корней квадратного уравнения:

	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} =$ $= \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2},$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} =$ $= \frac{3 + 5}{4} = 2.$ <p>④ <i>Ответ:</i> $-0,5; 2$.</p>
<p>3. Найдите корни уравнения:</p> <p>а) $3x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $-x^2 + x - 0,25 = 0$.</p>	<p>а) ① $a = 3; b = -5; c = 6$. ② $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 =$ $= 25 - 72 < 0$. ③ $D < 0$, значит, уравнение не имеет корней. ④ <i>Ответ:</i> $x \in \emptyset$.</p> <p>б) <i>Первый способ.</i> $a = -1$; $b = 1; c = -0,25$. $D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-0,25) = 1 - 1 =$ $= 0$, уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.</p> <p><i>Второй способ.</i> Умножим обе части уравнения на -1 и получим $x^2 - x + 0,25 = 0$, или $(x - 0,5)^2 = 0$, откуда $x = 0,5$. <i>Ответ:</i> $0,5$.</p>
<p>4. Решите уравнение</p> $\frac{x^2 - 2x}{4} - \frac{x - 9}{8} = 1.$	<p>Умножим обе части уравнения на 8 и получим:</p> $2(x^2 - 2x) - (x - 9) = 8;$ $2x^2 - 4x - x + 9 = 8;$ $2x^2 - 5x + 1 = 0;$ $a = 2; b = -5; c = 1;$ $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 25 - 8 = 17;$ $x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4},$ $x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}.$ <p><i>Ответ:</i> $\frac{5 - \sqrt{17}}{4}; \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$.</p>



1. Установите последовательность действий вывода формулы корней квадратного уравнения:

- а) разложить разность квадратов в левой части уравнения на множители;
- б) применить свойство о равенстве произведения нулю;
- в) выделить полный квадрат в левой части уравнения;
- г) преобразовать уравнение к приведенному.

2. Установите соответствие между знаком дискриминанта:

- 1) $D > 0$; 2) $D < 0$; 3) $D = 0$ — и числом корней квадратного уравнения:
- а) два корня; б) один корень; в) не имеет корней.



2.41. Найдите дискриминант квадратного уравнения и определите число его корней:

- а) $4x^2 + 2x - 1 = 0$; б) $8x^2 - 5x + 2 = 0$;
- в) $4x^2 - 20x + 25 = 0$; г) $x^2 + 8x + 3 = 0$.

2.42. Приведите по два примера квадратных уравнений:

- а) не имеющих корней; б) имеющих только один корень;
- в) имеющих два корня.

2.43. Решите квадратное уравнение, используя алгоритм:

- а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;
- в) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; г) $3x^2 + x - 2 = 0$;
- д) $x^2 - 6x + 8 = 0$; е) $8x^2 - 2x + 1 = 0$;
- ж) $5x^2 - 4x - 1 = 0$; з) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

2.44. Решите уравнение:

- а) $-5x^2 + 8x - 3 = 0$; б) $-x^2 + 3x + 4 = 0$;
- в) $-7x^2 + 6x - 13 = 0$; г) $-x^2 + 10x - 25 = 0$;
- д) $7x - 6x^2 - 2 = 0$; е) $3 - x - 4x^2 = 0$;
- ж) $x^2 - 4x - 5 = 0$; з) $6x - 9x^2 - 1 = 0$.

2.45. Найдите корни уравнения:

- а) $x^2 + 3x - 1 = 0$; б) $5x^2 - 2x - 4 = 0$;
- в) $6x - x^2 + 3 = 0$; г) $8 - 5x^2 + x = 0$.

2.46. Решите уравнение:

- а) $4x^2 + x = 5$; б) $12x^2 + 1 = 13x$;
- в) $x^2 = 8x - 7$; г) $5 - 9x = 2x^2$;
- д) $6x^2 - x = x^2 + 4$; е) $9x^2 - 1 = x - 11x^2$;
- ж) $7x - 3 = 5x^2 - x$; з) $3 - 8x = 2x - 8x^2$.

2.47. Найдите значения переменной, при которых:

- а) значение двучлена $x^2 + x$ равно 20;
 б) значения выражений $3x^2 + 2x - 1$ и $5x + 5$ равны.

2.48. Решите уравнение:

- а) $x(x - 1) = 12$; б) $x(3x + 7) = 6$;
 в) $x(4x - 11) = 3$; г) $3x(3x - 4) = 5$.

2.49. Найдите значения переменной, при которых значения выражения:

- а) $4x(x - 1)$ равно 3; б) $3x(3x - 8)$ равно 20.

2.50. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите уравнение:

- а) $x(9 - x) = 20$; б) $5x(x - 1) = 3 - 3x$;
 в) $x(5 - x) = 2(x - 20)$; г) $(x + 2)(x + 6) = 5$;
 д) $(3x + 5)(4 - x) = (x - 1)(1 - 2x)$;
 е) $(4x - 1)(x - 1) = 2(x + 6)(x - 2)$;
 ж) $(3x + 1)(x - 4) - (2x - 6)(x - 2) = 4$;
 з) $(2x - 3)(x + 4) - 10 = (5x - 6)(x - 3)$.

2.51. Одно число на 4 меньше другого, а их произведение равно 21. Найдите эти числа.

2.52. Примените формулу квадрата суммы (квадрата разности) и решите уравнение:

- а) $(x - 4)^2 - 2x = 7$; б) $(x + 2)^2 = 2x + 3$;
 в) $(2x + 4)^2 = 11x^2 + 1$; г) $6x^2 + 3 = 2(x - 1)^2$;
 д) $(x - 5)^2 = 4(7 - 2x)$; е) $(9 - 4x)^2 = 5(4x + 1)$;
 ж) $2(x - 2)^2 = (x - 5)^2$; з) $4(x + 1)^2 = 3(x - 1)^2$.

2.53. Решите уравнение:

- а) $0,25x^2 - 1,25x + 1 = 0$; б) $0,1x^2 + 0,6x - 0,7 = 0$;
 в) $x^2 - \frac{8}{9}x = \frac{1}{9}$; г) $x^2 - \frac{x}{3} = 1\frac{1}{3}$.

2.54. Найдите значения переменной, при которых:

- а) значение квадрата двучлена $3x - 1$ равно значению выражения $6x - 2$;
 б) значения квадратов двучленов $3x + 3$ и $4x - 4$ равны.

2.55. Решите уравнение:

- а) $(x - 4)(x + 4) = 2x(x + 5)$;
 б) $(2x - 3)(2x + 3) = (x + 1)(x - 2) - 5$;
 в) $(x + 2)^2 + 9x = 2(x - 1)(x + 3)$;

г) $(3x - 1)^2 - (x - 8)(x - 4) = -27$;

д) $(x + 3)^2 + (x - 4)^2 = 29$;

е) $(3x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = 15$;

ж) $(3x - 1)^2 + 29 = (2x + 5)^2$;

з) $(4x - 3)^2 - (x - 5)^2 = 9(x - 1)^2$.

2.56. Найдите значение переменной, при котором сумма квадратов двучленов $x + 2$ и $x - 3$ равна 17.

2.57. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 + 1}{5} = \frac{2x}{3}$;

б) $\frac{x^2 + 6}{5} - \frac{8 - x}{10} = 1$;

в) $\frac{x^2 - 2x}{4} - \frac{x - 5}{8} = 1$;

г) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$;

д) $\frac{x^2 - x}{6} + x - 1 = \frac{2x + 3}{3}$;

е) $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{5x - 1}{6} = \frac{x^2 + 17}{9}$.

2.58. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{(x - 1)^2}{5} - \frac{2x - 2}{3} = \frac{x + 4}{6}$;

б) $\frac{(x - 3)^2}{8} - \frac{(x - 2)^2}{2} = 2 - 2x$;

в) $\frac{(x + 2)^2}{5} - \frac{(2x + 1)^2}{10} = \frac{1 - x}{2}$;

г) $\frac{(x - 1)^2}{12} + \frac{3x + 1}{6} = \frac{(x + 1)^2}{3}$.

2.59. Решите уравнение:

а) $x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$;

б) $\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$;

в) $x^2 - (\sqrt{6} + 1)x + \sqrt{6} = 0$;

г) $x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{7})x - \sqrt{14} = 0$.

2.60. Подберите какие-нибудь три значения c , при которых уравнение имеет корни, и три значения c , при которых уравнение не имеет корней:

а) $x^2 + 7x + c = 0$;

б) $2x^2 - x - c = 0$.

 **2.61.** Найдите все значения c , при которых уравнение $x^2 + 6x - c = 0$ не имеет корней.

 **2.62.** Найдите все значения c , при которых уравнение $3x^2 - 2x + c = 0$ имеет два корня.

 **2.63.** Найдите все значения b , при которых уравнение имеет единственный корень:

а) $bx^2 - 3bx + 1 = 0$;

б) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$.

 **2.64.** Решите уравнение относительно переменной x :

а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$;

б) $3x^2 - 4ax + a^2 = 0$;

в) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$;

г) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$.

 **2.65.** Из равенства $a^2 + 6b^2 - 5ab - 3a + 7b + 2 = 0$ выразите a через b .



2.66. Среди квадратных уравнений $x^2 + 6x + 9 = 0$; $2x^2 + 7x - 4 = 0$; $16x^2 - 8x + 1 = 0$; $6x^2 - 5x + 7 = 0$ выберите:

- а) уравнения, имеющие два корня;
 б) уравнения, у которых левая часть является квадратом двучлена.

2.67. Решите квадратное уравнение, используя алгоритм:

- а) $5x^2 - 3x - 2 = 0$; б) $2x^2 + 3x - 2 = 0$;
 в) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; г) $2x^2 + x - 3 = 0$;
 д) $x^2 - 5x + 4 = 0$; е) $2x^2 + 7x + 3 = 0$;
 ж) $3x^2 + 2x - 5 = 0$; з) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

2.68. Решите уравнение:

- а) $-6x^2 + 7x - 2 = 0$; б) $-x^2 - 9x - 20 = 0$;
 в) $3 - x - 4x^2 = 0$; г) $8x - 3x^2 - 5 = 0$;
 д) $12x - 9 - 4x^2 = 0$; е) $1 - 5x - x^2 = 0$.

2.69. Решите уравнение:

- а) $5x^2 + 2x = 3$; б) $5 + 4x = x^2$;
 в) $4x^2 + 11x = 4x + 2$; г) $11x^2 + 9x = 2x^2 + 4$.

2.70. Найдите значения переменной, при которых значение двучлена $6x - 6$ равно значению трехчлена $5x^2 - 4x - 1$.

2.71. Решите уравнение:

- а) $x(x + 7) = 18$; б) $x(2x - 9) = 5$;
 в) $x(6x - 13) = 5$; г) $4x(x - 1) = 3$.

2.72. Решите уравнение:

- а) $x(7 - x) = 10$; б) $x(x - 8) = x - 20$;
 в) $(x - 2)(x + 5) = -6$; г) $(3x + 1)(x + 1) = 2(x - 5)(x - 2)$.

2.73. Одно число на 2 больше другого, а их произведение равно 8. Найдите эти числа.

2.74. Примените формулы сокращенного умножения и решите уравнение:

- а) $(x - 2)^2 = 4x - 3$; б) $(x + 3)^2 - 5 = 11x$;
 в) $(x - 4)^2 = 8(x - 6)$; г) $(x - 5)^2 = 4(x + 3)^2$.

2.75. Решите уравнение:

- а) $1,2x^2 - 0,8x - 0,4 = 0$; б) $x^2 - \frac{7}{9}x = \frac{2}{9}$.

2.88. В одной системе координат постройте графики функций $y = 2x - 3$; $y = -x + 4$ и $y = 3$.

2.89. Для организации экскурсии во время каникул среди учащихся 8-х классов был проведен опрос. Из 278 опрошенных 120 человек хотели бы посетить Беловежскую пуцу, 186 человек посетили бы Лидский замок. Некоторые участники опроса хотели бы побывать и там, и там. Сколько участников опроса хотели бы посетить и Беловежскую пуцу, и Лидский замок?

2.90. Выясните, может ли многочлен $9x^4 - 48x^3 + 64x^2$ принимать отрицательные значения.

§ 9. Теорема Виета



2.91. Решите уравнение: а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 + 3x - 4 = 0$; в) $x^2 - 8x + 15 = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.

2.92. Решите уравнение: а) $x^2 - 2x = 0$; б) $x^2 - 5x = 0$; в) $x^2 + 8x = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.

2.93. Решите уравнение: а) $x^2 - 25 = 0$; б) $x^2 - 16 = 0$; в) $x^2 - 12 = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.



Решая приведенные квадратные уравнения, можно заметить, что существует зависимость между их коэффициентами и суммой и произведением их корней.

Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$	Корни квадратного уравнения	Сумма корней $x_1 + x_2$	Произведение корней $x_1 \cdot x_2$	Вывод
$x^2 - 8x + 15 = 0$	$x_1 = 3,$ $x_2 = 5$	$8 = -p$	$15 = q$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1 \cdot x_2 = q$
$x^2 + 3x - 10 = 0$	$x_1 = -5,$ $x_2 = 2$	$-3 = -p$	$-10 = q$	
$x^2 - 5x = 0$	$x_1 = 0,$ $x_2 = 5$	$5 = -p$	$0 = q$	
$x^2 - 16 = 0$	$x_1 = 4,$ $x_2 = -4$	$0 = -p$	$-16 = q$	