2.88. В одной системе координат постройте графики функций $y = 2x - 3$; $y = -x + 4$ и $y = 3$.

2.89. Для организации экскурсии во время каникул среди учащихся 8-х классов был проведен опрос. Из 278 опрошенных 120 человек хотели бы посетить Беловежскую пущу, 186 человек посетили бы Лидский замок. Некоторые участники опроса хотели бы побывать и там, и там. Сколько участников опроса хотели бы посетить и Беловежскую пущу, и Лидский замок?

2.90. Выясните, может ли многочлен $9x^4 - 48x^3 + 64x^2$ принимать отрицательные значения.

§ 9. Теорема Виета

2.91. Решите уравнение: а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 + 3x - 4 = 0$; в) $x^2 - 8x + 15 = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.

2.92. Решите уравнение: а) $x^2 - 2x = 0$; б) $x^2 - 5x = 0$; в) $x^2 + 8x = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.

2.93. Решите уравнение: а) $x^2 - 25 = 0$; б) $x^2 - 16 = 0$; в) $x^2 - 12 = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.

Решая приведенные квадратные уравнения, можно заметить, что существует зависимость между их коэффициентами и суммой и произведением их корней.

Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$	Корни квадратного уравнения	Сумма корней $x_1 + x_2$	Произведение корней $x_1 \cdot x_2$	Вывод
$x^2 - 8x + 15 = 0$	$x_1 = 3$, $x_2 = 5$	$8 = -p$	$15 = q$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1 \cdot x_2 = q$
$x^2 + 3x - 10 = 0$	$x_1 = -5$, $x_2 = 2$	$-3 = -p$	$-10 = q$	
$x^2 - 5x = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = 5$	$5 = -p$	$0 = q$	
$x^2 - 16 = 0$	$x_1 = 4$, $x_2 = -4$	$0 = -p$	$-16 = q$	

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна числу, противоположному второму коэффициенту, а произведение — свободному члену. Таким свойством обладает любое приведенное квадратное уравнение, имеющее корни.

Зависимость между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями была установлена французским математиком Франсуа Виетом.

Франсуа Виет
(1540—1603)

Теорема Виета. **Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна его второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену.**

$$x^2 + px + q = 0$$
$$D > 0$$
$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Доказательство. Пусть уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Докажем, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

1) По формулам корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

2) Найдем сумму корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = -p.$$

3) Найдем произведение корней:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{\left(-p + \sqrt{D}\right)\left(-p - \sqrt{D}\right)}{4} = \frac{\left(p - \sqrt{D}\right)\left(p + \sqrt{D}\right)}{4} =$$
$$= \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - \left(p^2 - 4q\right)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = q.$$

Теорема, обратная теореме Виета. **Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то они являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.**

Доказательство. 1) Подставим в уравнение $x^2 + px + q = 0$ выражения для его коэффициентов:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

2) Выполним преобразования в левой части уравнения:

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0; \; (x - x_1)x - x_2(x - x_1) = 0;$$
$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

3) Корни уравнения $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ найдем, используя свойство о равенстве произведения нулю: $x - x_1 = 0$ или $x - x_2 = 0$, откуда $x = x_1$ или $x = x_2$.

Применение теоремы Виета и ей обратной

Пример 1. Найдите сумму, произведение и сумму квадратов корней квадратного уравнения $x^2 - 7x + 11 = 0$, не находя корней уравнения.

Решение. $D = 49 - 44 = 5 > 0$, значит, уравнение имеет корни. По теореме Виета их сумма $x_1 + x_2 = 7$, а произведение $x_1 \cdot x_2 = 11$.

Выразим сумму квадратов корней через их сумму и произведение:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$= 7^2 - 2 \cdot 11 = 49 - 22 = 27.$$

Ответ: 7; 11; 27.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$, не применяя формулы корней квадратного уравнения.

Решение. Данное уравнение имеет корни ($D > 0$). По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна 4, а их произведение равно –5. Определим делители числа –5, сумма которых равняется 4. Это числа 5 и –1, их произведение равно –5, а сумма 4. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, они являются корнями данного уравнения.

Ответ: 5 и –1.

Теорема Виета	
1. Найдите, если это возможно, сумму и произведение корней уравнения: а) $x^2 - 23x + 6 = 0$; б) $x^2 - 3x + 6 = 0$; в) $5x^2 + 3x - 1 = 0$.	а) $D = 23^2 - 24 > 0$, значит, уравнение имеет два корня. По теореме Виета их сумма равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, т. е. 23, а произведение — свободному члену, т. е. 6. *Ответ*: $x_1 + x_2 = 23$, $x_1 \cdot x_2 = 6$.

	б) $D = 9 - 24 < 0$, значит, уравнение не имеет корней. *Ответ*: нет корней. в) $D = 3^2 + 20 > 0$, значит, уравнение имеет два корня. Разделим обе части уравнения на 5 и получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} = 0$. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{3}{5}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{5}$. *Ответ*: $x_1 + x_2 = -0{,}6$, $x_1 \cdot x_2 = -0{,}2$.
Теорема, обратная теореме Виета	
2. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны 2 и 9.	По теореме, обратной теореме Виета, так как сумма чисел 2 и 9 равна 11, а произведение — 18, то квадратное уравнение, корнями которого являются числа 2 и 9, имеет вид $x^2 - 11x + 18 = 0$.
Применение теоремы Виета и ей обратной	
3. Определите знаки корней квадратного уравнения $x^2 - 25x + 7 = 0$, не решая его.	Так как $D > 0$, то по теореме Виета уравнение имеет корни, произведение которых равно 7 — положительному числу, значит, корни уравнения одного знака. Так как сумма корней равна 25 — положительному числу, то оба корня этого уравнения являются положительными числами.

4. Определите знаки корней квадратного уравнения $$x^2 + 8x - 34 = 0,$$ не решая его.	Так как $D > 0$, то уравнение имеет корни, произведение которых равно -34 — отрицательному числу, значит, корнями уравнения являются числа разных знаков. Так как сумма корней равна -8 — отрицательному числу, то отрицательный корень уравнения имеет больший модуль.
5. Составьте уравнение, каждый корень которого в два раза больше соответствующего корня уравнения $$x^2 - 12x + 7 = 0.$$	По теореме Виета сумма корней данного уравнения равна 12, а произведение равно 7, тогда оба корня положительны. Сумма корней нового уравнения будет равна $2 \cdot 12 = 24$, а произведение — $4 \cdot 7 = 28$. По теореме, обратной теореме Виета, новое уравнение имеет вид $x^2 - 24x + 28 = 0$.
6. Решите уравнение, не используя формулы корней квадратного уравнения: а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^2 + 7x + 10 = 0$.	а) Уравнение имеет корни x_1 и x_2 ($D > 0$), тогда по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 3$ и $x_1 + x_2 = 4$. Подберем целые числа x_1 и x_2 так, чтобы их произведение было равно 3, а сумма — 4. Это числа 1 и 3. По теореме, обратной теореме Виета, они являются корнями данного уравнения. *Ответ*: 1; 3. б) $D > 0$, по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 10$ и $x_1 + x_2 = -7$. Если x_1 и x_2 — целые числа, произведение которых равно 10, то возможными значениями x_1 и x_2 являются пары чисел: 1 и 10; -1 и -10; 2 и 5; -2 и -5.

	Условию $x_1 + x_2 = -7$ удовлетворяет пара чисел -2 и -5. Эти числа по теореме, обратной теореме Виета, являются корнями данного уравнения. *Ответ*: -2; -5.

1. Верно ли, что если квадратное уравнение приведенное, то сумма его корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену?

2. Верно ли, что если дискриминант квадратного уравнения больше нуля, то сумма его корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену?

2.94. Используя теорему, обратную теореме Виета, проверьте, являются ли корнями уравнения:

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$ числа 1 и 4;
б) $x^2 + 6x + 8 = 0$ числа 2 и 4;
в) $x^2 - x - 12 = 0$ числа 4 и -3;
г) $x^2 + 9x - 10 = 0$ числа 1 и -10.

2.95. С помощью теоремы Виета найдите сумму и произведение корней уравнения, если это возможно:

а) $x^2 - 9x + 2 = 0$; б) $x^2 + 7x - 1 = 0$;
в) $x^2 + x + 3 = 0$; г) $x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$;
д) $x^2 - 13x + 31 = 0$; е) $4x^2 - 3x - 5 = 0$;
ж) $-x^2 - 10x = 0$; з) $3x^2 - 8 = 0$.

2.96. Убедитесь, что уравнение имеет корни и, не решая уравнение, определите знаки его корней:

а) $x^2 - 10x + 7 = 0$; б) $x^2 - 12x - 5 = 0$;
в) $x^2 + 9x + 2 = 0$; г) $x^2 + 7x - 4 = 0$;
д) $3x^2 - 7x + 2 = 0$; е) $2x^2 - x - 1 = 0$;
ж) $4x^2 + 13x + 1 = 0$; з) $-5x^2 - 9x + 2 = 0$.

2.97. Найдите коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, если известно, что его корнями являются числа:

а) 2 и 3; б) -4 и 5; в) -1 и -6.

2.98. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) 1 и -12; б) 6 и $\frac{1}{6}$; в) -3 и $-0,8$.

2.99. Приведите два примера квадратного уравнения, один из корней которого равен 1, а другой является:

а) простым числом; б) целым числом, меньшим 0,3.

2.100. Составьте квадратное уравнение, зная, что сумма его корней, являющихся взаимно обратными числами, равна 7.

2.101. Решите уравнение, не используя формулы корней квадратного уравнения:

а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
в) $x^2 - 7x + 12 = 0$; г) $x^2 - 5x - 6 = 0$;
д) $x^2 - 9x + 20 = 0$; е) $x^2 + 11x + 24 = 0$;
ж) $x^2 - x - 6 = 0$; з) $x^2 + 8x - 20 = 0$;
и) $x^2 - 13x + 30 = 0$; к) $x^2 + 17x + 30 = 0$;
л) $x^2 - x - 30 = 0$; м) $x^2 + 10x - 24 = 0$.

2.102. Приведите пример квадратного уравнения, один из корней которого:

а) в 3 раза больше другого; б) на 7 меньше другого.

2.103. Найдите значение выражения $x_1 + x_2 - 3x_1x_2$, зная, что x_1 и x_2 — корни уравнения:

а) $x^2 + 10x - 1 = 0$; б) $8x^2 - x - 5 = 0$;
в) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$; г) $x^2 - \sqrt{5}x - 6\sqrt{5} = 0$.

2.104. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 7x - 12 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

а) $(x_1 + x_2)^2$; б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$; в) $x_1^2 + x_2^2$.

2.105. Составьте квадратное уравнение, каждый корень которого:

а) в 3 раза меньше соответствующего корня уравнения $x^2 - 39x + 18 = 0$;

б) в 6 раз больше соответствующего корня уравнения $3x^2 - 8x + 1 = 0$.

2.106. Один из корней уравнения:

а) $x^2 + px - 15 = 0$ равен 3; б) $5x^2 - px + 4 = 0$ равен 1.

Найдите другой корень и число p.

2.107. Один из корней уравнения:

а) $x^2 - 9x + q = 0$ равен 8; б) $6x^2 + 5x - q = 0$ равен –1.

Найдите другой корень и число q.

2.108. Найдите корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x - q = 0$ и число q, если $x_1 - x_2 = 11$.

2.109. Корни уравнения $x^2 - 20x + q = 0$ относятся как $3 : 7$. Найдите корни уравнения и свободный член q.

2.110. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$; б) $5-\sqrt{3}$ и $5+\sqrt{3}$;

в) $3+2\sqrt{5}$ и $3-2\sqrt{5}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{2}-\sqrt{7}$.

2.111. Решите уравнение, не используя формулы корней квадратного уравнения:

а) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$;

б) $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$;

в) $x^2+(\sqrt{2}-5)x-5\sqrt{2}=0$.

2.112. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 2x - q = 0$ удовлетворяют равенству $3x_1 - 5x_2 = 22$. Найдите корни уравнения и число q.

2.113. Найдите корни уравнения $x^2 - 12x - q = 0$ и число q, если известно, что:

а) один из корней в 5 раз больше другого;

б) один из корней в 3 раза меньше другого;

в) один из корней составляет 20 % другого.

2.114. Уравнение $x^2 - 10x - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа x_1^2 и x_2^2.

2.115. Составьте квадратное уравнение, зная, что произведение его корней равно 8, а сумма квадратов его корней равна 20.

2.116. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2-(\sqrt{6}+11)x-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=0$. Найдите значение выражения $x_1 + x_1x_2 + x_2$.

2.117. Восьмиклассник, решая уравнение:

а) $x^2 + 6x - 7 = 0$ получил корни 1 и –7;

б) $x^2 - 2x - 15 = 0$ получил корни 3 и –5;

в) $x^2 + x - 42 = 0$ получил корни 6 и –7.

С помощью теоремы, обратной теореме Виета, проверьте правильность полученных результатов.

2.118. Выберите уравнения, которые имеют корни, и с помощью теоремы Виета найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 5x + 1 = 0$; б) $x^2 + 8x - 3 = 0$;
в) $x^2 - 9x - \sqrt{2} = 0$; г) $x^2 + 2x + 10 = 0$;
д) $x^2 + 6x + 7 = 0$; е) $2x^2 + 7x - 13 = 0$;
ж) $x^2 - 8x = 0$; з) $-4x^2 + 17 = 0$.

2.119. Убедитесь, что уравнение имеет корни, и, не решая уравнение, определите знаки его корней:

а) $x^2 - 13x + 5 = 0$; б) $x^2 - 8x - 1 = 0$;
в) $3x^2 + 10x + 1 = 0$; г) $2x^2 + x - 5 = 0$.

2.120. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) 5 и 8; б) –2 и 0,5; в) –3 и $-\frac{1}{3}$.

2.121. Решите уравнение, не используя формулы корней квадратного уравнения:

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$; б) $x^2 + 8x + 7 = 0$;
в) $x^2 - 8x + 15 = 0$; г) $x^2 - 2x - 3 = 0$;
д) $x^2 - 11x + 18 = 0$; е) $x^2 + 14x + 13 = 0$;
ж) $x^2 - 4x - 21 = 0$; з) $x^2 - x - 56 = 0$.

2.122. Найдите значение выражения $x_1x_2 - (x_1 + x_2)$, зная, что x_1 и x_2 — корни уравнения:

а) $x^2 + 7x - 9 = 0$; б) $2x^2 - x - 13 = 0$.

2.123. Уравнение $x^2 - 5x + 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

а) $(x_1 + x_2)^2$; б) $x_1^2 + x_2^2$.

2.124. Составьте квадратное уравнение, каждый корень которого в 5 раз больше соответствующего корня уравнения $x^2 - 5x + 1 = 0$.

2.125. а) Один из корней уравнения $x^2 + px - 28 = 0$ равен 14. Найдите другой корень и коэффициент p.
б) Один из корней уравнения $4x^2 - x + c = 0$ равен 1. Найдите другой корень и свободный член c.

2.126. Найдите корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 3x - q = 0$ и число q, если $x_1 - x_2 = -9$.

2.127. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $1 + \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{3}$; б) $7 - \sqrt{2}$ и $7 + \sqrt{2}$.

2.128. Корни уравнения $x^2 - 14x + q = 0$ относятся как $1 : 6$. Найдите корни уравнения и коэффициент q.

2.129. Составьте квадратное уравнение, зная, что произведение его корней равно –10, а сумма квадратов его корней равна 29.

2.130. Вычислите:

а) $(5^{-6} \cdot 5^{-4})^2 : 5^{-22}$; б) $\left(\frac{7}{9}\right)^0 \cdot 0{,}5^{-1}$; в) $\frac{2^{-7} \cdot 16^4}{32^2}$.

2.131. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{2x+3y}{4} = \frac{3x+4y}{7}, \\ \frac{5y-6x}{10} = 6 - 2x. \end{cases}$

2.132. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{50} - \sqrt{18}\right) \cdot \sqrt{2}$.

2.133. Разложите на множители:

а) $7a + 7b - c(a + b)$; б) $(4 - a)^2 - 25a^2$;
в) $(2x - 1)^2 - (4x + 1)^2$; г) $9n^2 - 6n + 1 - (n + 5)^2$.

2.134. Для функции $f(x) = 2x - 3$:

а) вычислите $f(-3) - f(6)$;
б) найдите значения аргумента, при которых выполняются условия $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) = 15$.

2.135. Предприниматель хочет разместить некоторую сумму денег в одном из банков. Партнер предпринимателя, разместивший в банке A 620 р., через год получил 663,4 р. Его школьный приятель положил в банк B 750 р. и через год получил 795 р. В каком банке выгоднее разместить деньги?

2.136. Докажите, что разность квадратов двух последовательных натуральных чисел является нечетным числом.

§ 10. Квадратный трехчлен. Разложение квадратного трехчлена на множители

2.137. Разложите на множители двучлен:

а) $2x^3 - 4x^2$; б) $9x^2 - 6x$; в) $25x^4 - 20x$.

2.138. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 + 4x - 2xy - 8y$; б) $16x^2 + 40x + 25$;
в) $36t^2 + 36t + 9$; г) $x^2 - x + 0{,}25$.