


2.128. Корни уравнения $x^2 - 14x + q = 0$ относятся как 1 : 6. Найдите корни уравнения и коэффициент q .

 **2.129.** Составьте квадратное уравнение, зная, что произведение его корней равно -10 , а сумма квадратов его корней равна 29.



2.130. Вычислите:

а) $(5^{-6} \cdot 5^{-4})^2 : 5^{-22}$; б) $\left(\frac{7}{9}\right)^0 \cdot 0,5^{-1}$; в) $\frac{2^{-7} \cdot 16^4}{32^2}$.

2.131. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2x + 3y}{4} = \frac{3x + 4y}{7}, \\ \frac{5y - 6x}{10} = 6 - 2x. \end{cases}$$

2.132. Найдите значение выражения $(\sqrt{50} - \sqrt{18}) \cdot \sqrt{2}$.

2.133. Разложите на множители:

а) $7a + 7b - c(a + b)$; б) $(4 - a)^2 - 25a^2$;
в) $(2x - 1)^2 - (4x + 1)^2$; г) $9n^2 - 6n + 1 - (n + 5)^2$.

2.134. Для функции $f(x) = 2x - 3$:

- а) вычислите $f(-3) - f(6)$;
б) найдите значения аргумента, при которых выполняются условия $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) = 15$.

2.135. Предприниматель хочет разместить некоторую сумму денег в одном из банков. Партнер предпринимателя, разместивший в банке А 620 р., через год получил 663,4 р. Его школьный приятель положил в банк В 750 р. и через год получил 795 р. В каком банке выгоднее разместить деньги?

2.136. Докажите, что разность квадратов двух последовательных натуральных чисел является нечетным числом.

§ 10. Квадратный трехчлен.

Разложение квадратного трехчлена на множители



2.137. Разложите на множители двучлен:

а) $2x^3 - 4x^2$; б) $9x^2 - 6x$; в) $25x^4 - 20x$.

2.138. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 + 4x - 2xy - 8y$; б) $16x^2 + 40x + 25$;
в) $36t^2 + 36t + 9$; г) $x^2 - x + 0,25$.

2.139. Определите степень многочлена и разложите его на множители:

а) $-36t^2 + 36t - 9$;

б) $0,01x^2 - x + 25$;

в) $0,04p^2 - 4p + 100$;

г) $x^4 - 2x^2 + 1$.



Многочлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется **квадратным трехчленом**.

Например, $2x^2 - 3x - 2$ — квадратный трехчлен, числа $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$ — его коэффициенты.

Значение переменной, при котором значение квадратного трехчлена равно нулю, называется **корнем квадратного трехчлена**.

Чтобы найти корни квадратного трехчлена, нужно решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Например, корнями квадратного трехчлена $2x^2 - 3x - 2$ являются корни квадратного уравнения $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Найдем их: $D = 25$, $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$, $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$. Числа $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$ являются корнями квадратного трехчлена $2x^2 - 3x - 2$.

Квадратные трехчлены

$$x^2 + 6x - 4$$

$$-8x^2 + x + 6$$

$$0,5x^2 - x - 1$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

Разложим на множители квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$.

1) Вынесем за скобки первый коэффициент трехчлена:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

2) Выделим полный квадрат:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right).$$

3) Если $D > 0$, то получим: $a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.


Таким образом, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

 Чтобы разложить квадратный трехчлен на множители, нужно:

<p>① Найти корни квадратного трехчлена x_1 и x_2.</p> <p>② По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ записать произведение трех множителей: первого коэффициента a и разностей $x - x_1$ и $x - x_2$.</p>	<p>Разложите на множители квадратный трехчлен $2x^2 - 3x - 2$.</p> <p>① $x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2}$.</p> <p>② $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.</p> <p>Множитель 2 можно внести во вторую скобку:</p> $2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x + 1).$ <p>Таким образом, $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$.</p>
--	---

Например, квадратный трехчлен $7x^2 + 3x - 4$ имеет корни $x_1 = -1; x_2 = \frac{4}{7}$, поэтому $7x^2 + 3x - 4 = 7(x + 1)\left(x - \frac{4}{7}\right) = (x + 1)(7x - 4)$.

 Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю, то квадратный трехчлен можно представить в виде $a(x - x_1)^2$, где x_1 — корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - 12x + 36$.
 $D = 144 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$, $x_1 = -\frac{-12}{2 \cdot 1} = 6$, тогда $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$.
 В этом случае квадратный трехчлен можно записать в виде квадрата двучлена.

Разложим на множители квадратный трехчлен $0,25x^2 + 2x + 4$.
 $D = 4 - 4 \cdot 0,25 \cdot 4 = 0$,
 $x_1 = -\frac{2}{2 \cdot 0,25} = -4$, тогда
 $0,25x^2 + 2x + 4 = 0,25(x + 4)^2$,
 или $0,25x^2 + 2x + 4 = (0,5x + 2)^2$.

$$x^2 - 10x + 25; D = 0;$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$9x^2 + 6x + 1; D = 0;$$

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$$

$$-4x^2 + 4x - 1; D = 0;$$

$$-4x^2 + 4x - 1 = -(2x - 1)^2$$

Дискриминант квадратного трехчлена $-x^2 + 8x - 16$ равен нулю, тогда $-x^2 + 8x - 16 = -(x^2 - 8x + 16) = -(x - 4)^2$.



Если дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, то квадратный трехчлен нельзя разложить на множители.

Например, дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + x + 5$ отрицательный ($D = 1 - 4 \cdot 5 < 0$), значит, этот квадратный трехчлен нельзя разложить на множители.



Корни квадратного трехчлена

1. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $3x^2 - x - 4$;

б) $3p^2 - 4p + 10$.

а) Решим квадратное уравнение $3x^2 - x - 4 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = 49 > 0,$$

$$x_1 = \frac{1+7}{6} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{1-7}{6} = -1.$$

Числа -1 ; $\frac{4}{3}$ являются корнями квадратного трехчлена $3x^2 - x - 4$.

Ответ: -1 ; $1\frac{1}{3}$.

б) $D = 16 - 120 < 0$, значит, квадратный трехчлен не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Разложение квадратного трехчлена на множители

2. Разложите на множители, если это возможно, квадратный трехчлен:

а) $4x^2 - 8x + 3$;

б) $-x^2 - 6x - 8$;

в) $81t^2 - 36t + 4$;

г) $8t^2 - 6t + 3$.

а) Найдем корни квадратного трехчлена:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0,$$

$$D = 64 - 48 = 16,$$

$$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}.$$

По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ запишем произведение трех множителей:

$$4x^2 - 8x + 3 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Внесем множители в скобки:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 3 &= \\ &= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \\ &= (2x - 3)(2x - 1). \end{aligned}$$

б) Найдем корни квадратного трехчлена:

$$\begin{aligned} -x^2 - 6x - 8 &= 0, \\ x^2 + 6x + 8 &= 0, \quad D = 36 - 32 = 4, \\ x_1 &= -4, \quad x_2 = -2. \end{aligned}$$

Тогда

$$-x^2 - 6x - 8 = -(x + 4)(x + 2).$$

в) $D = 1296 - 1296 = 0$. Квадратный трехчлен $81t^2 - 36t + 4$ можно записать в виде квадрата двучлена:

$$81t^2 - 36t + 4 = (9t - 2)^2.$$

г) Поскольку $D = 36 - 96 < 0$, квадратный трехчлен нельзя разложить на множители.



Если дискриминант квадратного трехчлена больше нуля, то квадратный трехчлен: а) нельзя разложить на множители; б) имеет два различных корня; в) представляет собой квадрат двучлена.

Выберите правильный ответ.



2.140. Найдите корни квадратного трехчлена:

- а) $2x^2 + 5x + 2$; б) $-x^2 - x + 6$; в) $x^2 - 2x - 8$;
г) $-x^2 - 4x - 3$; д) $x^2 - 5x + 9$; е) $8x^2 - 10x - 3$.

2.141. Можно ли представить в виде произведения двух двучленов квадратный трехчлен:

- а) $x^2 - 9x + 2$; б) $7x^2 - 5x + 12$; в) $x^2 - x + 5$?

Приведите пример квадратного трехчлена, который нельзя разложить на множители.

2.142. Разложите на множители, если это возможно, квадратный трехчлен:

- а) $x^2 - x - 30$; б) $x^2 - 6x + 8$; в) $2x^2 + 7x - 4$;
 г) $3x^2 - 5x - 2$; д) $2x^2 + x - 3$; е) $-x^2 - x + 42$;
 ж) $5x^2 - 8x - 13$; з) $-3x^2 - 7x + 6$; и) $x^2 - 6x + 9$;
 к) $x^2 - x - 6$; л) $4x^2 + 4x + 1$; м) $-8x^2 + 9x - 1$.

2.143. Представьте квадратный трехчлен в виде произведения двух двучленов:

- а) $6x^2 - x - 1$; б) $12x^2 - 5x - 2$;
 в) $-8x^2 + 2x + 1$; г) $-18x^2 + 21x + 4$.

2.144. Разложите на множители квадратный трехчлен:

- а) $x^2 - 2x - 1$; б) $x^2 + 4x - 2$; в) $2x^2 + 5x - 1$.

2.145. Представьте в виде произведения:

- а) $9x + 14 + x^2$; б) $3 - 4x^2 - 11x$;
 в) $7x - 6 + 3x^2$; г) $10x - 25x^2 - 1$.

2.146. Разложите на множители квадратный трехчлен:

- а) $x^2 - 3x + 2$; б) $5x^2 - 15x + 10$;
 в) $2x^2 - 6x + 4$; г) $-0,5x^2 + 1,5x - 1$;
 д) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15$; е) $-\frac{2}{3}x^2 - 3x + 6$.

2.147. Разложите на множители многочлен:

- а) $x^3 - 7x^2 - 18x$; б) $2x^3 + 5x^2 - 3x$;
 в) $-x^3 - x^2 + 12x$; г) $-16x^3 + 8x^2 - x$;
 д) $x^4 - 6x^3 + 8x^2$; е) $7x^4 + 8x^3 + x^2$;
 ж) $-12x^4 + 7x^3 - x^2$; з) $9x^4 - 30x^3 + 25x^2$.

2.148. Найдите значение a , при котором разложение на множители квадратного трехчлена:

- а) $2x^2 - 5x + a$ содержит множитель $(x - 2)$;
 б) $3x^2 + 7x - a$ содержит множитель $(3x - 2)$.

 **2.149.** Разложите на множители:

- а) $x^2(x + 1) + 4x(x + 1) - 12(x + 1)$;
 б) $4x^2(x^2 - 25) - 5x(x^2 - 25) + (x^2 - 25)$.

 **2.150.** Представьте в виде произведения:

- а) $8x^2 - 6xy + y^2$; б) $6x^2 - 5xy - 6y^2$.



2.151. Выберите квадратные трехчлены, имеющие корни, и найдите корни этих квадратных трехчленов:

- а) $3x^2 - 10x + 3$; б) $x^2 - 8x + 12$; в) $-x^2 + 3x - 8$.

2.152. Разложите на множители, если это возможно, квадратный трехчлен:

- а) $x^2 + x - 20$; б) $x^2 - 7x + 10$; в) $2x^2 + 3x - 5$;
 г) $3x^2 - 2x - 1$; д) $3x^2 + x - 2$; е) $-x^2 - 2x + 35$;
 ж) $-4x^2 + 5x - 1$; з) $x^2 + 8x + 16$; и) $3x^2 + 11x - 14$;
 к) $4x^2 - 12x + 9$; л) $x^2 + 2x + 9$; м) $-2x^2 - 5x - 11$.

2.153. Представьте квадратный трехчлен в виде произведения двух двучленов:

- а) $6x^2 - x - 12$; б) $-12x^2 + x + 1$.

2.154. Разложите на множители квадратный трехчлен:

- а) $x^2 + 2x - 1$; б) $x^2 - 4x - 2$; в) $3x^2 - 2x - 4$.

2.155. Представьте в виде произведения:

- а) $14x + 40 + x^2$; б) $2 + 3x^2 - 7x$;
 в) $3 - 11x + 6x^2$; г) $12x + 36x^2 + 1$.

2.156. Разложите на множители многочлен:

- а) $x^3 + x^2 - 12x$; б) $-3x^3 + 14x^2 - 8x$;
 в) $2x^4 - 7x^3 - 4x^2$; г) $-36x^4 + 12x^3 - x^2$.



2.157. Разложите на множители

$$x^2(x^2 + 3) - 3x(x^2 + 3) - 10(x^2 + 3).$$



2.158. Представьте в виде произведения $3x^2 - 14xy + 8y^2$.



2.159. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{(3\sqrt{5})^2}{15}$; б) $\frac{6}{(2\sqrt{3})^2}$.

2.160. Решите систему уравнений $\begin{cases} 0,5x + 0,3y = 8, \\ 1,2x - 0,5y = 7. \end{cases}$

2.161. Решите неравенство $(x - 6)^2 + 4x \geq (x - 4)^2$.


2.162. Представьте в виде степени с основанием 10 выражение $10\,000^3 : 0,01^{-5}$.

2.163. Постройте график функции $y = -x + 4$ и найдите:


- а) область определения функции; б) множество значений функции; в) нуль функции; г) значения аргумента, при которых значения функции положительны.

2.164. Крупнейшему в Беларуси предприятию, занимающемуся реставрационными работами на памятниках истории и культуры, «Белреставрация» поступил срочный заказ на реставрацию исторического здания в г. Минске. На работу было направлено 2 бригады. Одна бригада может выполнить этот заказ за 12 дней, а другая — за 8 дней. Удастся ли предприятию выполнить заказ за 5 дней без привлечения дополнительных работников, если бригады будут работать вместе?

§ 11. Решение текстовых задач с помощью квадратных уравнений

 **2.165.** Бобруйская швейная фабрика «Славянка» разработала новую модель школьного костюма. На его пошив идет на 0,3 м больше материала, чем на пошив костюма прежней модели. Известно, что для 8 костюмов новой модели потребовалось столько же материала, сколько для 9 костюмов прежней модели. Сколько метров материала требуется для пошива одного костюма новой модели?

2.166. Сколько процентов составляют трехкомнатные квартиры от числа всех квартир в доме, если количество трехкомнатных квартир меньше всех остальных на 20 %?

 Рассмотрим задачу. Спортивный зал размерами 16×20 м разделен на три части: два прямоугольника и квадрат (рис. 38). Какова сторона квадрата, если его площадь на 18 м^2 меньше площади прямоугольника, имеющего с ним общую сторону?

Решение. Обозначим длину стороны квадрата через x м, тогда его площадь равна $x^2 \text{ м}^2$. Длины сторон прямоугольника равны x м и $(20 - x)$ м, а его площадь — $x(20 - x) \text{ м}^2$, тогда $x^2 = x(20 - x) - 18$. Выполним преобразования и получим: $2x^2 - 20x + 18 = 0$; $x^2 - 10x + 9 = 0$. Квадратное уравнение $x^2 - 10x + 9 = 0$ имеет корни 9 и 1. Значит, сторона квадрата может быть равна либо 1 м, либо 9 м.

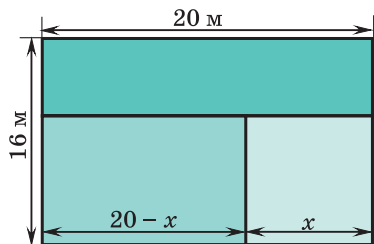


Рис. 38

Ответ: 1 м или 9 м.