


2.212. Вычислите: $(2\sqrt{3} - 1)(3\sqrt{3} + 5) - 7\sqrt{3}$.

2.213. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x - 2 < 1,5x + 1, \\ 4 - 2x \geq x - 2. \end{cases}$

2.214. Преобразуйте в многочлен выражение $(-2a - 3b)^2 - (9b - 7a)b$.

2.215. Длина шага первоклассника равна 0,4 м. Он проходит путь от дома до школы, делая 750 шагов. Длина шага восьмиклассника на 50 % больше длины шага первоклассника. Сколько шагов сделает восьмиклассник, пройдя тот же путь?


§ 12. Решение целых рациональных уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

 **2.216.** Решите систему уравнений $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ 4x + 2y = 14. \end{cases}$

2.217. Решите уравнение:

а) $x^2 - 5x = 0$;

б) $x^3 - 4x^2 = 0$.

 Большое число математических задач сводится к решению различных уравнений. Некоторые из уравнений вы уже научились решать по правилам, формулам, алгоритмам. Среди методов решения уравнений одним из основных является метод сведения одного уравнения к другому, способ решения которого известен. Таким методом является **метод замены переменной**.

Решим, например, уравнение $2x^4 + 15x^2 - 8 = 0$. Представим x^4 в виде $(x^2)^2$ и обозначим x^2 через t (введем новую переменную). Тогда данное уравнение примет вид $2t^2 + 15t - 8 = 0$.

Решим полученное квадратное уравнение: $D = 289$, $\begin{cases} t = -8, \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Подставим найденные значения t в равенство $t = x^2$ и получим $\begin{cases} x^2 = -8, \\ x^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$ Первое уравнение совокупности не имеет

корней, корни второго уравнения $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уравнение $2x^4 + 15x^2 - 8 = 0$, которое мы решили, относится к биквадратным.

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется биквадратным.

Биквадратные уравнения относятся к целым рациональным уравнениям.



Целыми рациональными уравнениями называются уравнения, у которых в левой и правой частях — только многочлены.

Например, уравнения $x^3 - 4x = (x - 6)^2 + 7$; $5x^4 = 144$ являются целыми рациональными.



Решение уравнений методом замены переменной

1. Решите уравнение

$$(x - 2)^2 - 5(x - 2) + 6 = 0.$$

Первый способ. Выполним тождественные преобразования:

$$x^2 - 4x + 4 - 5x + 10 + 6 = 0;$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$D = 81 - 80 = 1, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 4.$$

Ответ: 4; 5.

Второй способ (методом замены переменной). Обозначим двучлен $x - 2$ через t , т. е. $t = x - 2$. Выполним подстановку в уравнение и получим $t^2 - 5t + 6 = 0$. Решим квадратное уравнение:

$$D = 25 - 24 = 1; \quad \begin{cases} t = 2, \\ t = 3. \end{cases}$$


Подставим значения t и най-

дем x : $\begin{cases} x - 2 = 2, & \begin{cases} x = 4, \\ x - 2 = 3; & \begin{cases} x = 5. \end{cases} \end{cases}$

Ответ: 4; 5.

2. Решите уравнение:

а) $2(x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) - 3 = 0$;

 б) $4x^2 - 7|x| + 3 = 0$.

а) Для решения этого уравнения рациональнее применить метод замены переменной. Пусть $x^2 - x = t$, тогда уравнение примет вид $2t^2 - 5t - 3 = 0$. Решим квадратное уравнение:

$$D = 25 + 24 = 49;$$

$$\begin{cases} t = \frac{5+7}{4} = 3, \\ t = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Подставим значения t :


$$\begin{cases} x^2 - x = 3, \\ x^2 - x = -\frac{1}{2}; \\ x^2 - x - 3 = 0, \\ x^2 - x + \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение совокупности: $D = 1 + 12 = 13$;

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Второе уравнение совокупности корней не имеет, так как $D = 1 - 2 = -1 < 0$.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

 б) Поскольку $x^2 = |x|^2$, то обозначим $|x| = t$ и выполним замену переменной: $4t^2 - 7t + 3 = 0$. Найдем корни полученного уравнения:

$$D = 49 - 48 = 1; \quad \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Подставим значения t и получим

$$\begin{cases} |x| = 1, \\ |x| = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Откуда $x = 1; -1; 0,75; -0,75$.

Ответ: $-1; -0,75; 0,75; 1$.



1. Какие из следующих уравнений являются биквадратными:

а) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$; б) $x^4 - 3x - 1 = 0$;

в) $x^4 + 8 = 0$; г) $x^4 + 7x^2 = 0$?

2. Какие из следующих уравнений являются целыми рациональными:

а) $2x + 9 = 0$; б) $x^2 - 9x + 7 = 0$;

в) $\frac{2x - 4}{x^2} = 8$; г) $\frac{4x^2 - 6x}{2x^2 + 1} = 0$?



2.218. Выполните замену переменной и решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; б) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

в) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$; г) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$;

д) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$; е) $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$;

ж) $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$; з) $8x^4 - 19x^2 + 6 = 0$.

2.219. Решите уравнение двумя способами:

а) $(x - 2)^2 - 4(x - 2) - 5 = 0$;

б) $(x^2 + 3)^2 - 11(x^2 + 3) + 28 = 0$.

2.220. Решите уравнение:

а) $(x - 5)^4 - 3(x - 5)^2 - 4 = 0$;

б) $(3x + 2)^4 - 10(3x + 2)^2 + 9 = 0$;

в) $(8x - 1)^4 + 5(8x - 1)^2 + 4 = 0$;

г) $(x - 7)^4 + 2(x - 7)^2 - 8 = 0$.

2.221. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12 = 0$;

б) $(x^2 + 6x)^2 + 5(x^2 + 6x) - 24 = 0$;

в) $(x^2 - x - 1)^2 - 10(x^2 - x - 1) + 9 = 0$;

г) $(x^2 - 4x + 3)^2 + 6(x^2 - 4x + 3) - 7 = 0$.

2.222. Решите уравнение:

- а) $(x^2 - 4x)^2 + 8x^2 - 32x + 15 = 0$;
 б) $(x^2 + 3x)^2 - 14x^2 - 42x + 40 = 0$;
 в) $(x^2 - 7x + 11)^2 - 3x^2 + 21x - 37 = 0$;
 г) $(x^2 - 2x - 14)^2 + 4x^2 - 8x - 61 = 0$.

2.223. Выполните замену переменной и решите уравнение:

- а) $(2x^2 - 5x)(2x^2 - 5x - 4) = 21$;
 б) $(x^2 - 3x - 5)(x^2 - 3x + 1) = -5$;
 в) $(x^2 + 4x - 1)(x^2 + 4x + 3) = 12$;
 г) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) - 28 = 0$.

 **2.224.** Решите уравнение:

- а) $(x - 2)(x + 1)(x + 2)(x + 5) + 20 = 0$;
 б) $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) = 100$.

 **2.225.** Выполните замену переменной и решите уравнение:

- а) $(x^2 + 2x)^2 - 4(x + 1)^2 + 7 = 0$;
 б) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$.

 **2.226.** Выполните замену переменной и решите уравнение:

- а) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$; б) $6x^2 - 5|x| - 1 = 0$;
 в) $(x - 3)^2 + 7|x - 3| - 8 = 0$; г) $(3x + 1)^2 - 2|3x + 1| - 15 = 0$.

 **2.227.** Решите уравнение:

- а) $(3x^2 + 7)(x^2 - 3) - (x^2 - 5)(x^2 + 5) = x^4 + 3x^2$;
 б) $(2x^2 - 9)(x^2 + 2) - (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 5x^2 - 18$.

 **2.228.** Решите уравнение:

- а) $x^4 - 4x^2(x - 6) - 5(x - 6)^2 = 0$;
 б) $(x + 2)^4 - 3x^2(x + 2)^2 - 4x^4 = 0$.



2.229. Решите биквадратное уравнение:

- а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
 в) $7x^4 - 6x^2 - 1 = 0$; г) $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$.

2.230. Решите уравнение двумя способами:

- а) $(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1 = 0$;
 б) $(x^2 - 4)^2 - 2(x^2 - 4) - 15 = 0$.

2.231. Решите уравнение:

- а) $(x + 3)^4 - 8(x + 3)^2 - 9 = 0$;
 б) $(2x - 3)^4 - 5(2x - 3)^2 + 4 = 0$.

2.232. Выполните замену переменной и решите уравнение:

- а) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$;
 б) $(x^2 - 6x)^2 + (x^2 - 6x) - 56 = 0$.

2.233. Выполните замену переменной и решите уравнение:

- а) $(x^2 + x)(x^2 + x - 7) = 60$;
 б) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) = 3$;
 в) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 4) = 10$;
 г) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$.

 **2.234.** Решите уравнение:

- а) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$;
 б) $(x - 3)(x - 1)(x - 5)(x - 7) = -16$.

 **2.235.** Выполните замену переменной и решите уравнение:

- а) $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$; б) $(x^2 - 4x)^2 - (x - 2)^2 = 16$.

 **2.236.** Выполните замену переменной и решите уравнение:

- а) $x^2 - 10|x| + 9 = 0$; б) $2x^2 + 3|x| - 2 = 0$.



2.237. Из данных равенств выберите все верные равенства:

- а) $1,064 - 0,43 = 0,634$; б) $5,6 : (0,76 - 0,48) = 20$;
 в) $5,45 : 0,5 = 10,9$; г) $3,6 : (2,87 - 2,75) = 3$;
 д) $2,418 + 60,64 \cdot 10^{-1} = 8,482$.

2.238. Известно, что первая космическая скорость равна $7,9 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, вторая — $1,12 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а третья — $1,667 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Выразите эти скорости в километрах в секунду и запишите полученные результаты в стандартном виде.

2.239. Найдите наименьшее значение выражения:

- а) $(x - 4)^2 + 3$; б) $(3x - 1)^2 - 8$;
 в) $2(x - 6)^2 + 1$; г) $9(x + 5)^2 - 6$.

2.240. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

- а) $x^2 + 4x + 5$; б) $(2x - 4) : (x^2 - 9)$;
 в) $(2x - 4) : (x^2 + 6)$; г) $(3x + 8) : (x^2 - x)$.

2.241. Для функции $f(x) = -\frac{x}{3} + 5$ найдите:

а) нуль функции; б) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

2.242. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{10} + 8)(\sqrt{10} - 8)$; б) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$.

2.243. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{3x-7}{4} - \frac{2y-3}{5} = 1, \\ \frac{2x-y}{2} - 1 = y - 2. \end{cases}$$

2.244. Гарантированный месячный заработок рекламного агента на испытательном сроке — 300 р. Каждый найденный агентом клиент приносит ему дополнительный доход, составляющий 5 % от суммы договора. Фирма, в которой работает агент, заключает договоры только на суммы не менее 250 р. Выясните, на какую сумму в месяц необходимо заключить договоров агенту, чтобы его заработок составлял не менее 800 р. Сколько клиентов, заключивших договор на 250 р., нужно привлечь агенту, чтобы заработать в месяц 850 р.?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определение квадратного уравнения и уметь различать его виды;
- уметь решать неполные квадратные уравнения;
- уметь определять количество корней квадратного уравнения по его дискриминанту;
- знать и уметь применять формулы корней квадратного уравнения для решения квадратных уравнений;
- знать теоремы Виета (прямую и обратную);
- уметь применять теорему Виета и обратную ей при решении задач;
- знать и уметь применять формулу разложения квадратного трехчлена на множители;
- уметь решать целые рациональные уравнения, используя метод замены переменной;
- уметь решать задачи с помощью квадратных уравнений.

Я проверяю свои знания

1. Пользуясь определением квадратного уравнения, среди данных уравнений выберите квадратные и определите их коэффициенты:

а) $7x^2 - 6x + 3 = 0$;

б) $2x^2 - x - 5 = 0$;

в) $3x^2 - 8 = 0$;

г) $x^2 - 6x = 0$;

д) $7x + 9 = 0$;

е) $x^3 + 2x^2 + 15 = 0$.

Есть ли среди выбранных квадратных уравнений неполные квадратные?

2. Найдите дискриминант квадратного уравнения и определите число его корней:

а) $5x^2 + 3x - 1 = 0$;

б) $x^2 - 2x + 6 = 0$;

в) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;

г) $x^2 - x - 3 = 0$.

3. Решите уравнение:

а) $x^2 - 4 = 0$;

б) $x^2 - 2 = 0$;

в) $10x^2 + 5x = 0$;

г) $3x^2 + 1 = 0$;

д) $x^2 - 10x + 25 = 0$;

е) $x^2 + x - 6 = 0$;

ж) $5x^2 + 8x - 4 = 0$.

4. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 + 9x + 20$;

б) $-x^2 + 4x - 3$;

в) $2x^2 - 3x - 2$;

г) $25x^2 + 10x + 1$.

5. Найдите значение переменной, при котором разность значений выражений $\frac{x^2+1}{5}$ и $\frac{x}{2}$ равна нулю.

6. Спортивный клуб арендует два зала. Один из них имеет форму квадрата, а другой — прямоугольника, длина которого на 5 м, а ширина на 3 м больше стороны квадрата. Известно, что площадь одного зала в 1,6 раза меньше площади другого. Найдите, сколько метров потолочного плинтуса необходимо приобрести для ремонта двух залов, зная, что к расчетному количеству нужно добавить 10 % плинтуса, идущего в отходы.

7. Найдите значение выражения $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $4x^2 - 6x - 1 = 0$.

8. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $x^4 - 11x^2 + 10 = 0$;

б) $(x^2 - 5x)^2 - 5(x^2 - 5x) - 6 = 0$;

в) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$;

г) $(x^2 - 2x)^2 - 7(x - 1)^2 - 1 = 0$.

9. Банки A и B ежегодно увеличивают на одно и то же число процентов сумму, имеющуюся на вкладе к моменту начисления процентов. В каком банке выгоднее разместить вклад, если в банке A за два года вклад возрастет с 2000 р. до 2420 р., а в банке B за два года вклад в 5000 р. вырастет до 5832 р.?

10. Разложите многочлен на множители $6x^2 + xy - 12y^2$.

Практическая математика

1. В летнем спортивном лагере площадка для оздоровительных занятий имеет форму многоугольника, вдоль каждой стороны которого размещен спортивный тренажер. Число всех дорожек — диагоналей площадки — равно 54. Найдите, сколько тренажеров расположено на площадке.

2. Новоселы планируют $\frac{1}{3}$ площади пола в коридоре выложить плиткой. Для этого потребуется 450 маленьких квадратных плиток или 300 больших. Известно, что сторона большой плитки на 5 см больше стороны маленькой. На остальной части пола в коридоре планируется положить паркет. Сколько квадратных метров паркета потребуется?

3. Предприниматель получил кредит под определенный процент годовых с возможностью досрочного погашения кредита. Через год в счет погашения кредита предприниматель вернул $\frac{1}{5}$ суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита предприниматель внес сумму, на 15,2 % превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в этом банке?

4. В зале для проведения совещаний два одинаковых стола прямоугольной формы составили так, как показано на рисунке 42. Периметр образовавшейся фигуры равен 32 м, а площадь каждого прямоугольника равна 14 м². Стулья для участников совещаний расположены вдоль сторон прямоугольников, выделенных на рисунке

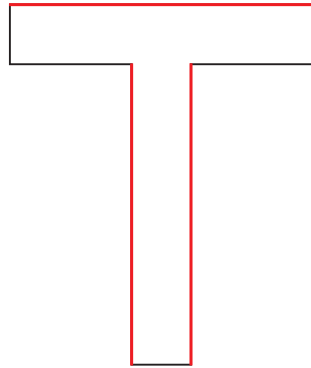


Рис. 42