КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 13. Квадратичная функция и ее свойства

3.1. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $5(x-1)(x-4)$;

б) $-2(x-4)(x+2)$;

в) $(x-1{,}5)^2-2{,}5$;

г) $2(x-1)^2+3$.

3.2. Найдите координаты точек пересечения графика функции с осью абсцисс и осью ординат:

а) $y=4x-5$;

б) $y=-x+5$.

3.3. Найдите:

а) наибольшее значение выражения $-2(x-1)^2+3$;

б) наименьшее значение выражения $(x-1{,}5)^2-2{,}5$.

Функции позволяют описывать процессы из различных областей науки и жизни. Например, траектория тела, брошенного под углом к горизонту, описывается функцией, график которой (рис. 44) называется **параболой** (от греч. παραβολή — *пара* — рядом и *балло* — бросаю).

Траекторией мяча, брошенного баскетболистом (рис. 45), или копья, которое метнул легкоатлет, если не учитывать сопротивление воздуха, является парабола.

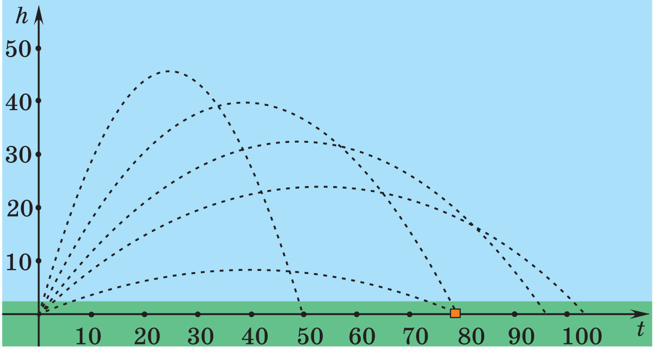


Рис. 44

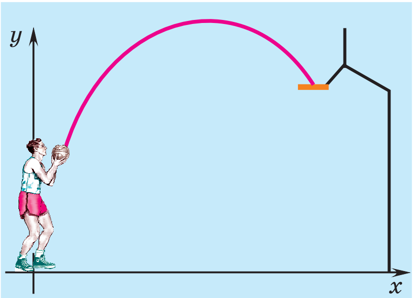


Рис. 45

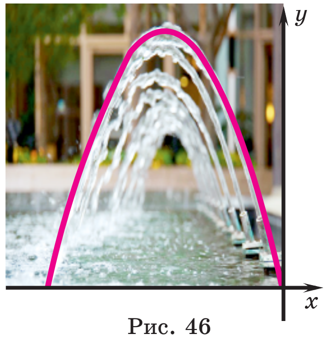


Рис. 46

По параболе движутся капли воды в струе фонтана (рис. 46).

Все рассмотренные процессы описываются функциями вида $y = ax^2 + bx + c$, графиками которых являются параболы.

Определение Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется **квадратичной.**

Например, функции $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$, $f(x) = -x^2 + 6x$, $f(x) = x^2$ — квадратичные.

Рассмотрим свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и способ построения ее графика — параболы.

Как известно, квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, можно разложить на множители, т. е. представить в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — его корни.

Также квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно записать в виде $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Таким образом, квадратичную функцию можно записать:
1) в виде многочлена

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0;$$

2) в виде разложения на множители (если корни соответствующего квадратного трехчлена существуют)

$$y = a(x - x_1)(x - x_2);$$

3) в виде выделенного полного квадрата

$$y = a(x - m)^2 + n.$$

Например, квадратичную функцию $y = 4x^2 - 24x + 20$ можно записать в следующих формах:

Формы записи квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - m)^2 + n$$

- $y = 4x^2 - 24x + 20$ — в виде многочлена;
- $y = 4(x - 1)(x - 5)$ — в виде разложения на множители;
- $y = 4(x - 3)^2 - 16$ — в виде выделенного полного квадрата.

Для исследования свойств квадратичной функции и построения ее графика будем использовать различные формы ее записи.

Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Область определения функции. Так как $ax^2 + bx + c$ — многочлен, то областью определения квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, являются все действительные числа, т. е. $D = \boldsymbol{R}$. Графически это означает, что для любого значения абсциссы найдется соответствующая точка на параболе.

2. Множество значений функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Для нахождения множества значений квадратичной функции воспользуемся ее формой записи в виде выделенного полного квадрата: $y = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Если $a > 0$, то при $x = m$ выражение $a(x - m)^2 + n$ принимает **наименьшее значение**, равное n. Значит, на изображении параболы существует точка, в которой функция принимает наименьшее значение. Эта точка называется **вершиной параболы**, ее координаты $x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рис. 47).

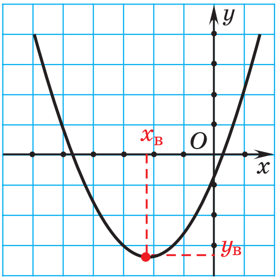


Рис. 47

Следовательно, если $a > 0$, то $E = [y_в; +\infty)$.

Если $a < 0$, то при $x = m$ выражение $a(x - m)^2 + n$ принимает **наиболь-**

шее значение, равное n. В этом случае на изображении параболы существует точка, в которой функция принимает наибольшее значение, она называется вершиной параболы, ее координаты

$x_{в} = -\frac{b}{2a}$; $y_{в} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рис. 48).

Следовательно, если $a < 0$, то $E = (-\infty; y_{в}]$.

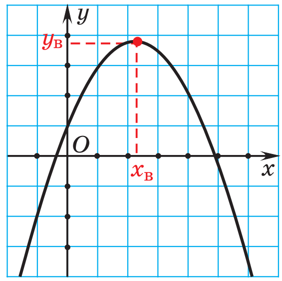


Рис. 48

3. Нули функции. Значения аргумента, при которых значения функции $y = ax^2 + bx + c$ равны нулю, являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках с координатами $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ (рис. 49).

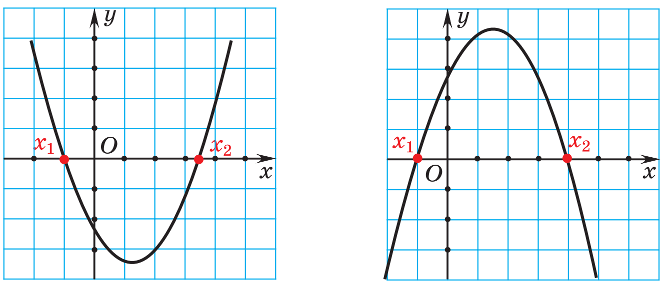


Рис. 49

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень x_1, то парабола имеет с осью абсцисс единственную общую точку с координатами $(x_1; 0)$ (рис. 50).

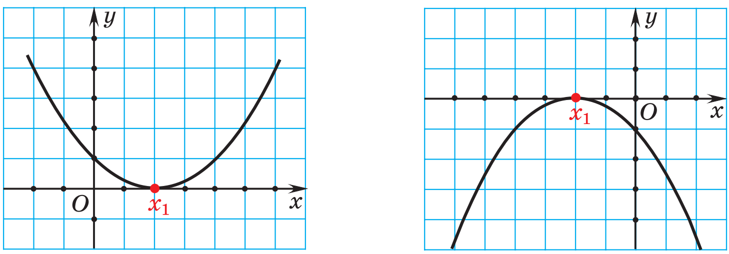


Рис. 50

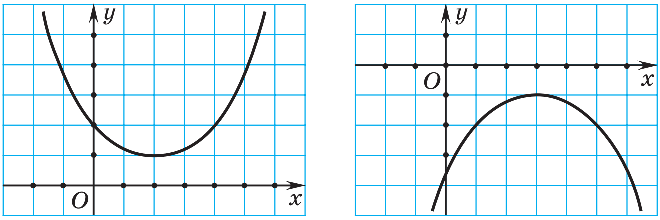


Рис. 51

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то парабола не имеет с осью абсцисс общих точек (рис. 51).

4. Ось симметрии параболы. Осью симметрии параболы является прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси ординат. Уравнение оси симметрии $x = -\frac{b}{2a}$.

Симметричные части графика называются **ветвями параболы.** Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 52).

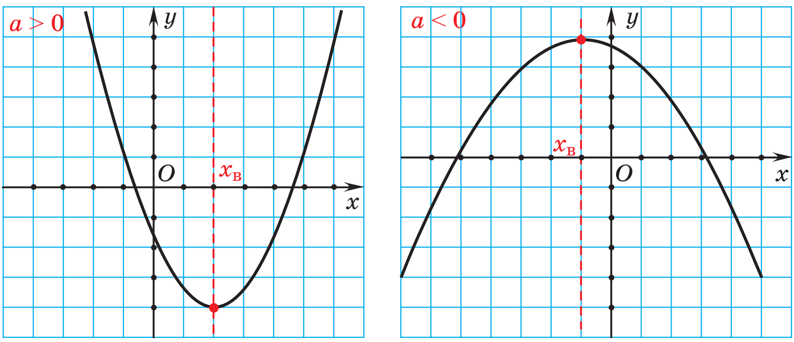


Рис. 52

Чтобы построить график квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, нужно:

① Определить направление ветвей параболы. (Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.)	Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ① $a = 1 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх.

② Определить координаты вершины параболы:

$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a},\ y_{\text{в}} = f(x_{\text{в}}).$$

Построить вершину параболы и ось симметрии параболы $x = -\frac{b}{2a}$.

③ Найти нули функции, если они есть, и отметить их на оси абсцисс.

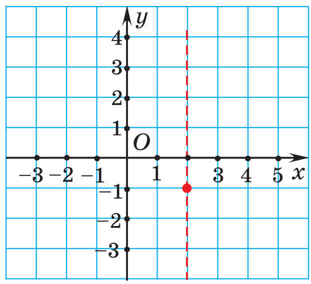
④ Определить точку пересечения параболы с осью ординат.
(Если $x = 0$, то значение функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ равно c.)
Построить точку с координатами $(0;\ c)$ и точку, ей симметричную относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$.

⑤ Соединив отмеченные точки плавной линией, построить график функции.

② $x_{\text{в}} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2;$

$y_{\text{в}} = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$

Вершиной параболы является точка с координатами $(2;\ -1)$. Осью симметрии параболы является прямая $x = 2$.
Построим их на координатной плоскости.

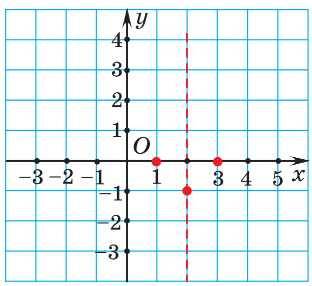


③ $x^2 - 4x + 3 = 0;$

$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4,$

$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3,\ \ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$

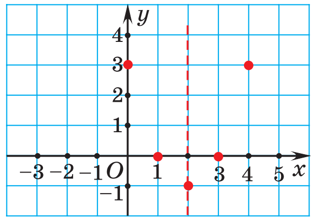
Отметим нули функции на оси абсцисс.



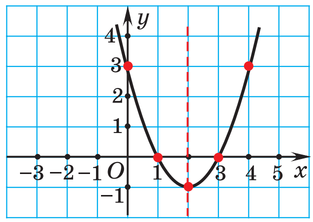
④ Если $x = 0$, то $y = 3$.
Парабола пересекает ось ординат в точке с координатами $(0;\ 3)$. Точка с

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

координатами (4; 3) симметрична ей относительно оси симметрии параболы.
Отметим эти точки.



⑤



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th colspan="2">Координаты вершины параболы</th>
</tr>
<tr>
<td>

1. Определите координаты вершины параболы:

а) $y = 3(x - 1{,}2)^2 - 5$;

б) $y = (2x - 3)(x - 1)$;

в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.

</td>
<td>

а) Если квадратичная функция записана в форме $y = a(x - m)^2 + n$, то $x_в = m$, $y_в = n$. Для функции $y = 3\left(x - 1{,}2\right)^2 - 5$ получим $x_в = 1{,}2$; $y_в = -5$.

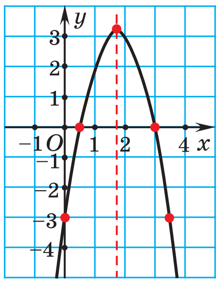
б) Запишем квадратичную функцию в виде многочлена $(2x - 3)(x - 1) = 2x^2 - 5x + 3$.

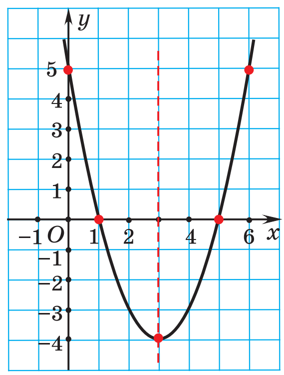
Найдем абсциссу вершины параболы: $x_в = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-5}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{4}$. Для нахождения ординаты вершины параболы можно воспользоваться формулой $y_в = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, тогда $y_в = -\dfrac{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 2} = -\dfrac{1}{8}$.

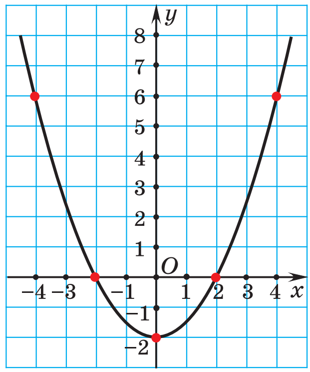
</td>
</tr>
</table>

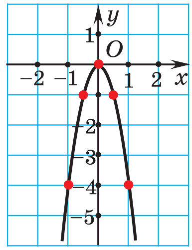
	Ординату вершины параболы можно также найти, подставив найденное значение абсциссы вершины в формулу функции: $y_в = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8}$. в) $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$; $y_в = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$.
Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции	
2. Найдите наибольшее (наименьшее) значение функции: а) $y = 3(x - 1{,}2)^2 - 5$; б) $y = (2x - 3)(x - 1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Так как $a = 3 > 0$, то функция принимает наименьшее значение, равное ординате вершины параболы, т. е. наименьшее значение данной функции равно $y_в = -5$. б) Так как $a = 2 > 0$, то функция принимает наименьшее значение, равное ординате вершины параболы. Поскольку вершина параболы имеет координаты $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, то наименьшее значение данной функции равно $y_в = -\frac{1}{8}$. в) Так как $a = -2 < 0$, то функция принимает наибольшее значение, равное ординате вершины параболы. Ордината вершины параболы равна нулю, значит, наибольшее значение данной функции равно $y_в = 0$.

Множество значений квадратичной функции	
3. Найдите множество значений квадратичной функции: а) $y = 3(x - 1{,}2)^2 - 5$; б) $y = (2x - 3)(x - 1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Так как $a = 3 > 0$, то $E = [y_в; +\infty)$. Поскольку $y_в = -5$, то $E = [-5; +\infty)$. б) Так как $a = 2 > 0$, то $E = [y_в; +\infty)$. Поскольку $y_в = -\frac{1}{8}$, то $E = \left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$. в) Так как $a = -2 < 0$, то $E = (-\infty; y_в]$. Поскольку $y_в = 0$, то $E = (-\infty; 0]$.
Точки пересечения графика функции с осями координат	
4. Найдите координаты точек пересечения графика квадратичной функции с осями координат: а) $f(x) = -(x - 1{,}2)^2 + 25$; б) $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$; в) $p(x) = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Для определения координат точек пересечения графика функции $f(x) = -(x - 1{,}2)^2 + 25$ с осью абсцисс найдем нули этой функции, т. е. решим уравнение $-(x - 1{,}2)^2 + 25 = 0$: $(x - 1{,}2 + 5)(x - 1{,}2 - 5) = 0$; $(x + 3{,}8)(x - 6{,}2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6{,}2, \\ x = -3{,}8. \end{array}\right.$ Для определения координат точки пересечения графика с осью ординат найдем значение функции при $x = 0$ и получим $f(0) = -(0 - 1{,}2)^2 + 25 = -1{,}44 + 25 = 23{,}56$. *Ответ*: (6,2; 0); (–3,8; 0); (0; 23,56). б) Найдем нули функции $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$. Используем свойство о равенстве произведения нулю и получим: $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ x + 4 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -4. \end{array}\right.$

	$h(0) = 2(0-1)(0+4) = -8$. *Ответ*: $(1; 0); (-4; 0); (0; -8)$. в) $-2x^2+4x-2=0$, $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$, $x = 1$. $p(0) = -2$. *Ответ*: $(1; 0)$; $(0; -2)$.
Построение графика квадратичной функции	
5. Постройте график функции $y = -2x^2 + 7x - 3$.	① $a = -2 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{7}{-4} = \frac{7}{4}$, $y_в = -2\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2 +$ $+ 7\cdot\frac{7}{4} - 3 = 3\frac{1}{8}$. Ось симметрии параболы — прямая $x = 1\frac{3}{4}$. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $D = 25$, $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $(3; 0)$; $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. ④ Точка пересечения графика с осью ординат: $x = 0$, $y = -3$. Точка $(3{,}5; -3)$ симметрична точке $(0; -3)$ относительно оси симметрии параболы. ⑤ Построим график функции $y = -2x^2 + 7x - 3$. 

6. Постройте график функции $y = (x-3)^2 - 4$.	① $a = 1 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх. ② Координаты вершины параболы: $x_в = 3$, $y_в = -4$. Ось симметрии параболы — прямая $x = 3$. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $(x-3)^2 - 4 = 0$; $(x-3+2)(x-3-2) = 0$; $(x-1)(x-5) = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; (1; 0); (5; 0). ④ При $x = 0$ $y = (0-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$. График функции пересекает ось ординат в точке (0; 5). Точка (6; 5) симметрична точке (0; 5) относительно оси симметрии параболы. ⑤ Построим график функции $y = (x-3)^2 - 4$. 
7. Постройте график функции $y = 0{,}5x^2 - 2$.	① $a = 0{,}5 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{0}{1} = 0$; $y_в = 0{,}5 \cdot 0^2 - 2 = -2$.

	Осью симметрии параболы является прямая $x = 0$, т. е. ось ординат. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $0{,}5x^2 - 2 = 0,\ \ x^2 - 4 = 0,$ $x_1 = 2;\ \ x_2 = -2;$ (2; 0); (–2; 0). ④ Точка пересечения графика с осью ординат (0; –2). ⑤ Найдем координаты нескольких дополнительных точек: (4; 6); (–4; 6). Построим график функции $y = 0{,}5x^2 - 2$. 
8. Постройте график функции $y = -4x^2$.	① $a = -4 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{0}{-8} = 0;$ $y_в = -4 \cdot (0)^2 = 0.$ Ось симметрии параболы $x = 0$ — ось ординат. ③ Нули функции: $-4x^2 = 0,\ \ x = 0.$ ④ Точка пересечения графика с осью ординат (0; 0).

	⑤ Найдем координаты нескольких дополнительных точек: $(1; -4)$; $(-1; -4)$; $(0{,}5; -1)$; $(-0{,}5; -1)$. Построим график функции $y = -4x^2$. 

1. Какая из следующих функций не является квадратичной:
а) $f(x) = (3x - 2) + (5x + 4)$; б) $g(x) = (3x + 1)(5x + 4)$;
в) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$?

2. Даны три функции: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$; $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ и $h(x) = 2(x - 1)(x + 3)$. Верно ли, что f, g, h — три формы записи одной и той же функции?

3.4. Пользуясь определением квадратичной функции, из данных функций выберите квадратичные:

а) $y = -x^2 + 7x - 2$; б) $y = 5x^2 + x$; в) $y = -2x^2 + 9$;
г) $y = -x + 7$; д) $y = 5x^2$; е) $y = x^3 + 3x^2$.

3.5. Для каждой из квадратичных функций определите, в какой форме она записана:

а) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$; б) $f(x) = (x + 1)(x - 5)$;
в) $f(x) = 7(x - 2)^2 + 8$; г) $f(x) = -2x^2 + 7x - 1$;
д) $f(x) = (9 - x)(3x + 4)$; е) $f(x) = -4(x + 1)^2 - 5$.

3.6. Выберите уравнения парабол, ветви которых направлены вниз:

а) $y = 3x^2 - x - 2$; б) $y = -2x^2 + 4x - 1$;
в) $y = -x^2 + 10x$; г) $y = 9 - x^2$;
д) $y = 0{,}1x^2$; е) $y = 4x^2 - 1$.

Приведите несколько примеров функций, графиками которых являются параболы, ветви которых направлены вверх.

3.7. Определите, каким параболам принадлежит точка с координатами (1; 4):

а) $y = x^2 - x - 4$; б) $y = -3(x + 1)^2 + 16$;
в) $y = (x - 2)(x - 5)$; г) $y = -x^2 + 3$.

3.8. Для квадратичной функции, заданной формулой $f(x) = x^2 - 5x + 1$, найдите:

а) $f(1)$; б) $f(-3)$; в) $f(0)$.

3.9. Для квадратичной функции $g(x) = -0{,}25x^2 + 3$ сравните:

а) $g(-2)$ и $g(4)$; б) $g(-0{,}5)$ и $g(0{,}5)$;
в) $g\left(-2\sqrt{3}\right)$ и $g\left(\sqrt{6}\right)$; г) $g\left(-2\sqrt{5}\right)$ и $g\left(2\sqrt{5}\right)$.

3.10. Для квадратичной функции $f(x) = x^2 - 4x + 9$ найдите значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 9$; б) $f(x) = 6$; в) $f(x) = 21$.

3.11. Определите, существуют ли значения аргумента, при которых квадратичная функция:

а) $y = x^2 - 4x + 7$ принимает значение, равное 4;
б) $y = -2x^2 + 6$ принимает значение, равное 9;
в) $y = 5x^2 - x + 1$ принимает значение, равное 1.

3.12. Для парабол, изображенных на рисунке 53, запишите:

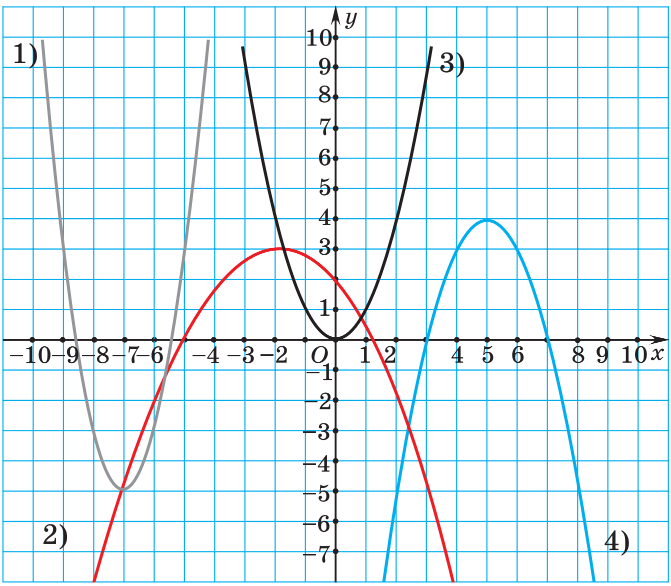


Рис. 53

а) направление ветвей; б) координаты вершины; в) уравнение оси симметрии; г) наибольшее (наименьшее) значение; д) множество значений.

3.13. Определите направление ветвей и координаты вершины параболы:

а) $y = (x-2)^2 + 3$; б) $y = 4(x+1)^2 - 6$;
в) $y = -(x-5)^2 - 8$; г) $y = -7(x+9)^2$;
д) $y = 2x^2 + 5$; е) $y = -8x^2$.

3.14. Приведите по два примера уравнений парабол, вершинами которых являются точки:

а) (3; 8); б) (–8; –6); в) (0; –3); г) (5; 0).

3.15. График функции $f(x) = a(x - m)^2 + n$ изображен на рисунке 54. Пользуясь графиком, найдите a, m и n. Запишите функцию $y = f(x)$ в виде многочлена.

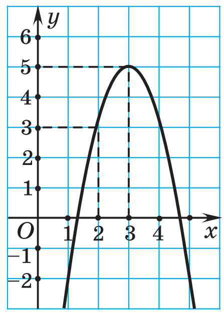


Рис. 54

3.16. Найдите координаты вершины параболы и запишите уравнение ее оси симметрии:

а) $y = 2x^2 - 4x + 1$; б) $y = 2x^2 + 4x$;
в) $y = -0{,}5x^2 - 4x + 1$; г) $y = -x^2 + 4x - 7$.

3.17. Определите, в какой координатной четверти находится вершина параболы:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 7$; б) $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$;
в) $f(x) = 4x^2 + 4x - 5$; г) $f(x) = -3x^2 - 12x$.

Запишите уравнение оси симметрии для каждой параболы.

3.18. Запишите квадратичную функцию $y = (x - 4)(x + 2)$ в виде многочлена и найдите ординату вершины параболы, являющейся графиком данной функции.

3.19. Найдите наименьшее (наибольшее) значение функции:

а) $y = (x-8)^2 + 9$; б) $y = -4(x+1)^2 + 5$;
в) $y = 2x^2 - 6x + 4$; г) $y = -x^2 + 4x - 3$;
д) $y = (x+8)(x-4)$; е) $y = -3(x-1)(x+5)$.

3.20. Приведите по два примера квадратичных функций:

а) наименьшим значением которых является число 7;
б) наибольшим значением которых является число 15.

3.21. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = 7(x + 6)^2 - 1$; б) $f(x) = -(x - 4)^2 + 2$;
в) $f(x) = x^2 + 4x - 1$; г) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$;
д) $f(x) = -(x - 6)(x + 2)$; е) $f(x) = 2(x + 4)(x + 8)$.

3.22. Определите координаты точек, в которых график функции пересекает оси координат:

а) $y = (x - 8)(x + 3)$; б) $y = -2x^2 + 5x - 2$;
в) $y = (x + 7)^2 - 4$; г) $y = x^2 - 9$.

3.23. Среди квадратичных функций выберите функции, не имеющие нулей:

а) $y = (x + 1)(x - 6)$; б) $y = x^2 + x + 3$;
в) $y = -(x - 5)^2 + 1$; г) $y = x^2 + 4$.

3.24. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 - 2x - 8$; б) $y = -x^2 + 5x - 6$;
в) $y = 2x^2 - 8x + 6$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5$.

3.25. Постройте график квадратичной функции и найдите множество ее значений:

а) $f(x) = x^2 - 6x$; б) $f(x) = -x^2 + 9$;
в) $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$; г) $f(x) = -3x^2$.

3.26. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x - 1)^2 - 4$; б) $y = -2(x + 3)^2 + 8$;
в) $y = (x - 5)(x + 1)$; г) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 7)$.

Можно ли определить ось симметрии параболы, не выполняя построение графика?

3.27. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = -x^2$. Проанализируйте полученные результаты и сделайте вывод.

3.28. На рисунке 55 изображен график одной из функций:

а) $y = -x^2 - 2x + 2$; б) $y = -x^2 + 2x + 3$;
в) $y = -x^2 + x + 2$; г) $y = -x^2 + 2x + 2$.

Определите, график какой функции изображен на рисунке. Объясните свой выбор.

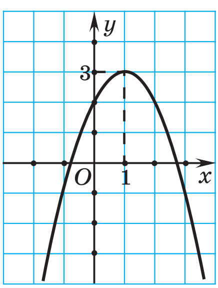


Рис. 55

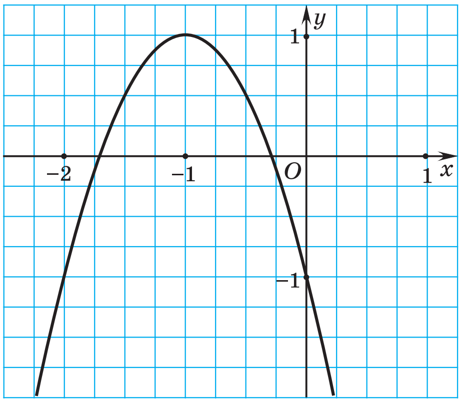


Рис. 56

3.29. Постройте график квадратичной функции и выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = 2$:

а) $f(x) = x^2 - 8x + 7$; б) $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$;
в) $f(x) = x^2 + 4x + 6$; г) $f(x) = -x^2 + 4x$;
д) $f(x) = (x - 3)^2$; е) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

3.30. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ изображен на рисунке 56. Пользуясь графиком:

а) определите $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$; б) найдите a; b и c.

3.31. Для того чтобы обнести изгородью прямоугольный участок для посадки овощей, было куплено 24 м сетки. Площадь участка S является функцией от длины одной из его сторон x. Задайте эту функцию формулой. Найдите, при каком значении аргумента функция принимает наибольшее значение.

3.32. На рисунке 57 изображен график квадратичной функции $y = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$. Определите координаты точек A; B; C; D; E.

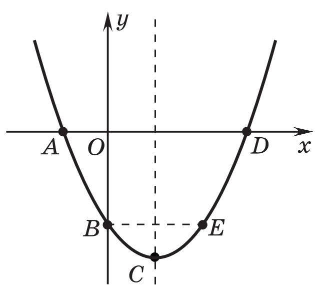


Рис. 57

3.33. Постройте графики функций и найдите координаты точек пересечения этих графиков:

а) $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = -x + 1$;

б) $y = x^2 - 4$ и $y = -x + 2$;

в) $y = -x^2 + 4x - 5$ и $y = -2$.

Проверьте полученные результаты.

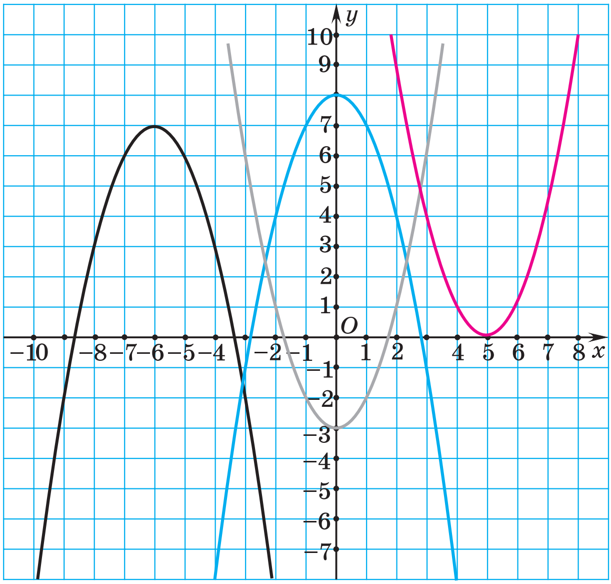


Рис. 58

3.34. Определите, графика какой из данных функций нет на рисунке 58:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = -(x + 6)^2 + 7$; в) $y = (x - 5)^2$;
г) $y = -(x - 6)^2 + 7$; д) $y = -x^2 + 8$.

3.35. Постройте графики квадратичных функций $f(x) = -2(x-1)^2 + 2$ и $g(x) = (x+3)^2 - 4$. Определите, имеют ли параболы общие точки. Можно ли это определить, не выполняя построения графиков?

3.36. На рисунке 59 изображены графики функций $f(x) = 3x^2 + 24x + c$ и $g(x) = -x^2 + bx - 18$. Пользуясь данными рисунка: а) найдите числа b и c; б) определите общее свойство для двух парабол; в) решите графически уравнение $f(x) = g(x)$.

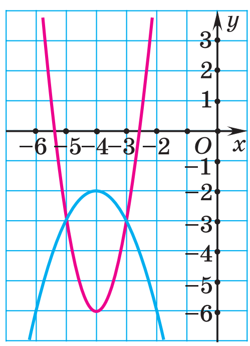


Рис. 59

3.37. Найдите значение числа b, при котором графики функций $y = -3x + b$ и $y = (x-3)(x-7)$ пересекаются в точке, принадлежащей оси ординат.

3.38. Определите, при каких значениях m и n вершина параболы $y = a(x - m)^2 + n$:

а) принадлежит оси ординат;

б) принадлежит оси абсцисс;

в) находится в начале координат.

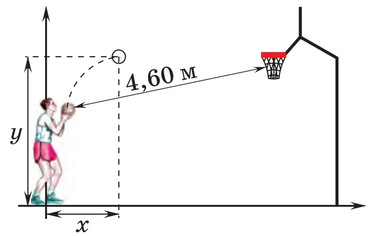


Рис. 60

3.39. Во время штрафного броска в баскетболе мяч находился примерно в 4,60 м от центра корзины, расположенной на высоте 3,05 м от пола. Игрок бросил мяч от уровня плеч, а это приблизительно 1,65 м от пола (рис. 60). Предполагается, что кривой, описанной в пространстве мячом, является парабола $y = -0{,}5x^2 + 1{,}95x + 1{,}65$, где x — расстояние по горизонтали от игрока до мяча, y — высота, на которой находится мяч. Можно ли утверждать, что игрок сумел забросить мяч в корзину? Какая максимальная высота достигнута мячом?

Знаете ли вы, что среди воспитанников белорусской школы баскетбола есть игроки мирового уровня? Например, Татьяна Ивинская в составе женской баскетбольной сборной на XXII Летних Олимпийский играх 1980 года в Москве стала олимпийской чемпионкой. Каких еще известных белорусских баскетболистов вы знаете?

3.40. На рисунке 61 изображены графики парабол $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c, знак дискриминанта соответствующего квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ для каждой из парабол.

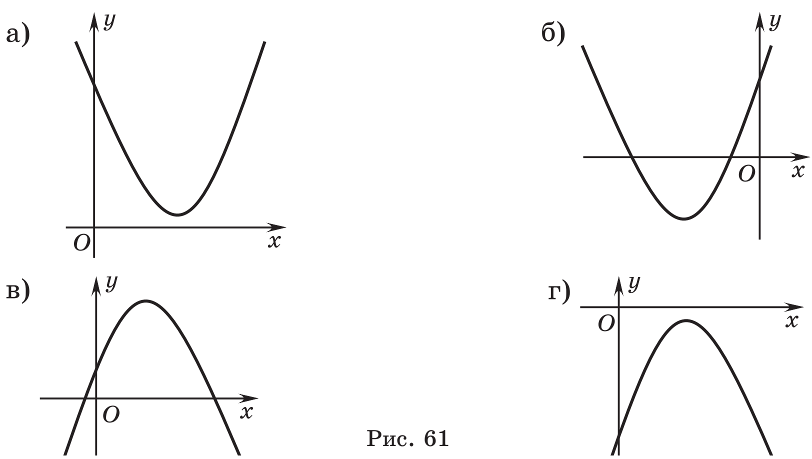


Рис. 61

3.41. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

а) $a > 0,\ c > 0,\ D > 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$; б) $a < 0,\ D = 0, -\frac{b}{2a} > 0$;

в) $a > 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$; г) $a < 0,\ D > 0, -\frac{b}{2a} > 0$,

где D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

3.42. Найдите абсциссу вершины параболы, если известно, что нулями функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, являются числа:

а) –11 и 13; б) $-3 + 2\sqrt{5}$ и $25 - 2\sqrt{5}$.

3.43. График квадратичной функции $y = -x^2 + 8x + c$ проходит через точку $A(9;\ 0)$. Найдите:

а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) наибольшее значение функции;
г) нули функции.

3.44. Найдите значения c, при которых график квадратичной функции $y = x^2 + 10x + c$:

а) имеет с осью абсцисс только одну общую точку;
б) пересекает ось ординат в точке $A(0;\ -7)$;
в) проходит через начало координат;
г) не имеет с осью абсцисс общих точек.

3.45. График квадратичной функции $f(x) = 2x^2 + bx + 4$ проходит через точку $B(-1;\ -12)$. Найдите:

а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) множество значений функции;
г) нули функции.

3.46. Найдите значения b, при которых график квадратичной функции $y = -x^2 + bx - 9$: а) имеет с осью абсцисс только одну общую точку; б) симметричен относительно оси ординат; в) пересекает ось абсцисс в точках, симметричных относительно прямой $x = 5$.

3.47. На рисунке 62 изображен график функции $y = 3x^2 + bx + c$. Пользуясь данными рисунка, найдите b и c.

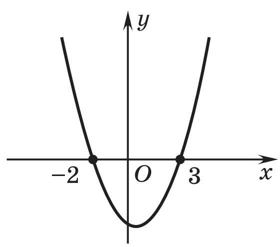


Рис. 62

3.48. Нулями квадратичной функции $y = -4x^2 + bx + c$ являются числа -1 и 3. Найдите:
а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) множество значений функции.

3.49. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы $f(x) = -x^2 + (a^2 + 4)x + 2$. Найдите координаты вершины параболы.

3.50. Выберите функции, графиками которых являются параболы, ветви которых направлены вверх:
а) $y = 5x^2 - x + 2$; б) $y = 5x - 1$;
в) $y = -x^2 + 12$; г) $y = 9x^2 + x$.

3.51. Выберите точку, принадлежащую графику квадратичной функции $y = 4x^2 - 3x + 1$:
а) $(1; -1)$; б) $(4; -3)$; в) $(0; -3)$; г) $(-2; 23)$.

3.52. Квадратичная функция задана формулой $f(x) = x^2 + 6x + 3$. Найдите: а) $f(2)$; б) $f(-1)$; в) значения аргумента, при которых $f(x) = -5$.

3.53. Найдите координаты вершины параболы:
а) $y = (x + 5)^2 - 4$; б) $y = -2(x - 8)^2 + 1$;
в) $y = -x^2 + 6$; г) $y = 7(x - 1)^2$.
Запишите ось симметрии для каждой параболы.

3.54. Выберите параболу, вершиной которой является точка с координатами $(-3; 5)$:
а) $f(x) = x^2 - 6x + 14$; б) $f(x) = 2x^2 + 12x + 28$;
в) $f(x) = -2x^2 - 12x - 13$; г) $f(x) = -3x^2 + 5$.

3.55. Найдите наименьшее (наибольшее) значение квадратичной функции:
а) $y = 3(x + 1)^2 - 7$; б) $y = -x^2 - 6x - 2$;
в) $y = (x - 1)(x + 3)$; г) $y = -2x^2 + 10$.

3.56. Найдите область определения и множество значений квадратичной функции:
а) $f(x) = -(x - 5)^2 + 8$; б) $f(x) = x^2 - 8x + 3$;
в) $f(x) = 4(x + 5)(x - 7)$; г) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

3.57. Определите координаты точек, в которых график квадратичной функции пересекает оси координат:

а) $y = (x + 2)(x - 8)$; б) $y = -x^2 + 8x - 7$;
в) $y = -(x - 6)^2 + 9$; г) $y = x^2 + 1$.

3.58. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 + 4x + 3$; б) $y = -x^2 + 6x - 5$.

3.59. Постройте график квадратичной функции и найдите множество ее значений:

а) $f(x) = -x^2 + 4x$; б) $f(x) = x^2 - 1$;
в) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$; г) $f(x) = 2x^2$.

3.60. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x + 5)^2 - 9$; б) $y = -(x - 2)(x + 4)$.

Запишите уравнение оси симметрии каждой из полученных парабол.

3.61. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x - 4)(x + 2)$; б) $y = 4x - x^2$;
в) $y = 3x^2 + 6x + 4$; г) $y = -(x - 2)^2$.

Для каждой параболы определите, пересекает ли парабола график функции $y = -9$, и если да, то в скольких точках.

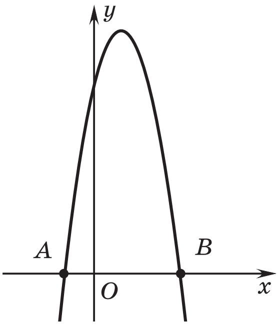


Рис. 63

3.62. На рисунке 63 изображен график функции $y = -2x^2 + 7x + 9$. Определите координаты точек A и B.

3.63. Постройте графики функций и найдите координаты точек пересечения этих графиков:

а) $y = x^2 - 2x - 8$ и $y = 2x - 3$;

б) $y = -x^2 + 6x$ и $y = 9$.

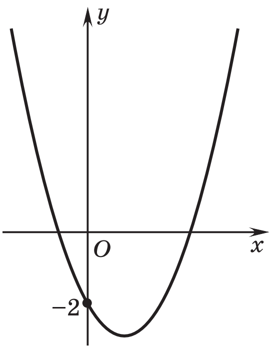


Рис. 64

3.64. На рисунке 64 изображен график одной из функций:

а) $y = x^2 - 3x$; б) $y = x^2 - 2x - 2$;
в) $y = x^2 - 2$; г) $y = x^2 + 2x - 2$.

Определите, график какой функции дан на рисунке. Объясните свой выбор.

3.65. Постройте графики функций $f(x) = -(x + 4)^2 + 9$ и $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, определите, имеют ли параболы общие точки.

3.66. Предприниматель шьет от 0 до 50 изделий в день и считает, что уровень затрат (в рублях) на производство x изделий задается с помощью функции $C(x) = x^2 - 10x + 500$. Пусть $R(x)$ — выручка от продажи x изделий, каждое из которых стоит 50 р.

а) Выразите зависимость $R(x)$.

б) Рассчитайте затраты, выручку и прибыль при продаже 20 швейных изделий.

в) Докажите, что величина прибыли задается с помощью функции $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

г) Найдите максимально выгодное для продажи число изготовленных изделий.

3.67. Точка $M(2; 47)$ принадлежит графику квадратичной функции $y = -x^2 + bx + 7$. Найдите наибольшее значение функции.

3.68. На рисунке 65 изображен график квадратичной функции $y = x^2 + bx + c$. Пользуясь данными рисунка, найдите b и c.

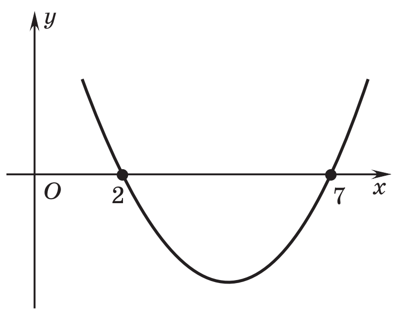


Рис. 65

3.69. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

а) $a > 0,\ c < 0,\ D > 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

б) $a > 0,\ D = 0, -\frac{b}{2a} < 0$;

в) $a < 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$,

где D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

3.70. Нулями квадратичной функции $y = 3x^2 + bx + c$ являются числа –4 и 5. Найдите:

а) координаты вершины параболы;

б) ось симметрии параболы;

в) наименьшее значение функции.

3.71. Прямая $x = 1$ является осью симметрии параболы $f(x) = 4x^2 + (a^2 - 8)x + 2$. Найдите координаты вершины параболы.

3.72. Примените формулы сокращенного умножения и вычислите: $\dfrac{48^2 - 12^2}{89^2 + 31^2 + 89 \cdot 62}$.

3.73. Найдите значение выражения $b^3 - 4b^{-2}$, если $b = -2$.

3.74. Найдите значение выражения:

а) $5a + 5b - 8$, если $-a - b = 3$;

б) $x + 1 - 6y$, если $-x + 6y = 8$.

3.75. Упростите выражение $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - 2$ при $x < 1$.

3.76. Длина экватора составляет около 40 076 км. Переведите длину экватора в метры, запишите полученное число в стандартном виде и определите порядок числа.

3.77. Представьте в виде произведения:

а) $m^3 + mn^2 + 13m^2n + 13n^3$;

б) $a^2b^2 + 5a^2b - 5ab - ab^2$.

3.78. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3x - 13}{4} \leqslant \dfrac{x - 1}{4} - \dfrac{7}{8}, \\ 2 \geqslant \dfrac{x}{4} + \dfrac{3 - 2x}{3}. \end{cases}$

3.79. Клиент оператора мобильной связи делает выбор между двумя тарифами. Оба тарифа предполагают ежемесячную абонентскую плату и оплату каждой минуты разговора. По тарифу A нужно платить 15 р. в месяц и 10 к. за минуту. По тарифу B — 10 р. в месяц и 15 к. за минуту. Какой тариф выгоднее, если клиент планирует разговаривать по телефону:

а) 80 минут в месяц; б) 150 минут в месяц?

Сколько минут в месяц нужно разговаривать, чтобы итоговая сумма была одинаковой для обоих тарифов?

3.80. Упростите выражение

$$\left(\sqrt{21} + \sqrt{14} - 2\sqrt{35}\right) \cdot \frac{1}{7}\sqrt{7} + \sqrt{20}.$$

3.81. (*Задача Л. Эйлера.*) Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он заплатил по 31 талеру, за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и сколько быков купил чиновник?