3.133. Магазин закупил на оптовой базе 100 кг слив по цене 3 р. за килограмм. Во время сортировки выяснилось, что 10 % ягод потеряли товарный вид. Какую минимальную розничную цену должен установить магазин на сливы, чтобы получить не менее 20 % прибыли?

§ 15. Квадратные неравенства

3.134. Решите неравенство:

а) $2x - 6 \leqslant 0$; б) $-7x - 4 > 2$; в) $8 + 2{,}5x > 0$.

3.135. При каком значении аргумента значения функции $y = 2x - 6$:

а) положительны; б) отрицательны; в) неположительны?

3.136. Если для значений аргумента из некоторого интервала функция принимает только положительные значения, то:
а) график функции на этом интервале расположен выше оси абсцисс;
б) график функции на этом интервале расположен правее оси ординат;
в) положение графика нельзя определить.
Выберите правильный ответ.

Рассмотрим задачу. Государственное предприятие «Бобруйский завод биотехнологий» производит гель для рук «Чистые ручки», максимальное суточное производство 3500 л. Когда производится x сотен литров геля в день, себестоимость продукции рассчитывается по формуле $C(x) = 0{,}3x^2 - 12x + 640$. Определите объем производства геля, при котором его себестоимость не превышала бы 550 р. за 100 литров.

Так как каждому значению аргумента x, не превышающему 3500 л, соответствует значение $C(x)$, а по условию требуется найти такие значения x, при которых себестоимость не превышает 550 р. за 100 литров, то нужно решить неравенство $C(x) \leqslant 550$, или $0{,}3x^2 - 12x + 640 \leqslant 550$, или $0{,}3x^2 - 12x + 90 \leqslant 0$. Полученное неравенство — **квадратное**.

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где $a \neq 0$, называются **квадратными.**

Для того чтобы найти значения переменной, при которых трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает положительные, отрицательные, неположительные или неотрицательные значения, т. е. решить квадратное неравенство, можно использовать свойства функции $y = ax^2 + bx + c$.

Квадратные неравенства

$$3x^2 - 10x + 3 > 0$$
$$x^2 - 5 < 0$$
$$x^2 + 6x \geqslant 0$$
$$4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$$

Для решения квадратного неравенства достаточно построить схему графика функции $y = ax^2 + bx + c$, определив ее нули.

Рассмотрим примеры решения квадратных неравенств.

Решим неравенство $2x^2 - 5x + 3 > 0$. Для решения неравенства достаточно знать расположение точек графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс. Поэтому найдем нули функции: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$. Отметим их на оси абсцисс.

Определим направление ветвей параболы: $a = 2 > 0$ — ветви направлены вверх.

Построим схему графика функции и определим, при каких значениях аргумента парабола лежит выше оси абсцисс, т. е. $2x^2 - 5x + 3 > 0$ (рис. 78). Получим решение неравенства:

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; +\infty).$$

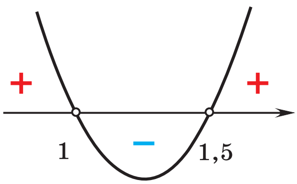


Рис. 78

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; +\infty)$.

Решим неравенство $-2x^2 + 5x - 3 > 0$. Умножим обе части неравенства на -1 и получим равносильное неравенство $2x^2 - 5x + 3 < 0$.

Используем схему графика функции $y = 2x^2 - 5x + 3$ и определим, при каких значениях аргумента парабола лежит ниже оси абсцисс (см. рис. 78). Решением неравенства $2x^2 - 5x + 3 < 0$ является интервал $(1; 1{,}5)$.

Ответ: $x \in (1; 1{,}5)$.

Для решения неравенства $-x^2 + 3x - 4 > 0$ умножим обе его части на -1, получим равносильное неравенство $x^2 - 3x + 4 < 0$. Построим схему графика функции $y = x^2 - 3x + 4$ и определим, при каких значениях аргумента значения функции $y = x^2 - 3x + 4$ отрицательны, т. е. при каких значениях аргумента парабола лежит ниже оси абсцисс. Ветви параболы направлены вверх. Дискриминант уравнения $x^2 - 3x + 4 = 0$

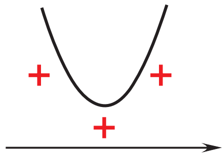


Рис. 79

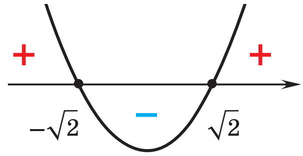


Рис. 80

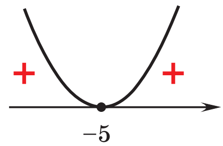


Рис. 81

отрицательный, значит, график функции не пересекает ось абсцисс (рис. 79), парабола лежит выше нее и при всех значениях аргумента значения функции положительны. Таким образом, неравенство $x^2 - 3x + 4 < 0$ не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Решим неравенство $3x^2 - 6 \geqslant 0$. Построим схему графика функции $y = 3x^2 - 6$. Нули функции: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, ветви параболы направлены вверх. Парабола (рис. 80) лежит не ниже оси абсцисс при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$. Значит, объединение этих числовых лучей является решением неравенства.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Решим неравенство $(x+5)^2 \leqslant 0$. Построим схему графика функции $y = (x+5)^2$.

Нуль функции $x = -5$, ветви параболы направлены вверх (рис. 81). Неравенству $(x+5)^2 \leqslant 0$ удовлетворяет только одно значение переменной $x = -5$.

Ответ: $x \in \{-5\}$.

Таким образом, для того чтобы решить квадратное неравенство, достаточно построить схему графика функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ (рис. 82) и в соответствии со знаком неравенства проанализировать расположение графика этой функции относительно оси абсцисс.

Если в квадратном неравенстве первый коэффициент отрицательный, то, умножив обе части неравенства на –1, можно перейти к равносильному неравенству.

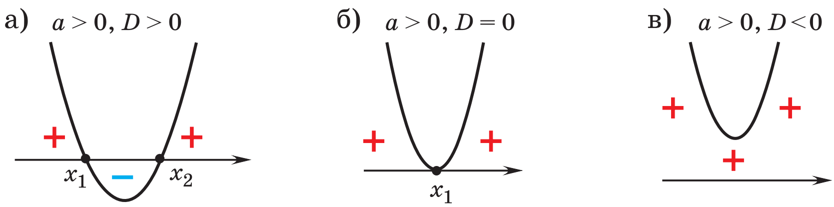
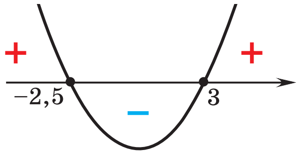
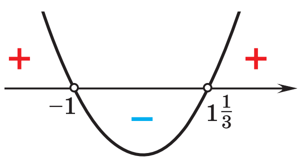
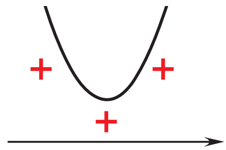
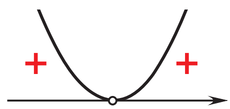


Рис. 82

Чтобы решить квадратное неравенство, можно:

① Построить схему графика функции $$y = ax^2 + bx + c.$$ ② В соответствии со знаком неравенства определить значения переменной x, удовлетворяющие неравенству. ③ Записать ответ.	Решите неравенство $$2x^2 - x - 15 \leqslant 0.$$ ① Нули функции $$y = 2x^2 - x - 15:$$ $$x_1 = 3,\ x_2 = -2{,}5.$$ Ветви параболы направлены вверх ($a = 2 > 0$).  ② Отрицательные значения функция $y = 2x^2 - x - 15$ принимает между нулями. Так как данное неравенство нестрогое, решением неравенства является отрезок [−2,5; 3]. ③ *Ответ*: $x \in [-2{,}5; 3]$.

Решение квадратных неравенств	
1. Используя алгоритм, решите неравенство $-3x^2 + x + 4 < 0.$	Умножим обе части неравенства на −1, получим равносильное неравенство $3x^2 - x - 4 > 0.$ ① Найдем нули функции $y = 3x^2 - x - 4:$ $x_1 = -1,\ x_2 = 1\frac{1}{3}.$ Ветви параболы направлены вверх ($a = 3 > 0$). 

	② Положительные значения функция $y = 3x^2 - x - 4$ принимает левее меньшего корня или правее большего. ③ *Ответ*: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
2. Решите неравенство: а) $x^2 + 3 > 0$; б) $4x^2 - 12x + 9 > 0$.	а) ① Уравнение $x^2 + 3 = 0$ не имеет корней, т. е. функция $y = x^2 + 3$ не имеет нулей. Ветви параболы направлены вверх.  ② Положительные значения функция $y = x^2 + 3$ принимает при всех значениях аргумента. ③ *Ответ*: $x \in \boldsymbol{R}$. б) ① Найдем нули функции $y = 4x^2 - 12x + 9$. $4x^2 - 12x + 9 = 0$; $(2x - 3)^2 = 0$; $x = 1{,}5$. Ветви параболы направлены вверх.  ② Положительные значения функция принимает при всех значениях x, кроме $x = 1{,}5$. ③ *Ответ*: $x \in (-\infty; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$.

1. Если парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше оси абсцисс, то неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$:
а) имеет одно решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений.
Выберите правильный ответ.

2. Если ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ может:
а) иметь одно решение;
б) не иметь решений;
в) иметь бесконечно много решений.
Выберите правильный ответ.

3.137. Пользуясь определением квадратного неравенства, из данных неравенств выберите квадратные:

а) $8x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$; б) $-3x^2 + 9x - 1 > 0$;
в) $x^2 + 7 \geqslant 0$; г) $6x + 25 \leqslant 0$;
д) $-10x^2 + 7x < 0$; е) $18 - x > 0$.

Приведите по два примера строгих и нестрогих квадратных неравенств.

3.138. На рисунке 83 изображен график функции $y = x^2 - x - 12$. Решите неравенство:

а) $x^2 - x - 12 > 0$;
б) $x^2 - x - 12 \geqslant 0$;
в) $x^2 - x - 12 < 0$;
г) $x^2 - x - 12 \leqslant 0$.

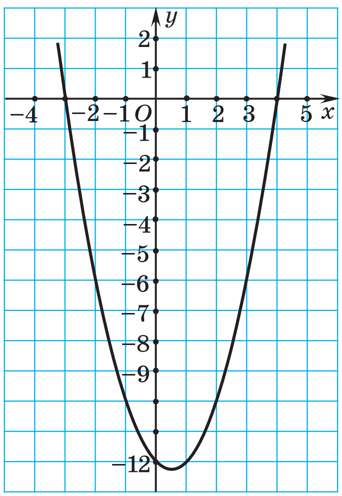


Рис. 83

3.139. Используя схему графика функции $y = x^2 + 6x$, изображенную на рисунке 84, решите неравенство:

а) $x^2 + 6x > 0$; б) $x^2 + 6x \geqslant 0$;
в) $x^2 + 6x < 0$; г) $x^2 + 6x \leqslant 0$.

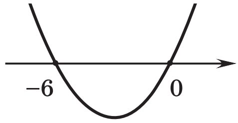


Рис. 84

3.140. Решите квадратное неравенство, используя алгоритм:

а) $x^2 + 5x - 6 > 0$;
б) $x^2 + 2x - 8 < 0$;

в) $6x^2 + x \geqslant 0$; г) $x^2 - 25 \leqslant 0$;
д) $x^2 - 14x + 49 > 0$; е) $9x^2 - 30x + 25 < 0$;
ж) $4x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$; з) $x^2 - x + \frac{1}{4} \leqslant 0$;
и) $2x^2 - 7x + 7 > 0$; к) $5x^2 - x + 7 < 0$;
л) $8x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$; м) $3x^2 - 2x + 9 \leqslant 0$.

3.141. Решите квадратное неравенство:

а) $-3x^2 + 5x + 8 \geqslant 0$; б) $-x^2 + 6x - 8 < 0$;
в) $-5x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$; г) $-x^2 - 6x - 9 < 0$.

3.142. Приведите пример квадратного неравенства, решением которого являются все числа.

3.143. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 9 > 0$; б) $4 - x^2 > 0$; в) $-x^2 + 15 \leqslant 0$;
г) $x^2 + 9 > 0$; д) $-2x^2 - 7 \geqslant 0$; е) $8x^2 - 2 > 0$;
ж) $5x^2 \leqslant 0$; з) $-7x^2 < 0$; и) $-3x^2 \leqslant 0$.

3.144. Найдите все значения переменной, при которых двучлен:

а) $-x^2 + 16$ принимает неположительные значения;
б) $-5x^2 - 8$ принимает отрицательные значения.

3.145. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 5x < 0$; б) $x^2 + x \geqslant 0$; в) $8x - x^2 > 0$;
г) $x - x^2 \leqslant 0$; д) $2x^2 - 18x \geqslant 0$; е) $0{,}3x + 9x^2 \leqslant 0$;
ж) $3x - 5x^2 < 0$; з) $x - 9x^2 \geqslant 0$; и) $2x - 0{,}1x^2 > 0$.

3.146. Найдите все целые решения неравенства:

а) $x^2 + 3x \leqslant 0$; б) $5x^2 + x - 4 \leqslant 0$;
в) $13 - x^2 > 0$; г) $3 + x - 0{,}25x^2 > 0$.

3.147. Найдите все значения аргумента, при которых функция:

а) $y = -3x^2 + 7x - 4$ принимает отрицательные значения;
б) $y = 5x - x^2 - 4$ принимает неотрицательные значения;
в) $y = 9x - 2x^2$ принимает положительные значения.

3.148. Приведите пример квадратного неравенства, решением которого является:

а) промежуток $[-3; 3]$; б) число 8.

3.149. Решите неравенство:

а) $-10x^2 \leqslant -9x - 1$; б) $x^2 > 4$; в) $x^2 \geqslant -6x$;
г) $4x^2 + 1 > 4x$; д) $3x + 2 \leqslant 2x^2$; е) $2x^2 \geqslant 14$;
ж) $3x + 6 < -4x^2$; з) $x \geqslant x^2$; и) $-x \leqslant 3x^2$.

3.150. Найдите значения переменной, при которых значения трехчлена:

а) $4x^2 + 3x + 5$ не превосходят 6;
б) $\frac{1}{3}x^2 - x + 8$ больше 8;
в) $-3x^2 + 8x + 6$ не меньше $-\frac{2}{3}$.

3.151. Решите неравенство:

а) $x^2 - 2x - 5 < 0$; б) $-6x^2 \leqslant x - 3$;
в) $2x^2 - 3 > 4x$; г) $8x + 3 \geqslant x^2$.

3.152. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2 + x - x^2}$; б) $\sqrt{8x^2 - x}$;
в) $\sqrt{45 - 9x^2}$; г) $\sqrt{5x - 2x^2 - 2}$.

3.153. Приведите два примера квадратных неравенств, не имеющих решений.

3.154. Решите неравенство:

а) $2x^2 + 6x - 1 > x^2 - 2x - 16$;
б) $5x^2 - 12x \leqslant x^2 + 8x - 25$;
в) $12x^2 + 15 \geqslant 11x^2 + 7x - 6$;
г) $2x^2 + 4x - 2 > 5x^2 - 9x + 8$.

3.155. Найдите значения переменной, при которых значения выражения:

а) $3x^2 + 30x + 10$ больше значений выражения $x - x^2 + 3$;
б) $13x^2 - x + 9$ не превосходят значений выражения $7x^2 + 18x - 6$.

3.156. Решите неравенство:

а) $(x + 3)^2 > 4$; б) $(2x - 1)^2 \leqslant 9$;
в) $36 < (x - 6)^2$; г) $(3x + 2)^2 \geqslant 25$.

3.157. На дачном участке планируется построить одноэтажный дом прямоугольной формы, длина которого на 6 м больше ширины. Найдите, какую ширину должен иметь дом, чтобы его площадь была не менее 72 м^2.

3.158. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите неравенство:

а) $2x(x-1) < 3(x+1)$; б) $x(x+1) \geqslant 2(1-2x-x^2)$;
в) $(x-8)(x+5) \geqslant -40$; г) $(x-1)(2x+3) < 3$;
д) $(x-8)(x+2) \leqslant -6x$; е) $(2-x)(3x+1) < 5x-1$.

3.159. Выясните, существуют ли такие значения аргумента, при которых функция $y = x^2 - 12x + 40$ принимает значения меньше 5.

3.160. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения неравенства:

а) $(3x+1)(5x-2) \leqslant 12x^2 + 7x + 1$;
б) $(4x-1)(x+7) < 2x^2 + 29x - 3$;
в) $(x+4)(2x-3) \geqslant (5x-6)(x-3) + 10$;
г) $(x-4)(3x+1) - (2x-6)(x-2) < 4$.

3.161. Траектория ядра, которое толкнул спортсмен под углом к горизонту при сдаче юниорского норматива, есть парабола (рис. 85), уравнение которой $y = -x^2 + 3x + 1{,}2$, где x — это время движения ядра (в секундах), а y — высота его подъема (в метрах) относительно земли. Определите:

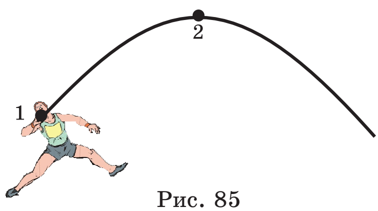


Рис. 85

а) сдал ли он норматив, который составляет 7 м;
б) сколько времени ядро находилось на высоте, меньшей, чем в положении *2*, но большей, чем в положении *1*.

Знаете ли вы, что победителем II Игр стран СНГ в толкании ядра стал Анатолий Хомич?

Используя различные источники информации, найдите сведения о белорусских олимпийских чемпионах.

3.162. Примените формулы сокращенного умножения и решите неравенство:

а) $5(x-1)^2 \leqslant 5 - 6x$; б) $(x+1)^2 - 14 > 5(1+x)$;
в) $(x-2)^2 \geqslant 1 - (x-1)^2$; г) $(x+2)^2 + 13x < (3x-1)^2$;
д) $2(2x+1) - (x-1)(x+1) \geqslant 2(x+1)^2$;
е) $(5x+1)^2 + (1-5x)(5x+1) > 2(x^2+1)$.

3.163. Найдите значения переменной, при которых:

а) значения квадрата двучлена $x + 1$ меньше значений квадрата двучлена $2x - 1$;
б) значения квадрата двучлена $3x - 5$ не превосходят значений квадрата двучлена $x + 7$.

3.164. Докажите, что при всех значениях переменной верно неравенство $-3x^2 + x \leqslant \frac{1}{3}$.

3.165. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2}{10} + 2 \leqslant \frac{9x}{10}$; б) $\frac{x^2}{3} \geqslant \frac{3x+3}{4}$;

в) $\frac{x^2+2}{14} > \frac{x^2-23}{4}$; г) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x-5}{4} < \frac{2x}{3}$;

д) $\frac{x^2+2}{6} - \frac{3x-1}{8} \leqslant 1$; е) $2x^2 - \frac{x+1}{2} < \frac{x-3}{3}$.

3.166. Найдите значения аргумента, при которых значения функции:

а) $y = x^2 - 0{,}25$ больше значений функции $y = \frac{5-2x}{4}$;
б) $y = \frac{x^2}{3}$ не меньше значений функции $y = 2x - 3$.

3.167. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-2)^2}{2} < \frac{2x-4}{3}$; б) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{4} \leqslant 1 - x$;

в) $\frac{(2x-1)^2}{10} > \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{1-x}{2}$; г) $\frac{(x-1)^2}{2} + 7\frac{2}{3} \geqslant \frac{(x-7)^2}{4} + \frac{x^2-5x}{3}$.

3.168. Найдите значения k, при которых уравнение $x^2 + kx + 9 = 0$ имеет два корня.

3.169. Найдите значения a, при которых уравнение $x^2 + ax + 16 = 0$ не имеет корней.

3.170. Используя схему графика функции $y = x^2 - 25$, изображенную на рисунке 86, решите неравенство:

а) $x^2 - 25 > 0$; б) $x^2 - 25 \geqslant 0$;
в) $x^2 - 25 < 0$; г) $x^2 - 25 \leqslant 0$.

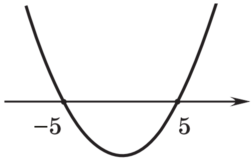


Рис. 86

3.171. Решите квадратное неравенство, используя алгоритм:

а) $x^2 + 6x - 7 \geqslant 0$; б) $x^2 - 3x + 2 < 0$;
в) $x^2 - 7x > 0$; г) $x^2 - 4 \leqslant 0$;
д) $x^2 - 8x + 16 > 0$; е) $9x^2 + 6x + 1 \leqslant 0$;
ж) $8x^2 + 3 \geqslant 0$; з) $3x^2 - x + 9 < 0$.

3.172. Решите квадратное неравенство:

а) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; б) $-x^2 + 4x + 5 < 0$;
в) $x^2 - 1 \geqslant 0$; г) $16 - x^2 > 0$;
д) $3x - 9x^2 > 0$; е) $-2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$;
ж) $7x^2 - x + 1 > 0$; з) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$.

3.173. Найдите все целые решения неравенства:

а) $x^2 - 4x < 0$; б) $x^2 - 5x - 6 \leqslant 0$;
в) $x^2 - 6 < 0$; г) $-4x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$.

3.174. Найдите все значения аргумента, при которых функция:

а) $y = 4 + x^2 - 5x$ принимает положительные значения;
б) $y = 36 - 4x^2$ принимает неотрицательные значения.

3.175. Решите неравенство:

а) $-9x^2 \geqslant -8x - 1$; б) $x^2 < 36$;
в) $x^2 \leqslant 3x$; г) $x^2 + 9 > 6x$;
д) $3x + 7 < -2x^2$; е) $3x^2 \leqslant 15$;
ж) $5x^2 + 1 \geqslant 2x$; з) $7x \leqslant x^2$.

3.176. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 7 < 0$; б) $7x - 1 \leqslant 5x^2$.

3.177. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{10x - 3 - 3x^2}$; б) $\sqrt{5x - 3x^2}$.

3.178. Решите неравенство:

а) $4x^2 - 7x + 7 > 3x^2 - 11x + 52$;
б) $10x^2 + 8x - 2 \leqslant x^2 - 16x - 18$.

3.179. Найдите значения переменной, при которых значения двучлена $6x^2 - 4x$ меньше значений трехчлена $4x^2 + 3x + 9$.

3.180. Решите неравенство:

а) $(x-2)^2 < 1$; б) $(4x-1)^2 \geqslant 9$;
в) $4 > (x+3)^2$; г) $(3x-4)^2 \leqslant 16$.

3.181. Накануне проведения церемонии награждения победителей ежегодного республиканского фестиваля-ярмарки тружеников села «Дожинки» в зале для проведения торжеств расставляют стулья. Число стульев в каждом ряду должно быть на 15 больше, чем число рядов в зале. Найдите максимальное число рядов стульев, которые можно установить, если в зале одновременно можно разместить не более 250 человек.

3.182. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения неравенства:

а) $2(2x^2-7) < -8x-9$; б) $x(x-4) \leqslant 2x-8$;
в) $(x+5)(x-7) \leqslant -35$; г) $(x-8)(x+3) < 1-5x$.

3.183. Решите неравенство:

а) $(x+3)(x-2) \leqslant 6-x^2-x$;
б) $2x(3x+1) > (3x-1)(x+3)$.

3.184. Примените формулы сокращенного умножения и решите неравенство:

а) $(x+4)^2 \geqslant 6x+40$;
б) $(2x+1)^2+2 \leqslant 2(x-3x^2)$;
в) $(3x+1)^2+33 > (2x+5)^2$;
г) $(x-1)(x+1) > x^2+4-(x-5)^2$.

3.185. Найдите значения переменной, при которых значение квадрата двучлена $3x-2$ не превосходит значений выражения $3x^2-10x+8$.

3.186. Докажите, что не существует таких значений переменной, при которых выполняется неравенство $-5x^2+2x > \frac{1}{5}$.

3.187. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2}{2} \leqslant \frac{11x-4}{5}$; б) $\frac{x-1}{3}+\frac{x^2}{5} \geqslant \frac{7}{15}$;
в) $\frac{x^2-5}{2}-\frac{x-8}{5} < 3$; г) $\frac{x^2+6x}{12}-\frac{2x+3}{4} > 6$.

3.188. Найдите значения аргумента, при которых значения функции $y = x^2+2x$ не превосходят значений функции $y = \frac{7x+3}{4}$.

3.189. Решите неравенство:

а) $\frac{(x+2)(x+3)}{15} - \frac{x-1}{3} > \frac{x+3}{5}$; б) $\frac{(2x-5)^2}{8} \geqslant 5 - 3x$;

в) $\frac{3-x^2}{4} - \frac{x}{3} \geqslant \frac{(x-3)^2}{12}$; г) $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{3x+1}{6} > \frac{(x+1)^2}{3}$.

3.190. Найдите такие значения a, при которых уравнение $2x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два различных корня.

3.191. Найдите значение выражения $\frac{\text{НОК}(25, 40)}{\text{НОД}(25, 40)}$.

3.192. Вычислите:

а) $\frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}}$; б) $\frac{0{,}125^3 \cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

3.193. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x + \frac{1}{2}y = -3, \\ -4x - \frac{3}{4}y = 1. \end{cases}$

3.194. По кольцевому маршруту курсировали два автобуса с интервалом 50 мин. В связи с введением в эксплуатацию нового жилого района на маршрут планируется вывести еще три автобуса. Каким станет интервал движения после увеличения числа автобусов на маршруте? На сколько процентов сократится интервал движения?

3.195. Разложите на множители:

а) $y^3 - 49y$; б) $-3a^2 - 6ab - 3b^2$;

в) $(a-6)^2 - 9a^2$; г) $c^2 - b^2 - c + b$.

3.196. Выполните действия:

а) $\left(3\sqrt{2} - 2\right)\left(4\sqrt{2} + 7\right) - 13\sqrt{2}$; б) $\left(3\sqrt{2} + 2\right)^2 + \left(6 - \sqrt{2}\right)^2$.

3.197. По данным Белстата, численность населения Беларуси на 1 января 2024 г. составляла около 9 156 000 чел., а ее площадь приблизительно равна 207 600 км^2. Найдите плотность населения Беларуси (число жителей, приходящееся на 1 км^2 территории). С помощью справочной литературы найдите информацию о плотности населения в каждой области Беларуси. Представьте полученные результаты в виде столбчатой диаграммы.

§ 16. Системы и совокупности квадратных неравенств

3.198. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -2(x-2{,}5)>0, \\ 2x-(2-x)\leqslant 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x-2{,}6\leqslant 0, \\ x-2(1-3x)\leqslant 0. \end{cases}$

3.199. Найдите решение совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 3x-4\leqslant -15, \\ 2(x-3)>8; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 3x-4\geqslant -15, \\ 2(x-3)<8. \end{array}\right.$

Рассмотрим решение нескольких задач.

Задача 1. Площадь участка для планируемой детской площадки должна быть не меньше 39 м^2 и не больше 144 м^2. Каковы размеры участка, если его длина на 10 м больше ширины?

Решение. Обозначим ширину площадки через x м, тогда ее длина $(x + 10)$ м, а площадь $x(x + 10)$ м^2. По условию задачи одновременно должны выполняться два условия: $x(x+10)\geqslant 39$ и $x(x+10)\leqslant 144$. Объединим эти условия в систему $\begin{cases} x(x+10)\geqslant 39, \\ x(x+10)\leqslant 144. \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы:

1) $x(x+10)\geqslant 39$; $x^2+10x-39\geqslant 0$;

$x_1 = -13$, $x_2 = 3$; $x \in (-\infty; -13] \cup [3; +\infty)$;

2) $x(x+10)\leqslant 144$; $x^2+10x-144\leqslant 0$;

$x_1 = -18$, $x_2 = 8$; $x \in [-18; 8]$.

Найдем пересечения множеств решений первого и второго неравенств (рис. 87). Решением системы неравенств является объединение отрезков $[-18; -13] \cup [3; 8]$.

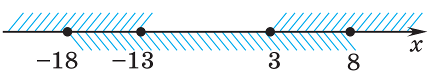


Рис. 87

Условию задачи удовлетворяют только положительные значения x, т. е. $x \in [3; 8]$.

Ответ: ширина площадки может изменяться от 3 до 8 м, а соответствующие значения длины — от 13 до 18 м.

Задача 2. При планировании зала для конференций, рассчитанного не более чем на 360 мест, проектной организации нужно было учесть следующие условия: количество рядов должно быть или на два меньше, чем количество мест в ряду, или на 9 больше. Какое количество рядов может быть в зале, если их должно быть не меньше 10?

Решение. Обозначим количество рядов в зале через x. По первому условию получим $x(x+2)\leqslant 360$, по второму условию — $x(x-9)\leqslant 360$. Так как должно выполняться либо первое, либо второе условие, то объединим оба условия в совокупность $\left[\begin{array}{l} x(x+2)\leqslant 360, \\ x(x-9)\leqslant 360. \end{array}\right.$ Решим каждое неравенство совокупности:

1) $x(x+2)\leqslant 360;\;\; x^2+2x-360\leqslant 0;$

$x_1=-20,\; x_2=18;\; x\in[-20;\,18];$

2) $x(x-9)\leqslant 360;\;\; x^2-9x-360\leqslant 0;$

$x_1=-15,\; x_2=24;\; x\in[-15;\,24].$

Найдем объединение множеств решений первого и второго неравенств (рис. 88). Решением совокупности неравенств является отрезок $x\in[-20;\,24]$.

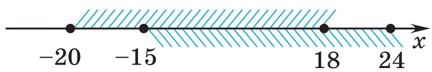


Рис. 88

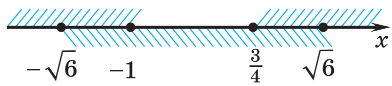
По условию задачи число рядов должно быть не меньше 10, количество рядов является натуральным числом. Тогда $x\in\{10,\,11,\,...,\,24\}$.

Ответ: $x\in\{10,\,11,\,...,\,24\}$.

Системы квадратных неравенств	
1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x^2\geqslant -(x-3), \\ x^2\leqslant 6. \end{cases}$	Решим каждое неравенство системы: 1) $4x^2\geqslant -(x-3);$ $4x^2+x-3\geqslant 0;$ $x_1=-1,\; x_2=\frac{3}{4}$ — нули функции $y=4x^2+x-3$. Решением неравенства $4x^2\geqslant-(x-3)$ является объединение промежутков $(-\infty;\,-1]\cup\left[\frac{3}{4};\,+\infty\right)$. 2) $x^2\leqslant 6;\; x^2-6\leqslant 0;$ $x_1=-\sqrt{6},\;\; x_2=\sqrt{6}$ — нули функции $y=x^2-6$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Решением неравенства $x^2 - 6 \leqslant 0$ является отрезок $\left[-\sqrt{6};\ \sqrt{6}\right]$.

Найдем пересечение множеств решений неравенств системы.



Решение системы неравенств:

$\left[-\sqrt{6};\ -1\right] \cup \left[\frac{3}{4};\ \sqrt{6}\right]$.

Ответ: $\left[-\sqrt{6};\ -1\right] \cup \left[\frac{3}{4};\ \sqrt{6}\right]$.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Совокупности неравенств</td>
</tr>
<tr>
<td>
2. Найдите решение совокупности неравенств

$\left[\begin{array}{l} 3x^2 \leqslant 9, \\ 4x^2 > 2{,}56. \end{array}\right.$
</td>
<td>
Решим каждое неравенство совокупности:

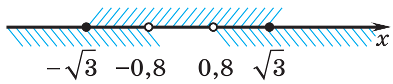
1) $3x^2 \leqslant 9$; $x^2 \leqslant 3$; $x^2 - 3 \leqslant 0$.

Нули функции $y = x^2 - 3$:
$x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = \sqrt{3}$.

Решением неравенства $x^2 - 3 \leqslant 0$ является отрезок $\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$.

2) $4x^2 > 2{,}56$; $x^2 > 0{,}64$;
$x^2 - 0{,}64 > 0$.

Нули функции $y = x^2 - 0{,}64$: $x_1 = -0{,}8$; $x_2 = 0{,}8$. Решением неравенства $x^2 - 0{,}64 > 0$ является объединение промежутков:
$(-\infty;\ -0{,}8) \cup (0{,}8;\ +\infty)$.
</td>
</tr>
</table>

	Найдем объединение множеств решений первого и второго неравенств.  Объединением множеств является вся числовая прямая. *Ответ*: $x \in \boldsymbol{R}$.

1. Может ли решением системы квадратных неравенств быть пустое множество?

2. Может ли решением системы квадратных неравенств быть множество, состоящее из одного числа?

3. Может ли решением совокупности квадратных неравенств быть множество, состоящее из одного числа?

3.200. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x - 5 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - x - 20 \leqslant 0, \\ x^2 + 3x - 18 \geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 7x - 8 \leqslant 0, \\ x^2 + 8x + 12 < 0. \end{cases}$

3.201. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y = x^2 + x$ принимает отрицательные значения, а функция $y = -x^2 + 2x + 3$ принимает неотрицательные значения.

3.202. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - x - 4 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 \geqslant 0, \\ x - 1 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 > 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 \leqslant 0, \\ 4 - 5x > 0. \end{cases}$

3.203. Найдите все значения аргумента, при которых и функция $y = 2x^2 + 9x + 4$, и функция $y = 6 - 5x$ принимают неотрицательные значения.

3.204. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 8x \leqslant 0, \\ x^2 + 3x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 25 > 0, \\ x^2 - 49 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x \leqslant 0, \\ 4x^2 - 9 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 5 \leqslant 0, \\ x^2 + x \geqslant 0. \end{cases}$

3.205. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = -x^2$ расположен выше прямой $y = -9$ и ниже прямой $y = -1$.

3.206. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 24 \leqslant 0, \\ x^2 \geqslant 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + x - 3 \leqslant 0, \\ -x^2 < 2x. \end{cases}$

3.207. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{-x^2 + 3x + 4} + \sqrt{2 - x}$; б) $\sqrt{36 - x^2} - \sqrt{2x - 12}$.

3.208. В лекционной аудитории число рядов на 8 больше, чем число мест в одном ряду, при этом общее число мест в аудитории не превосходит 105, а число рядов не меньше 9. Каково наибольшее возможное число рядов в этой аудитории?

3.209. Найдите число целых решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ \dfrac{x-1}{4} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{x+2}{6} < 1, \\ 9 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

3.210. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} -2x + 3 \geqslant 3(x + 2), \\ -x^2 - 4x > 0. \end{cases}$

3.211. Решите двойное неравенство, заменив его системой неравенств:

а) $0 \leqslant x^2 + 8x < 9$; б) $3 < x^2 - 8x + 23 \leqslant 16$;

в) $2x < x^2 - 24 < 10x$; г) $2x - 1 < x^2 \leqslant 4x - 3$.

3.212. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases}(x+2)^2 \leqslant (2x-3)^2 - 8(x-5),\\ x^2 - x - 42 < 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x-2)^2 < (2x+3)^2 - 8(x+5),\\ x^2 + x - 42 \leqslant 0.\end{cases}$

3.213. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 2x - 8 > 0,\\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 2x - 35 \geqslant 0,\\ x^2 + 10x + 9 > 0;\end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 4x \geqslant 0,\\ x^2 - x - 6 < 0;\end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l}x^2 > 25,\\ x^2 - 6x + 5 \leqslant 0.\end{array}\right.$

3.214. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = x^2 - x$ расположен выше прямой $y = 20$ или ниже прямой $y = 12$.

3.215. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2 + x - 6 \geqslant 0,\\ x^2 + 2x + 7 < 0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 4x + 3 < 0,\\ 2x^2 + x + 1 \geqslant 0.\end{array}\right.$

3.216. Для прохождения практики студент может выбрать любой из двух графиков: число дней в неделю на 1 меньше, чем число часов работы в один день, или число часов работы на 1 меньше, чем число рабочих дней в неделю. Число рабочих часов должно быть не меньше 30. Сколько рабочих дней может быть у студента на практике?

3.217. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 7x - 8 \geqslant 0,\\ x < 0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}2x^2 + 5x - 3 \leqslant 0,\\ 3 - x > 0;\end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 12x \leqslant 0,\\ 15 - 3x > 0;\end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 4 \geqslant 0,\\ 1 - 2x \leqslant 0.\end{array}\right.$

3.218. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases}x^2 - 5x - 24 > 0,\\ x^2 - 5x - 36 \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2 - 5x - 6 \leqslant 0,\\ x^2 - 3x - 10 > 0.\end{cases}$

3.219. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y = x^2 + x - 6$ принимает неотрицательные значения, а функция $y = -x^2 + 4x$ — положительные значения.

3.220. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 < 0, \\ x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 0. \end{cases}$

3.221. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 6x > 0, \\ x^2 - 2x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 36 < 0, \\ 9x^2 - 1 \geqslant 0. \end{cases}$

3.222. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = 2x^2$ расположен выше прямой $y = 8$ и ниже прямой $y = 18$.

3.223. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geqslant 0, \\ x^2 \leqslant 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 4 \geqslant 0, \\ -x^2 > -4x. \end{cases}$

3.224. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{-x^2 + x + 2} + \sqrt{1 - x}$; б) $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{2x - 10}$.

3.225. Учащиеся 9-х классов решили принять участие в республиканской новогодней благотворительной акции «Наши дети» и подготовили подарки. При этом они заметили, что если подарков будет столько же, сколько конфет в каждом подарке, то число всех конфет не превысит 400, а если конфет в каждом подарке будет на 10 меньше, чем подарков, то число конфет не превысит 144. Каково максимально возможное число подарков?

3.226. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} 2(1 - x) < 7x + 5, \\ 4 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

3.227. Решите двойное неравенство, заменив его системой неравенств:

а) $0 < x^2 - 6x \leqslant 7$; б) $x + 2 < x^2 \leqslant 16$.

3.228. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 \leqslant 0, \\ x^2 - 11x + 28 < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 \leqslant 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0. \end{array}\right.$

3.229. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = -3x^2$ расположен выше прямой $y = -3$ или ниже прямой $y = -12$.

3.230. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x^2 - x + 3 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 \leqslant 0, \\ x^2 + 3x + 7 > 0. \end{array}\right.$

3.231. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 4x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x + 2 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 36 \leqslant 0, \\ 5 - 2x > 0. \end{array}\right.$

3.232. Вычислите:

а) $\sqrt{1\frac{24}{25}} - \frac{1}{7}\sqrt{1,96}$; б) $\frac{3\sqrt{6,25} - 2\sqrt{3,24}}{\sqrt{900}}$.

3.233. Сравните значения выражений $a^{-3} - b^{-3}$ и $(a - b)^{-3}$ при $a = 0,5$; $b = 0,25$.

3.234. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 + 7x - 18$; б) $5x^2 - 14x - 3$; в) $-25x^2 + 10x - 1$.

3.235. Готовясь к олимпиаде по математике, до которой оставалось 17 дней, восьмиклассник запланировал решать в каждый из оставшихся дней одинаковое количество задач. Решение задач так его увлекло, что он решал ежедневно на 5 задач больше, чем намечал по плану, и поэтому за 5 дней до начала олимпиады попросил у учителя дополнительное задание для подготовки. Сколько задач решал восьмиклассник ежедневно?

3.236. Функция задана формулой $y = -8$. Выберите все верные утверждения:

а) график функции проходит через точку $A(100; -8)$; б) функция не имеет нулей; в) график функции проходит через начало координат; г) график функции симметричен относительно оси ординат; д) график функции не пересекает ось абсцисс.

3.237. Выполните замену переменной и решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

• уметь определять квадратичную функцию в различных формах ее записи;

• уметь находить:
нули квадратичной функции;
промежутки монотонности квадратичной функции;
промежутки знакопостоянства квадратичной функции;
наибольшее или наименьшее значение квадратичной функции;

• знать алгоритм построения графика квадратичной функции и уметь строить параболу по уравнению квадратичной функции, записанному в различных формах;

• знать, какие реальные процессы можно описывать с помощью квадратичной функции;

• знать алгоритм решения квадратных неравенств и уметь решать квадратные неравенства;

• уметь решать системы и совокупности квадратных неравенств.

Я проверяю свои знания

1. Какую функцию называют квадратичной? Из данных функций выберите квадратичные:

а) $y = -x^2 - 8x + 4$; б) $y = x^2 + 2x$; в) $y = -7x^2 - 1$;
г) $y = -4x + 3$; д) $y = -8x^2$; е) $y = x^3 - 4x^2$.

Как называется график квадратичной функции?

2. На рисунке 89 изображен график одной из функций:

а) $y = x - 4$; б) $y = x^2 - 2x - 3$;
в) $y = 3x - 1$; г) $y = -x^2 - x - 3$.

Определите, график какой функции изображен на рисунке.

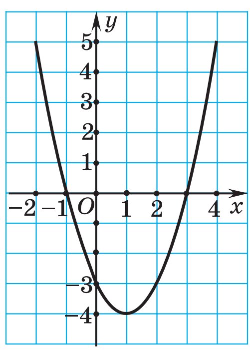


Рис. 89

3. Квадратичная функция задана формулой $f(x) = -x^2 + 5x - 3$. Найдите:

а) $f(0)$; б) $f(2)$; в) $f(-1)$.

4. Определите направление ветвей и найдите координаты вершины параболы:

а) $y = 4x^2 - 8x + 1$; б) $y = -3(x + 6)^2 + 5$;
в) $y = (x - 6)(x + 2)$; г) $y = -5x^2 + 9$.

5. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 11x + 10 \geqslant 0$; б) $4x^2 + 9x + 2 < 0$;

в) $x^2 + x + 6 > 0$; г) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$;

д) $3x^2 - x < 0$; е) $4x^2 - 9 \geqslant 0$.

6. Постройте графики квадратичных функций $f(x) = (x - 4)^2 - 1$, $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$ и $h(x) = (x - 2)(x + 6)$. Для каждой из функций укажите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее (наибольшее) значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции. Можно ли выполнить задания а) — ж) без построения графика?

7. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 < 0, \\ 6x - x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0, \\ x^2 + 3x - 10 \leqslant 0. \end{cases}$

8. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 11x - 6 < 0, \\ x + 4 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 \leqslant 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{array}\right.$

9. Фирма производит от 0 до 60 керамических ваз в день. Прибыль в рублях задается функцией $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, где x — число ваз.

а) Рассчитайте прибыль при продаже 40 ваз.

б) Найдите число изготовляемых ваз, наиболее выгодное для продажи.

10. Найдите значения числа t, при которых уравнение:

а) $2x^2 - tx + 8 = 0$ имеет два корня;

б) $5x^2 + tx + 3 = 0$ не имеет корней.

Практическая математика

1. Если периметр прямоугольного участка земли равен 100 м, то какова его наибольшая площадь?

2. Велосипедист, выезжая из города со скоростью $v_0 = 12\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, начинает разгоняться с постоянным ускорением, модуль которого $a = 2\ \frac{км}{ч^2}$, достигая скорости $20\ \frac{км}{ч}$. Зависимость пути s (км) велосипедиста от времени t (ч) его движения за городом определяется выражением $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого велосипедист будет находиться в зоне покрытия сотовой связи, если оператор гарантирует наличие связи в радиусе не более 20 км от города.

3. Мяч брошен вертикально вверх с высоты 1,2 м с начальной скоростью, модуль которой $v_0 = 10\ \frac{м}{с}$. Зависимость высоты подъема мяча над землей h (м) от времени полета t (с) выражается формулой $h = -5t^2 + 10t + 1{,}2$. На какую максимальную высоту поднимется мяч?

4. Во время учений исследуется запуск ракеты в воду. С помощью камеры отмечается высота h, на которой находится ракета в зависимости от времени t (рис. 90). Предполагается, что зависимость высоты h от времени t задается уравнением $h(t) = -\frac{1}{2}g(t - \alpha)^2 + \beta$, где g — ускорение свободного падения, модуль которого можно считать равным $10\ \frac{м}{с^2}$.

а) На какой высоте находится ракета через 1 с? Через 3 с?

б) Найдите h в верхней точке траектории.

в) Найдите значения α и β.

г) Какая функция вида $h(t) = at + b$ может моделировать движение для $t > 3$ с?

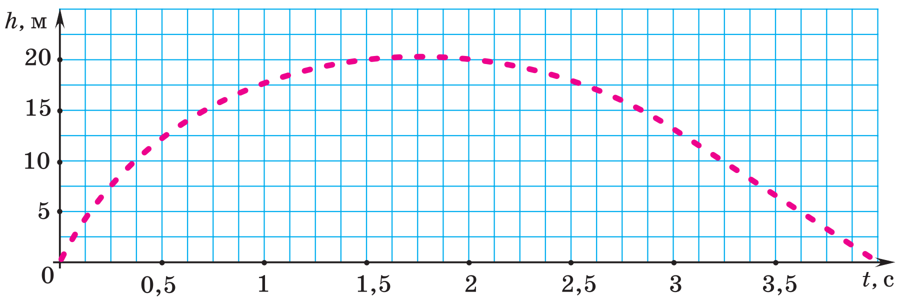


Рис. 90

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание 1. Определите, какие части картинки (рис. 91) соответствуют следующим функциям:

1) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 5$, $x \in [2; 8]$;

2) $y = -(x-8)^2 + 7$, $x \in [7{,}5; 9]$;

3) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 9$, $x \in [2; 8]$;

4) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 + 7$, $x \in [2; 8]$;

5) $y = (x-8)^2 + 5$, $x \in [7{,}2; 9]$;

6) $y = \frac{4}{9}(x-5)^2 + 4$, $x \in [2; 8]$;

7) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 + 3$, $x \in [2; 8]$.

С помощью графиков постройте свою картинку.

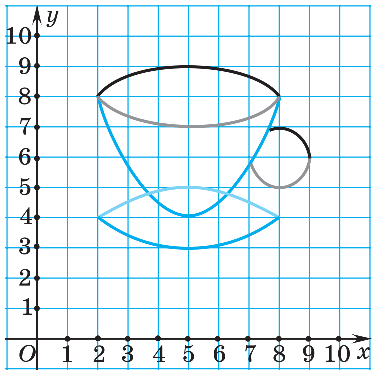


Рис. 91

Исследовательское задание 2. Рассмотрим семейство графиков функций $y = -x^2 + kx$, где k может изменяться от -10 до 10 с шагом 1. Отметим вершины парабол красными точками и соединим их плавной линией (рис. 92). Какую гипотезу можно выдвинуть? Почему?

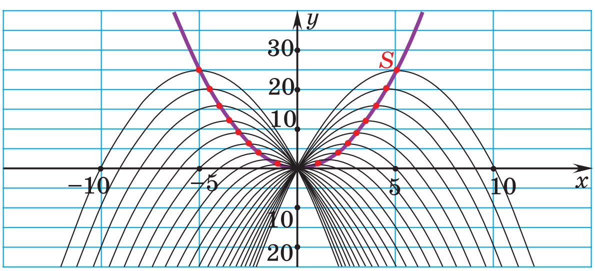


Рис. 92

Готовимся к олимпиадам

1. Участников парада планировали построить так, чтобы в каждом ряду стояло по 24 человека. Однако оказалось, что не все прибывшие смогут участвовать в параде, и их перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше, а число человек в ряду — на 26 больше нового числа рядов. Определите, сколько человек прибыло на парад, зная, что если бы все они участвовали, то их можно было бы перестроить так, чтобы число рядов было равно числу человек в ряду.

2. Известно, что график квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 2x + p$. Докажите, что все такие квадратичные функции имеют одно и то же наименьшее значение.

Интересно знать. *Фаина Михайловна Кириллова* (29 сентября 1931 г., село Зуевка, Россия) — заслуженный деятель науки Республики Беларусь, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор. Ф. М. Кириллова — известный в нашей стране и за ее пределами специалист в теории оптимального управления.

Задачи оптимального управления — это выбор наиболее выгодных режимов управления сложными динамическими объектами. Например, к таким задачам относятся оптимизация траекторий полета самолетов и космических кораблей, улучшение режимов работы роботов, оптимизация ядерных реакторов, выбор программ лечения на основе математических моделей иммунной, сердечно-сосудистой систем.