Глава 3

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 13. Квадратичная функция и ее свойства

3.1. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $5(x-1)(x-4)$;

б) $-2(x-4)(x+2)$;

в) $(x-1{,}5)^2-2{,}5$;

г) $2(x-1)^2+3$.

3.2. Найдите координаты точек пересечения графика функции с осью абсцисс и осью ординат:

а) $y = 4x - 5$;

б) $y = -x + 5$.

3.3. Найдите:

а) наибольшее значение выражения $-2(x-1)^2+3$;

б) наименьшее значение выражения $(x-1{,}5)^2-2{,}5$.

Функции позволяют описывать процессы из различных областей науки и жизни. Например, траектория тела, брошенного под углом к горизонту, описывается функцией, график которой (рис. 44) называется **параболой** (от греч. παραβολή — *пара* — рядом и *балло* — бросаю).

Траекторией мяча, брошенного баскетболистом (рис. 45), или копья, которое метнул легкоатлет, если не учитывать сопротивление воздуха, является парабола.

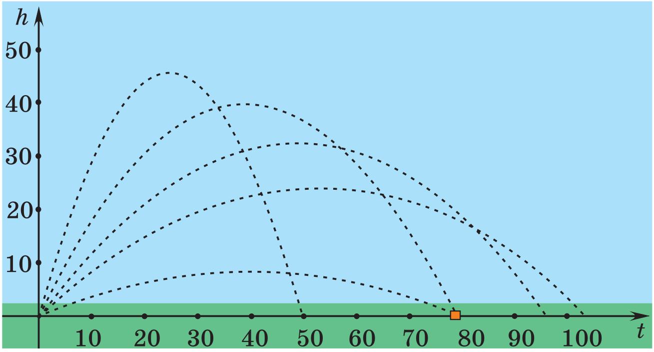


Рис. 44

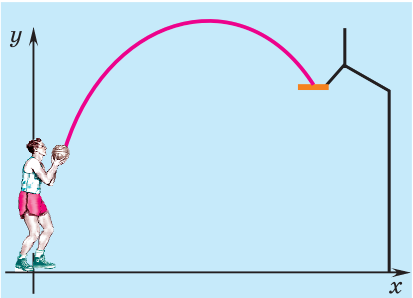


Рис. 45

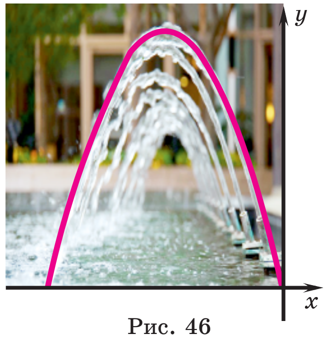


Рис. 46

По параболе движутся капли воды в струе фонтана (рис. 46).

Все рассмотренные процессы описываются функциями вида $y = ax^2 + bx + c$, графиками которых являются параболы.

Определение Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется **квадратичной.**

Например, функции $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$, $f(x) = -x^2 + 6x$, $f(x) = x^2$ — квадратичные.

Рассмотрим свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и способ построения ее графика — параболы.

Как известно, квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, можно разложить на множители, т. е. представить в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — его корни.

Также квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно записать в виде $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Таким образом, квадратичную функцию можно записать:
1) в виде многочлена

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0;$$

2) в виде разложения на множители (если корни соответствующего квадратного трехчлена существуют)

$$y = a(x - x_1)(x - x_2);$$

3) в виде выделенного полного квадрата

$$y = a(x - m)^2 + n.$$

Формы записи квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - m)^2 + n$$

Например, квадратичную функцию $y = 4x^2 - 24x + 20$ можно записать в следующих формах:

- $y = 4x^2 - 24x + 20$ — в виде многочлена;
- $y = 4(x - 1)(x - 5)$ — в виде разложения на множители;
- $y = 4(x - 3)^2 - 16$ — в виде выделенного полного квадрата.

Для исследования свойств квадратичной функции и построения ее графика будем использовать различные формы ее записи.

Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Область определения функции. Так как $ax^2 + bx + c$ — многочлен, то областью определения квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, являются все действительные числа, т. е. $D = \boldsymbol{R}$. Графически это означает, что для любого значения абсциссы найдется соответствующая точка на параболе.

2. Множество значений функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Для нахождения множества значений квадратичной функции воспользуемся ее формой записи в виде выделенного полного квадрата: $y = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Если $a > 0$, то при $x = m$ выражение $a(x - m)^2 + n$ принимает **наименьшее значение**, равное n. Значит, на изображении параболы существует точка, в которой функция принимает наименьшее значение. Эта точка называется **вершиной параболы**, ее координаты $x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рис. 47).

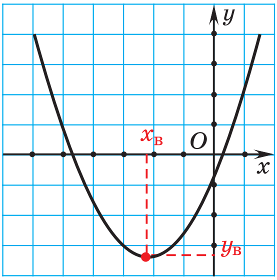


Рис. 47

Следовательно, если $a > 0$, то $E = [y_в; +\infty)$.

Если $a < 0$, то при $x = m$ выражение $a(x - m)^2 + n$ принимает **наиболь-**

шее значение, равное n. В этом случае на изображении параболы существует точка, в которой функция принимает наибольшее значение, она называется вершиной параболы, ее координаты

$x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рис. 48).

Следовательно, если $a < 0$, то $E = (-\infty; y_в]$.

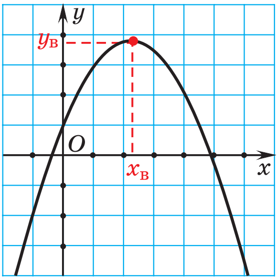


Рис. 48

3. Нули функции. Значения аргумента, при которых значения функции $y = ax^2 + bx + c$ равны нулю, являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках с координатами $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ (рис. 49).

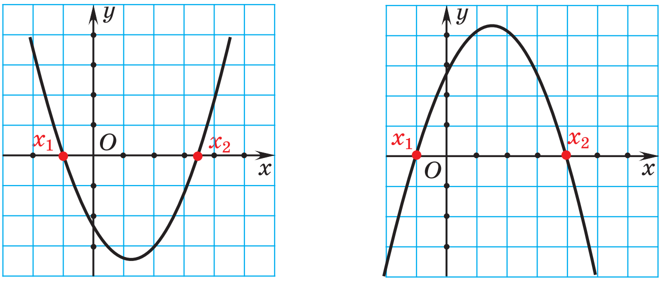


Рис. 49

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень x_1, то парабола имеет с осью абсцисс единственную общую точку с координатами $(x_1; 0)$ (рис. 50).

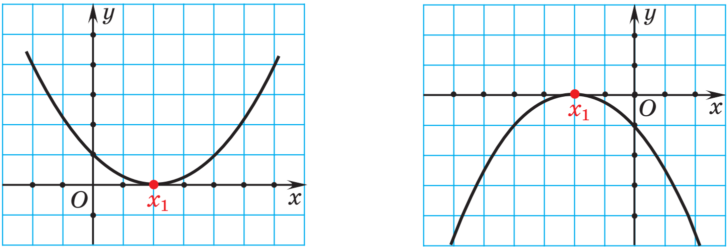


Рис. 50

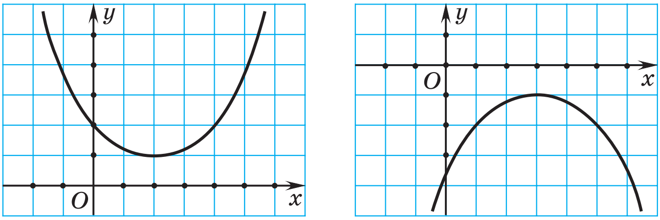


Рис. 51

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то парабола не имеет с осью абсцисс общих точек (рис. 51).

4. Ось симметрии параболы. Осью симметрии параболы является прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси ординат. Уравнение оси симметрии $x = -\frac{b}{2a}$.

Симметричные части графика называются **ветвями параболы**. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 52).

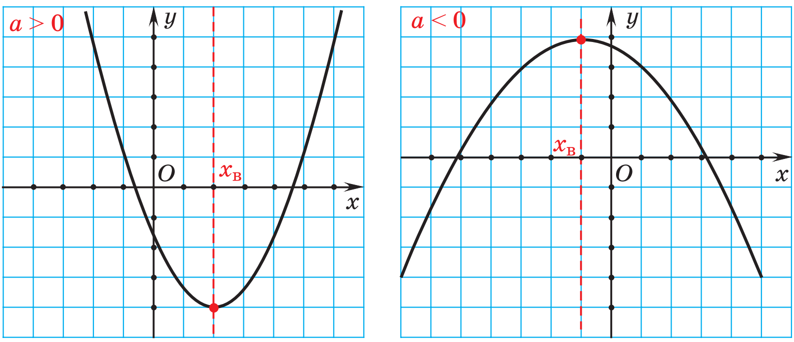


Рис. 52

Чтобы построить график квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, нужно:

① Определить направление ветвей параболы. (Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.)	Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ① $a = 1 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх.

② Определить координаты вершины параболы:

$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a},\ y_{\text{в}} = f(x_{\text{в}}).$$

Построить вершину параболы и ось симметрии параболы $x = -\frac{b}{2a}$.

③ Найти нули функции, если они есть, и отметить их на оси абсцисс.

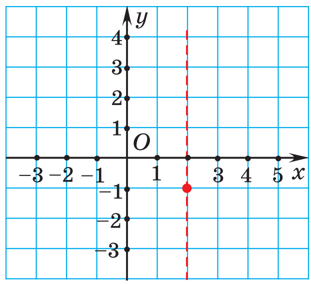
④ Определить точку пересечения параболы с осью ординат.
(Если $x = 0$, то значение функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ равно c.)
Построить точку с координатами $(0;\ c)$ и точку, ей симметричную относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$.

⑤ Соединив отмеченные точки плавной линией, построить график функции.

② $x_{\text{в}} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2;$

$y_{\text{в}} = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$

Вершиной параболы является точка с координатами $(2;\ -1)$. Осью симметрии параболы является прямая $x = 2$.
Построим их на координатной плоскости.

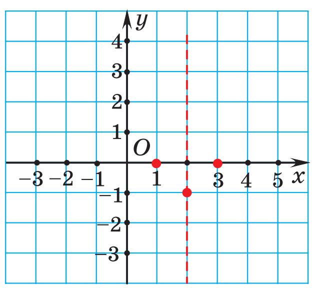


③ $x^2 - 4x + 3 = 0;$

$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4,$

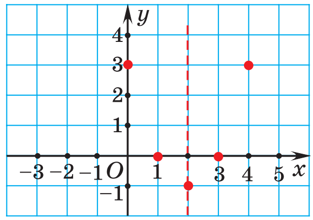
$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3,\ \ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$

Отметим нули функции на оси абсцисс.

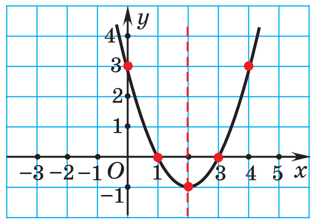


④ Если $x = 0$, то $y = 3$.
Парабола пересекает ось ординат в точке с координатами $(0;\ 3)$. Точка с

координатами (4; 3) симметрична ей относительно оси симметрии параболы. Отметим эти точки.



⑤



Координаты вершины параболы

1. Определите координаты вершины параболы:

а) $y = 3(x - 1{,}2)^2 - 5$;

б) $y = (2x - 3)(x - 1)$;

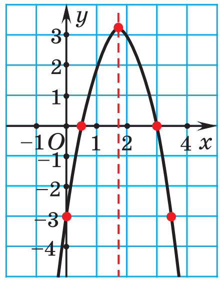
в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.

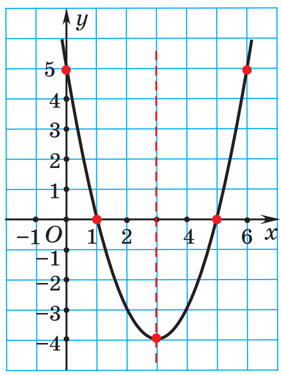
а) Если квадратичная функция записана в форме $y = a(x - m)^2 + n$, то $x_в = m$, $y_в = n$. Для функции $y = 3\left(x - 1{,}2\right)^2 - 5$ получим $x_в = 1{,}2$; $y_в = -5$.

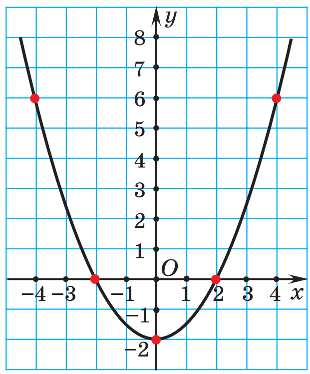
б) Запишем квадратичную функцию в виде многочлена $(2x - 3)(x - 1) = 2x^2 - 5x + 3$. Найдем абсциссу вершины параболы: $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$. Для нахождения ординаты вершины параболы можно воспользоваться формулой $y_в = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, тогда $y_в = -\frac{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$.

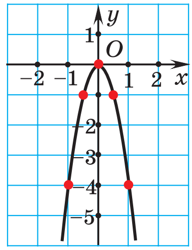
	Ординату вершины параболы можно также найти, подставив найденное значение абсциссы вершины в формулу функции: $y_в = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8}$. в) $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$; $y_в = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$.
Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции	
2. Найдите наибольшее (наименьшее) значение функции: а) $y = 3(x - 1{,}2)^2 - 5$; б) $y = (2x - 3)(x - 1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Так как $a = 3 > 0$, то функция принимает наименьшее значение, равное ординате вершины параболы, т. е. наименьшее значение данной функции равно $y_в = -5$. б) Так как $a = 2 > 0$, то функция принимает наименьшее значение, равное ординате вершины параболы. Поскольку вершина параболы имеет координаты $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, то наименьшее значение данной функции равно $y_в = -\frac{1}{8}$. в) Так как $a = -2 < 0$, то функция принимает наибольшее значение, равное ординате вершины параболы. Ордината вершины параболы равна нулю, значит, наибольшее значение данной функции равно $y_в = 0$.

Множество значений квадратичной функции	
3. Найдите множество значений квадратичной функции: а) $y = 3(x - 1{,}2)^2 - 5$; б) $y = (2x - 3)(x - 1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Так как $a = 3 > 0$, то $E = [y_в; +\infty)$. Поскольку $y_в = -5$, то $E = [-5; +\infty)$. б) Так как $a = 2 > 0$, то $E = [y_в; +\infty)$. Поскольку $y_в = -\frac{1}{8}$, то $E = \left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$. в) Так как $a = -2 < 0$, то $E = (-\infty; y_в]$. Поскольку $y_в = 0$, то $E = (-\infty; 0]$.
Точки пересечения графика функции с осями координат	
4. Найдите координаты точек пересечения графика квадратичной функции с осями координат: а) $f(x) = -(x - 1{,}2)^2 + 25$; б) $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$; в) $p(x) = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Для определения координат точек пересечения графика функции $f(x) = -(x - 1{,}2)^2 + 25$ с осью абсцисс найдем нули этой функции, т. е. решим уравнение $-(x - 1{,}2)^2 + 25 = 0$: $(x - 1{,}2 + 5)(x - 1{,}2 - 5) = 0$; $(x + 3{,}8)(x - 6{,}2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6{,}2, \\ x = -3{,}8. \end{array}\right.$ Для определения координат точки пересечения графика с осью ординат найдем значение функции при $x = 0$ и получим $f(0) = -(0 - 1{,}2)^2 + 25 = -1{,}44 + 25 = 23{,}56$. *Ответ*: $(6{,}2;\ 0)$; $(-3{,}8;\ 0)$; $(0;\ 23{,}56)$. б) Найдем нули функции $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$. Используем свойство о равенстве произведения нулю и получим: $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ x + 4 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -4. \end{array}\right.$

	$h(0) = 2(0-1)(0+4) = -8$. *Ответ*: $(1; 0); (-4; 0); (0; -8)$. в) $-2x^2 + 4x - 2 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$, $x = 1$. $p(0) = -2$. *Ответ*: $(1; 0); (0; -2)$.
Построение графика квадратичной функции	
5. Постройте график функции $y = -2x^2 + 7x - 3$.	① $a = -2 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{7}{-4} = \frac{7}{4}$, $y_в = -2\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2 +$ $+ 7\cdot\frac{7}{4} - 3 = 3\frac{1}{8}$. Ось симметрии параболы — прямая $x = 1\frac{3}{4}$. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $D = 25$, $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $(3; 0)$; $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. ④ Точка пересечения графика с осью ординат: $x = 0$, $y = -3$. Точка $(3{,}5; -3)$ симметрична точке $(0; -3)$ относительно оси симметрии параболы. ⑤ Построим график функции $y = -2x^2 + 7x - 3$. 

6. Постройте график функции $y = (x-3)^2 - 4$.	① $a = 1 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх. ② Координаты вершины параболы: $x_в = 3$, $y_в = -4$. Ось симметрии параболы — прямая $x = 3$. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $(x-3)^2 - 4 = 0$; $(x-3+2)(x-3-2) = 0$; $(x-1)(x-5) = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $(1; 0)$; $(5; 0)$. ④ При $x = 0$ $y = (0-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$. График функции пересекает ось ординат в точке $(0; 5)$. Точка $(6; 5)$ симметрична точке $(0; 5)$ относительно оси симметрии параболы. ⑤ Построим график функции $y = (x-3)^2 - 4$. 
7. Постройте график функции $y = 0{,}5x^2 - 2$.	① $a = 0{,}5 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{0}{1} = 0$; $y_в = 0{,}5 \cdot 0^2 - 2 = -2$.

	Осью симметрии параболы является прямая $x = 0$, т. е. ось ординат. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $0{,}5x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $(2; 0)$; $(-2; 0)$. ④ Точка пересечения графика с осью ординат $(0; -2)$. ⑤ Найдем координаты нескольких дополнительных точек: $(4; 6)$; $(-4; 6)$. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 - 2$. 
8. Постройте график функции $y = -4x^2$.	① $a = -4 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{0}{-8} = 0$; $y_в = -4 \cdot (0)^2 = 0$. Ось симметрии параболы $x = 0$ — ось ординат. ③ Нули функции: $-4x^2 = 0$, $x = 0$. ④ Точка пересечения графика с осью ординат $(0; 0)$.

	⑤ Найдем координаты нескольких дополнительных точек: (1; –4); (–1; –4); (0,5; –1); (–0,5; –1). Построим график функции $y = -4x^2$. 

1. Какая из следующих функций не является квадратичной:
а) $f(x) = (3x - 2) + (5x + 4)$; б) $g(x) = (3x + 1)(5x + 4)$;
в) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$?

2. Даны три функции: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$; $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ и $h(x) = 2(x - 1)(x + 3)$. Верно ли, что f, g, h — три формы записи одной и той же функции?

3.4. Пользуясь определением квадратичной функции, из данных функций выберите квадратичные:

а) $y = -x^2 + 7x - 2$; б) $y = 5x^2 + x$; в) $y = -2x^2 + 9$;
г) $y = -x + 7$; д) $y = 5x^2$; е) $y = x^3 + 3x^2$.

3.5. Для каждой из квадратичных функций определите, в какой форме она записана:

а) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$; б) $f(x) = (x + 1)(x - 5)$;
в) $f(x) = 7(x - 2)^2 + 8$; г) $f(x) = -2x^2 + 7x - 1$;
д) $f(x) = (9 - x)(3x + 4)$; е) $f(x) = -4(x + 1)^2 - 5$.

3.6. Выберите уравнения парабол, ветви которых направлены вниз:

а) $y = 3x^2 - x - 2$; б) $y = -2x^2 + 4x - 1$;
в) $y = -x^2 + 10x$; г) $y = 9 - x^2$;
д) $y = 0{,}1x^2$; е) $y = 4x^2 - 1$.

Приведите несколько примеров функций, графиками которых являются параболы, ветви которых направлены вверх.

3.7. Определите, каким параболам принадлежит точка с координатами (1; 4):

а) $y = x^2 - x - 4$; б) $y = -3(x + 1)^2 + 16$;
в) $y = (x - 2)(x - 5)$; г) $y = -x^2 + 3$.

3.8. Для квадратичной функции, заданной формулой $f(x) = x^2 - 5x + 1$, найдите:

а) $f(1)$; б) $f(-3)$; в) $f(0)$.

3.9. Для квадратичной функции $g(x) = -0{,}25x^2 + 3$ сравните:

а) $g(-2)$ и $g(4)$; б) $g(-0{,}5)$ и $g(0{,}5)$;
в) $g\left(-2\sqrt{3}\right)$ и $g\left(\sqrt{6}\right)$; г) $g\left(-2\sqrt{5}\right)$ и $g\left(2\sqrt{5}\right)$.

3.10. Для квадратичной функции $f(x) = x^2 - 4x + 9$ найдите значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 9$; б) $f(x) = 6$; в) $f(x) = 21$.

3.11. Определите, существуют ли значения аргумента, при которых квадратичная функция:

а) $y = x^2 - 4x + 7$ принимает значение, равное 4;
б) $y = -2x^2 + 6$ принимает значение, равное 9;
в) $y = 5x^2 - x + 1$ принимает значение, равное 1.

3.12. Для парабол, изображенных на рисунке 53, запишите:

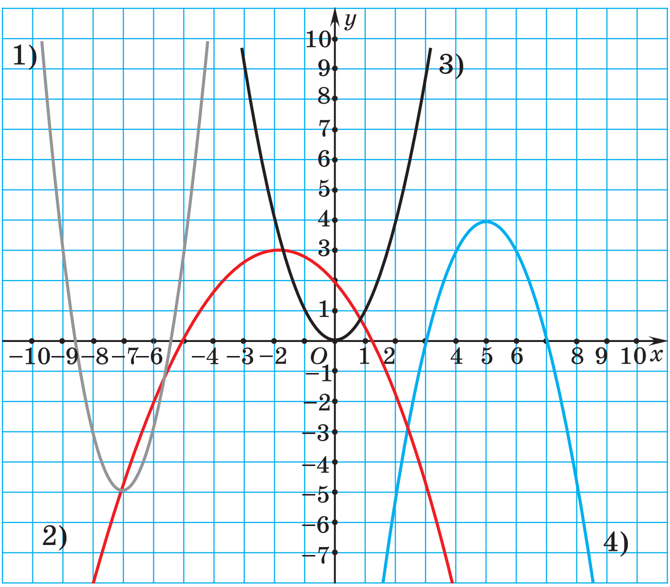


Рис. 53

а) направление ветвей; б) координаты вершины; в) уравнение оси симметрии; г) наибольшее (наименьшее) значение; д) множество значений.

3.13. Определите направление ветвей и координаты вершины параболы:

а) $y = (x-2)^2 + 3$; б) $y = 4(x+1)^2 - 6$;
в) $y = -(x-5)^2 - 8$; г) $y = -7(x+9)^2$;
д) $y = 2x^2 + 5$; е) $y = -8x^2$.

3.14. Приведите по два примера уравнений парабол, вершинами которых являются точки:

а) (3; 8); б) (–8; –6); в) (0; –3); г) (5; 0).

3.15. График функции $f(x) = a(x-m)^2 + n$ изображен на рисунке 54. Пользуясь графиком, найдите a, m и n. Запишите функцию $y = f(x)$ в виде многочлена.

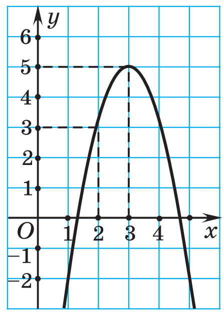


Рис. 54

3.16. Найдите координаты вершины параболы и запишите уравнение ее оси симметрии:

а) $y = 2x^2 - 4x + 1$; б) $y = 2x^2 + 4x$;
в) $y = -0{,}5x^2 - 4x + 1$; г) $y = -x^2 + 4x - 7$.

3.17. Определите, в какой координатной четверти находится вершина параболы:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 7$; б) $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$;
в) $f(x) = 4x^2 + 4x - 5$; г) $f(x) = -3x^2 - 12x$.

Запишите уравнение оси симметрии для каждой параболы.

3.18. Запишите квадратичную функцию $y = (x-4)(x+2)$ в виде многочлена и найдите ординату вершины параболы, являющейся графиком данной функции.

3.19. Найдите наименьшее (наибольшее) значение функции:

а) $y = (x-8)^2 + 9$; б) $y = -4(x+1)^2 + 5$;
в) $y = 2x^2 - 6x + 4$; г) $y = -x^2 + 4x - 3$;
д) $y = (x+8)(x-4)$; е) $y = -3(x-1)(x+5)$.

3.20. Приведите по два примера квадратичных функций:

а) наименьшим значением которых является число 7;
б) наибольшим значением которых является число 15.

3.21. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = 7(x + 6)^2 - 1$; б) $f(x) = -(x - 4)^2 + 2$;
в) $f(x) = x^2 + 4x - 1$; г) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$;
д) $f(x) = -(x - 6)(x + 2)$; е) $f(x) = 2(x + 4)(x + 8)$.

3.22. Определите координаты точек, в которых график функции пересекает оси координат:

а) $y = (x - 8)(x + 3)$; б) $y = -2x^2 + 5x - 2$;
в) $y = (x + 7)^2 - 4$; г) $y = x^2 - 9$.

3.23. Среди квадратичных функций выберите функции, не имеющие нулей:

а) $y = (x + 1)(x - 6)$; б) $y = x^2 + x + 3$;
в) $y = -(x - 5)^2 + 1$; г) $y = x^2 + 4$.

3.24. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 - 2x - 8$; б) $y = -x^2 + 5x - 6$;
в) $y = 2x^2 - 8x + 6$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5$.

3.25. Постройте график квадратичной функции и найдите множество ее значений:

а) $f(x) = x^2 - 6x$; б) $f(x) = -x^2 + 9$;
в) $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$; г) $f(x) = -3x^2$.

3.26. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x - 1)^2 - 4$; б) $y = -2(x + 3)^2 + 8$;
в) $y = (x - 5)(x + 1)$; г) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 7)$.

Можно ли определить ось симметрии параболы, не выполняя построение графика?

3.27. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = -x^2$. Проанализируйте полученные результаты и сделайте вывод.

3.28. На рисунке 55 изображен график одной из функций:

а) $y = -x^2 - 2x + 2$; б) $y = -x^2 + 2x + 3$;
в) $y = -x^2 + x + 2$; г) $y = -x^2 + 2x + 2$.

Определите, график какой функции изображен на рисунке. Объясните свой выбор.

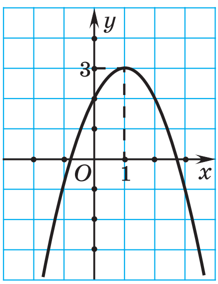


Рис. 55

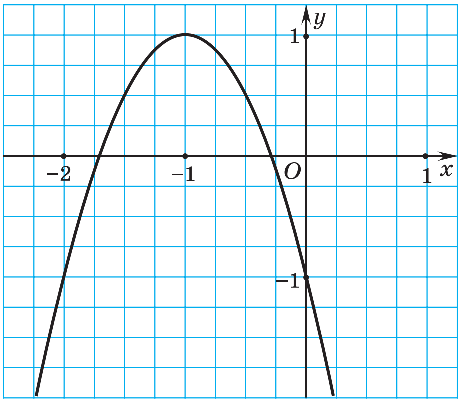


Рис. 56

3.29. Постройте график квадратичной функции и выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = 2$:

а) $f(x) = x^2 - 8x + 7$; б) $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$;

в) $f(x) = x^2 + 4x + 6$; г) $f(x) = -x^2 + 4x$;

д) $f(x) = (x - 3)^2$; е) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

3.30. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ изображен на рисунке 56. Пользуясь графиком:

а) определите $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$; б) найдите a; b и c.

3.31. Для того чтобы обнести изгородью прямоугольный участок для посадки овощей, было куплено 24 м сетки. Площадь участка S является функцией от длины одной из его сторон x. Задайте эту функцию формулой. Найдите, при каком значении аргумента функция принимает наибольшее значение.

3.32. На рисунке 57 изображен график квадратичной функции $y = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$. Определите координаты точек A; B; C; D; E.

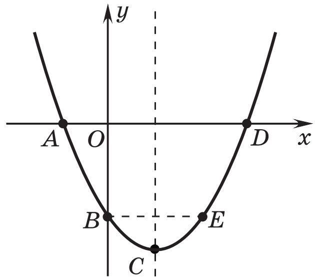


Рис. 57

3.33. Постройте графики функций и найдите координаты точек пересечения этих графиков:

а) $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = -x + 1$;

б) $y = x^2 - 4$ и $y = -x + 2$;

в) $y = -x^2 + 4x - 5$ и $y = -2$.

Проверьте полученные результаты.

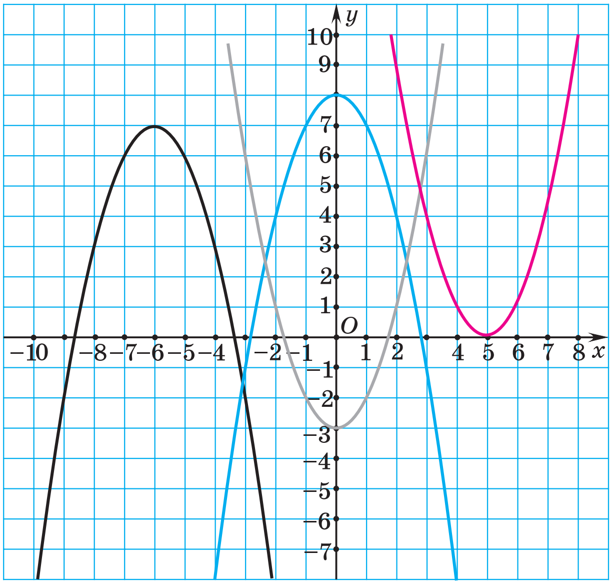


Рис. 58

3.34. Определите, графика какой из данных функций нет на рисунке 58:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = -(x + 6)^2 + 7$; в) $y = (x - 5)^2$;
г) $y = -(x - 6)^2 + 7$; д) $y = -x^2 + 8$.

3.35. Постройте графики квадратичных функций $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$ и $g(x) = (x + 3)^2 - 4$. Определите, имеют ли параболы общие точки. Можно ли это определить, не выполняя построения графиков?

3.36. На рисунке 59 изображены графики функций $f(x) = 3x^2 + 24x + c$ и $g(x) = -x^2 + bx - 18$. Пользуясь данными рисунка: а) найдите числа b и c; б) определите общее свойство для двух парабол; в) решите графически уравнение $f(x) = g(x)$.

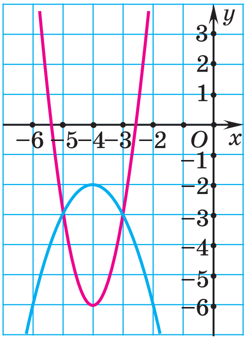


Рис. 59

3.37. Найдите значение числа b, при котором графики функций $y = -3x + b$ и $y = (x - 3)(x - 7)$ пересекаются в точке, принадлежащей оси ординат.

3.38. Определите, при каких значениях m и n вершина параболы $y = a(x - m)^2 + n$:

а) принадлежит оси ординат;

б) принадлежит оси абсцисс;

в) находится в начале координат.

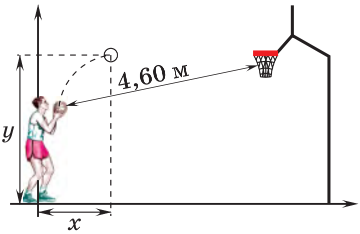


Рис. 60

3.39. Во время штрафного броска в баскетболе мяч находился примерно в 4,60 м от центра корзины, расположенной на высоте 3,05 м от пола. Игрок бросил мяч от уровня плеч, а это приблизительно 1,65 м от пола (рис. 60). Предполагается, что кривой, описанной в пространстве мячом, является парабола $y = -0{,}5x^2 + 1{,}95x + 1{,}65$, где x — расстояние по горизонтали от игрока до мяча, y — высота, на которой находится мяч. Можно ли утверждать, что игрок сумел забросить мяч в корзину? Какая максимальная высота достигнута мячом?

Знаете ли вы, что среди воспитанников белорусской школы баскетбола есть игроки мирового уровня? Например, Татьяна Ивинская в составе женской баскетбольной сборной на XXII Летних Олимпийский играх 1980 года в Москве стала олимпийской чемпионкой. Каких еще известных белорусских баскетболистов вы знаете?

3.40. На рисунке 61 изображены графики парабол $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c, знак дискриминанта соответствующего квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ для каждой из парабол.

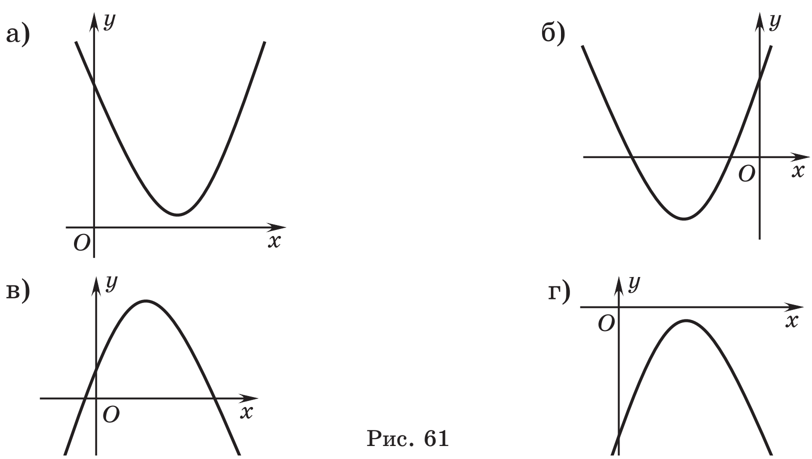


Рис. 61

3.41. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

а) $a > 0,\ c > 0,\ D > 0,\ -\frac{b}{2a} < 0;$ б) $a < 0,\ D = 0, -\frac{b}{2a} > 0;$

в) $a > 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} < 0;$ г) $a < 0,\ D > 0, -\frac{b}{2a} > 0,$

где D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

3.42. Найдите абсциссу вершины параболы, если известно, что нулями функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, являются числа:

а) –11 и 13; б) $-3 + 2\sqrt{5}$ и $25 - 2\sqrt{5}$.

3.43. График квадратичной функции $y = -x^2 + 8x + c$ проходит через точку $A(9;\ 0)$. Найдите:

а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) наибольшее значение функции;
г) нули функции.

3.44. Найдите значения c, при которых график квадратичной функции $y = x^2 + 10x + c$:

а) имеет с осью абсцисс только одну общую точку;
б) пересекает ось ординат в точке $A(0;\ -7)$;
в) проходит через начало координат;
г) не имеет с осью абсцисс общих точек.

3.45. График квадратичной функции $f(x) = 2x^2 + bx + 4$ проходит через точку $B(-1;\ -12)$. Найдите:

а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) множество значений функции;
г) нули функции.

3.46. Найдите значения b, при которых график квадратичной функции $y = -x^2 + bx - 9$: а) имеет с осью абсцисс только одну общую точку; б) симметричен относительно оси ординат; в) пересекает ось абсцисс в точках, симметричных относительно прямой $x = 5$.

3.47. На рисунке 62 изображен график функции $y = 3x^2 + bx + c$. Пользуясь данными рисунка, найдите b и c.

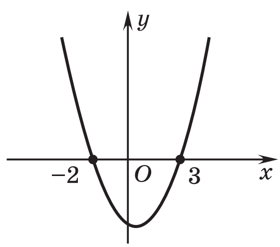


Рис. 62

3.48. Нулями квадратичной функции $y = -4x^2 + bx + c$ являются числа –1 и 3. Найдите:
а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) множество значений функции.

3.49. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы $f(x) = -x^2 + (a^2 + 4)x + 2$. Найдите координаты вершины параболы.

3.50. Выберите функции, графиками которых являются параболы, ветви которых направлены вверх:
а) $y = 5x^2 - x + 2$; б) $y = 5x - 1$;
в) $y = -x^2 + 12$; г) $y = 9x^2 + x$.

3.51. Выберите точку, принадлежащую графику квадратичной функции $y = 4x^2 - 3x + 1$:
а) (1; –1); б) (4; –3); в) (0; –3); г) (–2; 23).

3.52. Квадратичная функция задана формулой $f(x) = x^2 + 6x + 3$. Найдите: а) $f(2)$; б) $f(-1)$; в) значения аргумента, при которых $f(x) = -5$.

3.53. Найдите координаты вершины параболы:
а) $y = (x + 5)^2 - 4$; б) $y = -2(x - 8)^2 + 1$;
в) $y = -x^2 + 6$; г) $y = 7(x - 1)^2$.
Запишите ось симметрии для каждой параболы.

3.54. Выберите параболу, вершиной которой является точка с координатами (–3; 5):
а) $f(x) = x^2 - 6x + 14$; б) $f(x) = 2x^2 + 12x + 28$;
в) $f(x) = -2x^2 - 12x - 13$; г) $f(x) = -3x^2 + 5$.

3.55. Найдите наименьшее (наибольшее) значение квадратичной функции:
а) $y = 3(x + 1)^2 - 7$; б) $y = -x^2 - 6x - 2$;
в) $y = (x - 1)(x + 3)$; г) $y = -2x^2 + 10$.

3.56. Найдите область определения и множество значений квадратичной функции:
а) $f(x) = -(x - 5)^2 + 8$; б) $f(x) = x^2 - 8x + 3$;
в) $f(x) = 4(x + 5)(x - 7)$; г) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

3.57. Определите координаты точек, в которых график квадратичной функции пересекает оси координат:

а) $y = (x + 2)(x - 8)$; б) $y = -x^2 + 8x - 7$;
в) $y = -(x - 6)^2 + 9$; г) $y = x^2 + 1$.

3.58. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 + 4x + 3$; б) $y = -x^2 + 6x - 5$.

3.59. Постройте график квадратичной функции и найдите множество ее значений:

а) $f(x) = -x^2 + 4x$; б) $f(x) = x^2 - 1$;
в) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$; г) $f(x) = 2x^2$.

3.60. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x + 5)^2 - 9$; б) $y = -(x - 2)(x + 4)$.

Запишите уравнение оси симметрии каждой из полученных парабол.

3.61. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x - 4)(x + 2)$; б) $y = 4x - x^2$;
в) $y = 3x^2 + 6x + 4$; г) $y = -(x - 2)^2$.

Для каждой параболы определите, пересекает ли парабола график функции $y = -9$, и если да, то в скольких точках.

3.62. На рисунке 63 изображен график функции $y = -2x^2 + 7x + 9$. Определите координаты точек A и B.

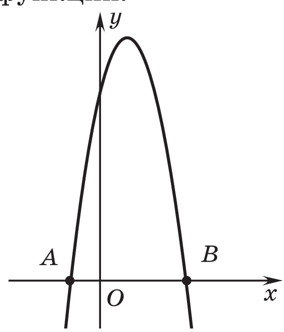


Рис. 63

3.63. Постройте графики функций и найдите координаты точек пересечения этих графиков:

а) $y = x^2 - 2x - 8$ и $y = 2x - 3$;

б) $y = -x^2 + 6x$ и $y = 9$.

3.64. На рисунке 64 изображен график одной из функций:

а) $y = x^2 - 3x$; б) $y = x^2 - 2x - 2$;
в) $y = x^2 - 2$; г) $y = x^2 + 2x - 2$.

Определите, график какой функции дан на рисунке. Объясните свой выбор.

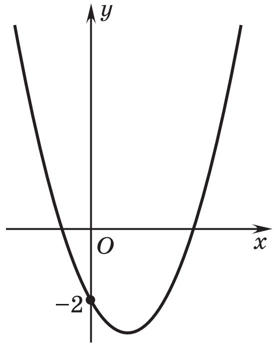


Рис. 64

3.65. Постройте графики функций $f(x) = -(x + 4)^2 + 9$ и $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, определите, имеют ли параболы общие точки.

3.66. Предприниматель шьет от 0 до 50 изделий в день и считает, что уровень затрат (в рублях) на производство x изделий задается с помощью функции $C(x) = x^2 - 10x + 500$. Пусть $R(x)$ — выручка от продажи x изделий, каждое из которых стоит 50 р.

а) Выразите зависимость $R(x)$.

б) Рассчитайте затраты, выручку и прибыль при продаже 20 швейных изделий.

в) Докажите, что величина прибыли задается с помощью функции $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

г) Найдите максимально выгодное для продажи число изготовленных изделий.

3.67. Точка $M(2;\ 47)$ принадлежит графику квадратичной функции $y = -x^2 + bx + 7$. Найдите наибольшее значение функции.

3.68. На рисунке 65 изображен график квадратичной функции $y = x^2 + bx + c$. Пользуясь данными рисунка, найдите b и c.

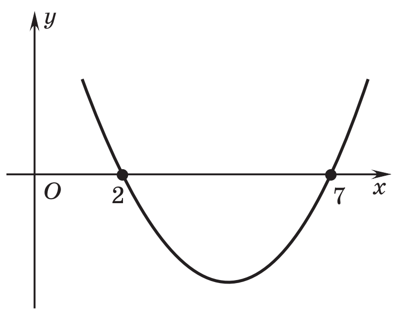


Рис. 65

3.69. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

а) $a > 0,\ c < 0,\ D > 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

б) $a > 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

в) $a < 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$,

где D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

3.70. Нулями квадратичной функции $y = 3x^2 + bx + c$ являются числа –4 и 5. Найдите:

а) координаты вершины параболы;

б) ось симметрии параболы;

в) наименьшее значение функции.

3.71. Прямая $x = 1$ является осью симметрии параболы $f(x) = 4x^2 + (a^2 - 8)x + 2$. Найдите координаты вершины параболы.

3.72. Примените формулы сокращенного умножения и вычислите: $\dfrac{48^2 - 12^2}{89^2 + 31^2 + 89 \cdot 62}$.

3.73. Найдите значение выражения $b^3 - 4b^{-2}$, если $b = -2$.

3.74. Найдите значение выражения:

а) $5a + 5b - 8$, если $-a - b = 3$;

б) $x + 1 - 6y$, если $-x + 6y = 8$.

3.75. Упростите выражение $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - 2$ при $x < 1$.

3.76. Длина экватора составляет около 40 076 км. Переведите длину экватора в метры, запишите полученное число в стандартном виде и определите порядок числа.

3.77. Представьте в виде произведения:

а) $m^3 + mn^2 + 13m^2n + 13n^3$;

б) $a^2b^2 + 5a^2b - 5ab - ab^2$.

3.78. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3x - 13}{4} \leqslant \dfrac{x - 1}{4} - \dfrac{7}{8}, \\ 2 \geqslant \dfrac{x}{4} + \dfrac{3 - 2x}{3}. \end{cases}$

3.79. Клиент оператора мобильной связи делает выбор между двумя тарифами. Оба тарифа предполагают ежемесячную абонентскую плату и оплату каждой минуты разговора. По тарифу *A* нужно платить 15 р. в месяц и 10 к. за минуту. По тарифу *B* — 10 р. в месяц и 15 к. за минуту. Какой тариф выгоднее, если клиент планирует разговаривать по телефону:

а) 80 минут в месяц; б) 150 минут в месяц?

Сколько минут в месяц нужно разговаривать, чтобы итоговая сумма была одинаковой для обоих тарифов?

3.80. Упростите выражение

$$\left(\sqrt{21} + \sqrt{14} - 2\sqrt{35}\right) \cdot \frac{1}{7}\sqrt{7} + \sqrt{20}.$$

3.81. (*Задача Л. Эйлера.*) Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он заплатил по 31 талеру, за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и сколько быков купил чиновник?

§ 14. Монотонность, промежутки знакопостоянства квадратичной функции

3.82. Для функции $f(x) = x^2 + 2$ сравните:

а) $f(-3)$ и $f(-2)$; б) $f(2)$ и $f(3)$.

3.83. Для функции $f(x) = x^2 - 4$ сравните с нулем:

а) $f(-1)$; б) $f(-2)$; в) $f(2)$; г) $f(4)$.

3.84. Верно ли, что значения функции $y = f(x)$ положительны для всех значений аргумента:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = x^2 - 1$; в) $f(x) = -x^2 + 1$?

Двое друзей изучали свойства квадратичной функции. Один из них утверждал, что, не выполняя вычислений, может доказать, что $f(5{,}2145) > f(3{,}987)$, а $f(-1{,}23) > f(1{,}59)$, если задана функция $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$. «Какое свойство квадратичной функции применяется?» — заинтересовался его друг.

Построим график функции $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$ (рис. 66).

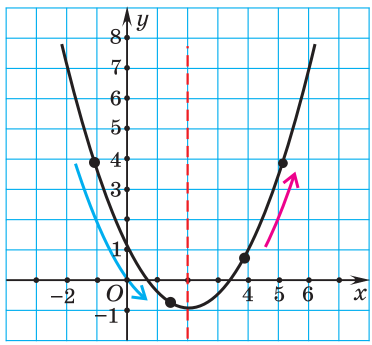


Рис. 66

На оси абсцисс точка 5,2145 расположена правее точки 3,987, и обе они расположены правее точки 2. Точки графика, расположенные правее вершины (2; –1), с увеличением значений абсцисс «поднимаются вверх», точнее, значения ординат этих точек (значения функции) увеличиваются с увеличением значений аргумента. Так как $5{,}2145 > 3{,}987 > 2$, то $f(5{,}2145) > f(3{,}987)$.

Таким образом, для функции $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$ при $x > 2$ большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Говорят, что данная функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ или что $[2; +\infty)$ — **промежуток возрастания функции.**

Определение

Функция возрастает на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка **большему значению** аргумента соответствует **большее значение** функции.

На промежутке $(-\infty; 2]$ точки графика «опускаются вниз» при увеличении значений их абсцисс, т. е. с увеличением значений аргумента на этом промежутке значения функции уменьшаются.

Определение **Функция убывает** на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка **большему значению** аргумента соответствует **меньшее значение** функции.

Так, для функции $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$ верно, что $f(-1{,}23) > f(1{,}59)$, поскольку $-1{,}23 < 1{,}59$, а числа $-1{,}23$ и $1{,}59$ принадлежат промежутку, на котором функция убывает **(промежутку убывания функции)**.

В общем случае для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеем:

если $a > 0$ (ветви параболы направлены вверх), то функция убывает на промежутке $(-\infty; x_в]$ и возрастает на промежутке $[x_в; +\infty)$ (рис. 67, *а*);

если $a < 0$ (ветви параболы направлены вниз), то функция убывает на промежутке $[x_в; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; x_в]$ (рис. 67, *б*).

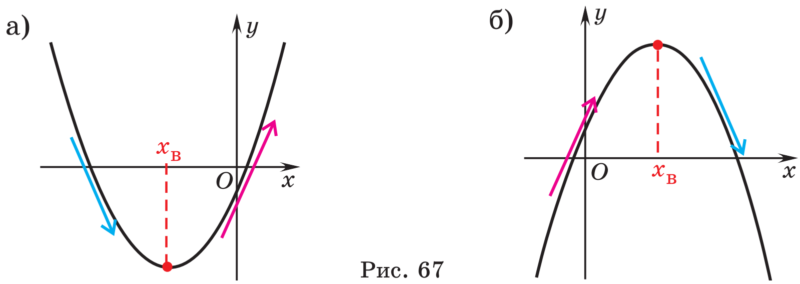


Рис. 67

Пример. Найдите промежутки убывания и возрастания квадратичной функции:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; б) $f(x) = -x^2 + 5$.

Решение. а) Ветви параболы направлены вверх, поскольку $a = 1 > 0$. Найдем абсциссу вершины параболы: $x_в = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$.

Составим таблицу изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f(x)$, $a > 0$	↘ ↗

Функция $f(x) = x^2 - 4x + 3$ убывает на промежутке $(-\infty; 2]$ и возрастает на промежутке $[2; +\infty)$.

б) Ветви параболы направлены вниз ($a = -1 < 0$) и $x_в = 0$. Составим таблицу изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$, $a < 0$	↗ ↘

Функция $f(x) = -x^2 + 5$ убывает на промежутке $[0; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания квадратичной функции, нужно:

① Определить абсциссу вершины параболы $x_в = -\dfrac{b}{2a}$.

② Определить знак первого коэффициента.

③ Заполнить таблицу изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента.

x	$-\infty$ $x_в$ $+\infty$
$f(x)$, $a > 0$	↘ ↗

или

x	$-\infty$ $x_в$ $+\infty$
$f(x)$, $a < 0$	↗ ↘

④ Записать ответ.
(Если $a > 0$, то функция убывает на промежутке $(-\infty; x_в]$ и возрастает на промежутке $[x_в; +\infty)$;
если $a < 0$, то функция убывает на промежутке $[x_в; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; x_в]$.)

Найдите промежутки возрастания и убывания квадратичной функции

$$y = -2x^2 - 6x + 8.$$

① $x_в = -\dfrac{-6}{2 \cdot (-2)} = -1{,}5$.

② $a = -2 < 0$.

③

x	$-\infty$ $-1{,}5$ $+\infty$
$f(x)$, $a < 0$	↗ ↘

④ *Ответ*: промежуток возрастания $(-\infty; -1{,}5]$;
промежуток убывания $[-1{,}5; +\infty)$.

Промежутки убывания и возрастания функции называются промежутками монотонности функции.

Промежутки знакопостоянства квадратичной функции

Для того чтобы определить, на каком промежутке значения квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ положительны, а на каком отрицательны, воспользуемся ее схематическим изображением.

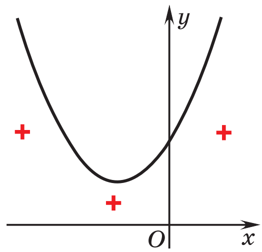


Рис. 68

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 68, принимает только положительные значения при всех значениях аргумента, так как при всех $x \in \boldsymbol{R}$ график этой функции расположен выше оси абсцисс, т. е.

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

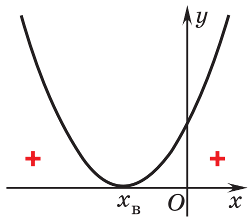


Рис. 69

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 69, принимает только положительные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = x_в$, так как при всех $x \neq x_в$ график функции расположен выше оси абсцисс. Значит,

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty).$$

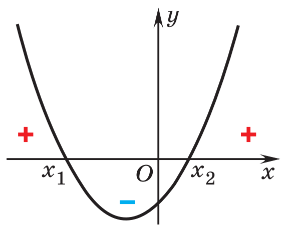


Рис. 70

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 70, принимает положительные значения на открытых числовых лучах $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, отрицательные значения — между нулями функции, т. е. на интервале $(x_1; x_2)$.

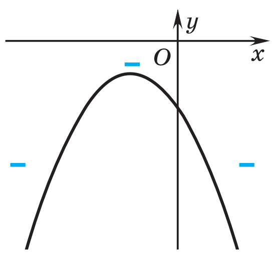


Рис. 71

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 71, принимает только отрицательные значения при всех значениях аргумента, так как при всех $x \in \boldsymbol{R}$ график этой функции расположен ниже оси абсцисс, т. е.

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

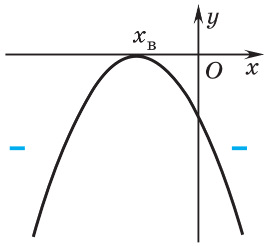


Рис. 72

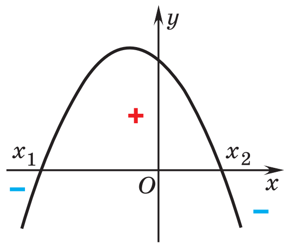


Рис. 73

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 72, принимает только отрицательные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = x_в$, так как при всех $x \neq x_в$ график функции расположен ниже оси абсцисс. Значит,

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty;\ x_в) \cup (x_в;\ +\infty).$$

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 73, принимает положительные значения между нулями функции, т. е. на интервале $(x_1;\ x_2)$. Отрицательные значения эта функция принимает на открытых числовых лучах $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$.

Промежутки, на которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения, называются промежутками знакопостоянства функции.

Монотонность квадратичной функции

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2 - 4x + 3$.

① Найдем абсциссу вершины параболы: $x_в = -\frac{-4}{2} = 2$.

② Определим знак первого коэффициента: $a = 1 > 0$.

③

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f(x)$, $a > 0$	↘ ↗

④ *Ответ*: функция возрастает на числовом луче $[2; +\infty)$ и убывает на числовом луче $(-\infty;\ 2]$.

<table>
<tr>
<td>

2. Найдите промежутки монотонности функции

$y = -5(x + 7)^2 + 1.$

</td>
<td>

① $x_в = -7.$

② $a = -5 < 0.$

③
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad -7 \quad$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$,
$a < 0$</td><td>↗ ↘</td></tr>
</table>

④ *Ответ*: функция убывает на числовом луче $[-7; +\infty)$ и возрастает на числовом луче $(-\infty; -7]$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. На рисунке 74 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Определите промежутки возрастания и убывания этих функций.

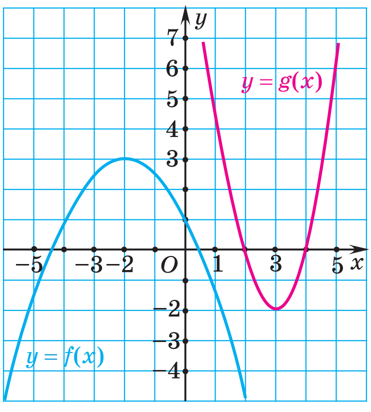


Рис. 74

</td>
<td>

Функции $y = f(x)$ соответствует парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы равна $x_в = -2$. Эта функция возрастает на числовом луче $(-\infty; -2]$ и убывает на числовом луче $[-2; +\infty)$.

Парабола, ветви которой направлены вверх, соответствует функции $y = g(x)$. Так как $x_в = 3$, то функция возрастает на числовом луче $[3; +\infty)$ и убывает на числовом луче $(-\infty; 3]$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

4. Дана функция

$$f(x) = -7(x - 5)^2 - 1.$$

Не выполняя вычислений, расположите в порядке возрастания:

а) $f(9{,}8)$; $f(6{,}2)$; $f(5{,}6)$;

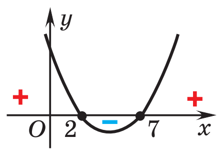
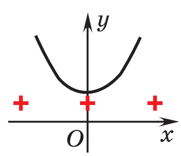
б) $f(-1{,}2)$; $f(2{,}8)$; $f(4{,}9)$.

</td>
<td>

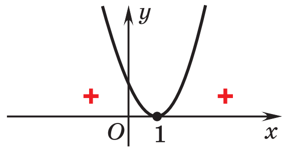
Функция $f(x) = -7(x - 5)^2 - 1$ убывает на числовом луче $[5; +\infty)$ и возрастает на числовом луче $(-\infty; 5]$.

а) Числа 9,8; 6,2 и 5,6 принадлежат промежутку убывания функции, поэтому из того, что $9{,}8 > 6{,}2 > 5{,}6$, следует $f(9{,}8) < f(6{,}2) < f(5{,}6)$.

</td>
</tr>
</table>

	б) Числа –1,2; 2,8 и 4,9 принадлежат промежутку возрастания функции, поэтому из того, что $-1{,}2 < 2{,}8 < 4{,}9$, следует $f(-1{,}2) < f(2{,}8) < f(4{,}9)$.
Промежутки знакопостоянства квадратичной функции	
5. Определите промежутки знакопостоянства функции: а) $y = x^2 - 9x + 14$; б) $y = x^2 + 4$; в) $y = (x - 1)^2$.	а) Построим схему графика функции $y = x^2 - 9x + 14$. Для этого определим нули функции, т. е. решим уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 2$; $x_2 = 7$. Так как $a = 1$, то ветви параболы направлены вверх.  Отрицательные значения функция принимает между нулями функции, т. е. на промежутке (2; 7). Положительные значения функция принимает на открытых числовых лучах $(-\infty; 2)$ и $(7; +\infty)$. б) Построим схему графика функции $y = x^2 + 4$. График не пересекает ось абсцисс, ветви параболы направлены вверх.  Функция принимает положительные значения при всех значениях аргумента $x \in \boldsymbol{R}$.

в) Построим схему графика функции $y = (x - 1)^2$.
График функции имеет с осью абсцисс только одну общую точку $x = 1$, ветви параболы направлены вверх.



Функция принимает положительные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = 1$, т. е. $y > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Соотнесите таблицы изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента с функциями:

а) $f(x) = -3(x+1)^2+2$; б) $g(x) = 3(x-1)^2+2$; в) $h(x) = 3(x-2)^2+1$.

1)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
	↘		↗

2)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
	↗		↘

3)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
	↘		↗

Какие из указанных функций принимают только положительные значения?

3.85. Из данных квадратичных функций выберите функцию, возрастающую на промежутке $(-\infty; 5]$:

а) $f(x) = (x - 5)^2 + 3$; б) $f(x) = (x - 3)^2 + 5$;
в) $f(x) = -(x - 5)^2 + 3$; г) $f(x) = -(x - 3)^2 + 5$.

3.86. Найдите промежутки возрастания и убывания квадратичной функции, используя алгоритм:

а) $y = x^2 - 6x + 4$; б) $y = -x^2 + 8x - 1$;
в) $y = 4x^2 + 12x - 5$; г) $y = -3x^2 - 6x + 8$;
д) $y = 9x^2 - 6x$; е) $y = -5x^2 + 7$.

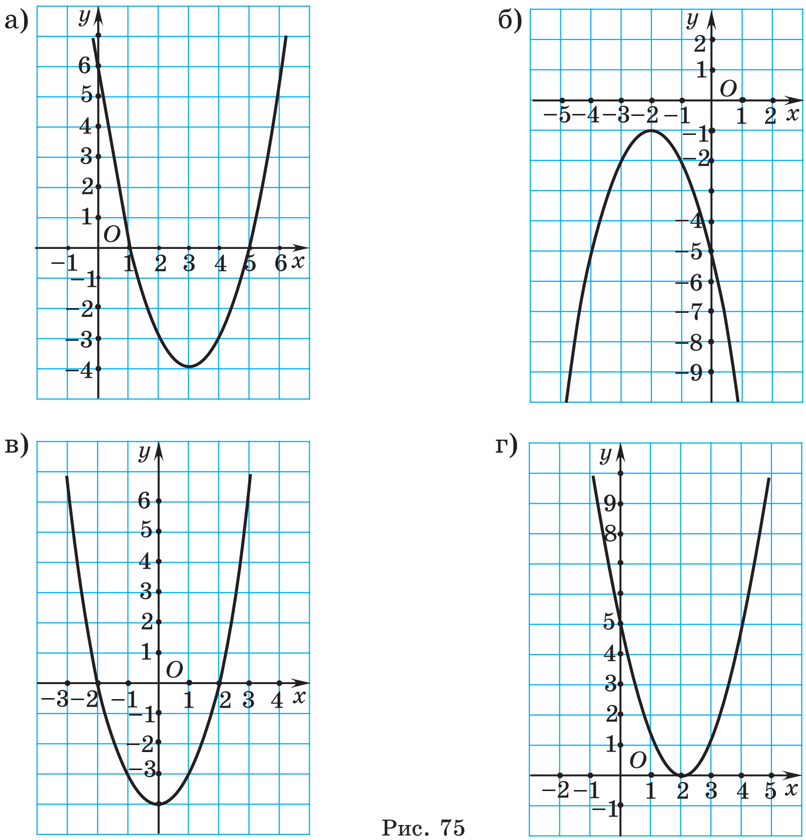


Рис. 75

3.87. Составьте таблицы изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента для квадратичных функций, графики которых изображены на рисунке 75.

3.88. Приведите по два примера квадратичных функций, которые:

а) убывают на промежутке $[8; +\infty)$ и возрастают на промежутке $(-\infty; 8]$;

б) возрастают на промежутке $[-5; +\infty)$ и убывают на промежутке $(-\infty; -5]$.

3.89. Постройте график квадратичной функции и найдите ее промежутки монотонности:

а) $y = (x - 6)^2 - 1$;
б) $y = -2x^2 - 4x + 16$;
в) $y = (x - 1)(x + 5)$;
г) $y = -x^2 + 6x$.

Можно ли найти промежутки монотонности квадратичной функции, не выполняя построения графика?

3.90. Известно, что квадратичная функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $[3; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$. Запишите уравнение оси симметрии графика функции $y = f(x)$.

3.91. Прямая $x = -4$ — ось симметрии параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y = f(x)$. Известно, что ветви параболы направлены вниз. Найдите промежутки монотонности функции $y = f(x)$.

3.92. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x - 7)^2$; б) $y = -2x^2 + 8$; в) $y = -3(x + 2)^2$.

Найдите промежуток убывания функции.

3.93. Из данных квадратичных функций выберите все функции, которые возрастают на промежутке $(-\infty; 2]$:

а) $y = (x - 2)^2 - 1$; б) $y = -7(x - 2)^2 + 4$;

в) $y = -5x^2 + 20x + 3$; г) $y = -x^2 - 2$;

д) $y = x^2 - 2x - 7$; е) $y = -6x^2 + 12$.

Приведите примеры квадратичных функций, которые убывают на промежутке $(-\infty; -2]$.

3.94. Дана функция $f(x) = (x + 6)^2 - 8$. Не выполняя вычислений, сравните:

а) $f(3)$ и $f(5{,}2)$; б) $f(-9)$ и $f(-7)$;

в) $f(-5{,}23)$ и $f(-4{,}72)$; г) $f(-\sqrt{65})$ и $f(-\sqrt{45})$.

3.95. Дана функция

$$g(x) = -x^2 + 8x - 1.$$

Не выполняя вычислений, расположите в порядке убывания:

а) $g(5)$; $g(6{,}2)$ и $g(7{,}4)$;

б) $g(-2)$; $g(1{,}8)$ и $g(-3{,}7)$.

3.96. На рисунке 76 изображен график квадратичной функции $y = f(x)$. Верно ли, что $f(3) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) = 0$, $f(5) < 0$? Запишите несколько значений аргумента, при которых $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.

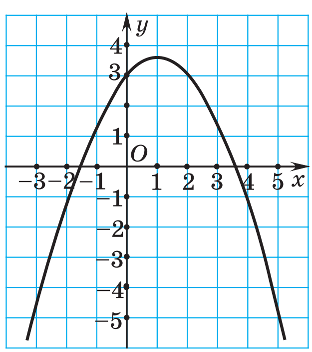


Рис. 76

3.97. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = x^2 - 8x + 7$; б) $y = -2x^2 + 5x - 2$;

в) $y = x^2 + 8x + 16$; г) $y = -3x^2 + x - 5$;

д) $y = -9x^2 - 6x - 1$; е) $y = 2x^2 + 9$.

3.98. Найдите значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения:

а) $y = -(x - 8)^2 + 16$; б) $y = (3x - 1)(x + 5)$;

в) $y = -x^2 + 9$; г) $y = x(x + 5)$.

3.99. Приведите пример квадратичной функции, принимающей положительные значения только на: а) промежутке $(-3; 3)$; б) промежутке $(-1; 5)$; в) промежутках $(-\infty; 1)$ и $(6; +\infty)$.

3.100. Постройте график квадратичной функции $y = -x^2 + 4$. Найдите: а) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения; б) промежуток, на котором функция убывает.

3.101. Постройте график квадратичной функции $f(x) = 2x^2 + 6x$. Найдите: а) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения; б) промежуток возрастания функции; в) множество значений функции; г) все значения аргумента, для которых выполняется неравенство $f(x) \leqslant 0$.

3.102. На рисунке 77 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Запишите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

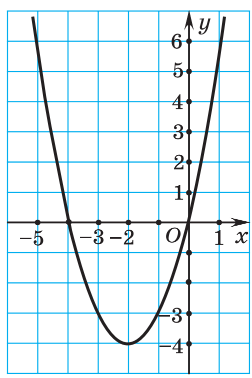


Рис. 77

3.103. Постройте график квадратичной функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ и назовите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

3.104. Приведите пример квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, которая возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и принимает положительные значения при всех значениях аргумента.

3.105. Постройте график квадратичной функции $y = -2(x + 1)^2 + 8$ и назовите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наибольшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

3.106. Приведите пример квадратичной функции $g(x) = ax^2 + bx + c$, которая имеет наименьшее значение в точке $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ и принимает отрицательные значения на промежутке $(-3; 4)$.

3.107. Известно, что ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вниз, а нулями функции являются числа 8 и 32. Найдите промежутки:

а) знакопостоянства функции;
б) монотонности функции.

3.108. Найдите значения числа n, при которых функция $y = -3x^2 + x + n$ принимает только отрицательные значения.

3.109. Известно, что функция $y = 10x^2 + mx + k$ не имеет нулей. Найдите промежутки знакопостоянства функции.

3.110. Найдите значение числа b, при котором промежуток $(-\infty; -2]$ является промежутком убывания функции $y = 3x^2 + bx - 11$.

3.111. Прямая $x = -1$ является осью симметрии параболы $f(x) = ax^2 + (a^2 - 8)x - 2$, ветви которой направлены вниз. Найдите промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$.

3.112. При каком значении числа a график квадратичной функции $y = ax^2 - 4x + 5$ касается оси абсцисс?

3.113. При каком значении числа a одна из точек пересечения параболы $y = x^2 + (a - 4)x + a - 4$ с осью абсцисс лежит правее начала координат, а другая — левее?

3.114. Из данных квадратичных функций выберите функцию, которая убывает на промежутке $(-\infty;\ 7]$:

а) $f(x) = (x-2)^2 - 7$; б) $f(x) = (x-7)^2 + 2$;
в) $f(x) = -(x-7)^2 + 2$; г) $f(x) = (x+7)^2 - 3$.

3.115. Найдите промежутки возрастания и убывания квадратичной функции, используя алгоритм:

а) $y = x^2 + 10x - 3$; б) $y = -5x^2 - 15x + 7$;
в) $y = 4x^2 - 5$; г) $y = -8x^2 + 2x$.

3.116. Постройте график квадратичной функции и найдите ее промежутки монотонности:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; б) $y = -2(x+3)^2 + 8$;
в) $y = (x-3)(x+1)$; г) $y = -x^2 + 4x$.

3.117. Известно, что квадратичная функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty;\ -6]$ и возрастает на промежутке $[-6;\ +\infty)$. Запишите уравнение оси симметрии графика функции $y = f(x)$.

3.118. Постройте график квадратичной функции и найдите промежуток возрастания функции:

а) $y = (x+2)^2$; б) $y = -x^2 + 1$; в) $y = -2(x-3)^2$.

3.119. Из данных квадратичных функций выберите все функции, которые убывают на промежутке $[-1;\ +\infty)$:

а) $y = (x-1)^2 - 2$; б) $y = -(x+1)^2 + 3$;
в) $y = -x^2 + 1$; г) $y = -x^2 - 2x - 6$.

Приведите пример квадратичной функции, которая возрастает на промежутке $(-\infty;\ 1]$.

3.120. Дана функция $f(x) = (x-4)^2 + 5$. Не выполняя вычислений, сравните:

а) $f(5)$ и $f(6)$; б) $f(2)$ и $f(3)$; в) $f(-2{,}4)$ и $f(3{,}75)$.

3.121. Дана функция $g(x) = -3x^2 - 12x + 2$. Не выполняя вычислений, расположите в порядке возрастания:

а) $g(-3)$; $g(-4{,}8)$ и $g(-6{,}5)$; б) $g(10)$; $g(18)$ и $g(15)$.

3.122. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = x^2 + 2x - 8$; б) $y = -3x^2 + 10x - 3$;
в) $y = x^2 - 4x + 4$; г) $y = -2x^2 + 3x - 7$.

3.123. Найдите значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения:

а) $y = (x - 1)^2 - 9$; б) $y = (x + 9)(3 - 2x)$;

в) $y = x^2 - 4$; г) $y = x(5 - x)$.

3.124. Приведите пример квадратичной функции, принимающей отрицательные значения только на: а) промежутке $(-5; 5)$; б) промежутках $(-\infty; 4)$ и $(7; +\infty)$.

3.125. Постройте график квадратичной функции $y = -x^2 + 2x$. Найдите: а) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения; б) промежуток, на котором функция возрастает.

3.126. Постройте график квадратичной функции $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ и назовите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

3.127. Постройте график квадратичной функции $y = -(x - 5)^2 + 1$ и назовите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наибольшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

3.128. Найдите значение числа m, при котором функция $y = 2x^2 - 3x + m$ принимает только положительные значения.

3.129. Выполните действия: $1\frac{5}{36} + 0{,}07 : (0{,}85 \cdot 0{,}4 - 0{,}4)$.

3.130. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^{13} \cdot (5^{10})^2}{5^{31}}$; б) $\frac{12^8}{27^2 \cdot 2^{15}}$.

3.131. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{14}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{11}{5 - \sqrt{3}}$.

3.132. Решите неравенство $(0{,}2x - 3)^2 \geqslant (0{,}1x + 6)(0{,}4x - 1)$.

3.133. Магазин закупил на оптовой базе 100 кг слив по цене 3 р. за килограмм. Во время сортировки выяснилось, что 10 % ягод потеряли товарный вид. Какую минимальную розничную цену должен установить магазин на сливы, чтобы получить не менее 20 % прибыли?

§ 15. Квадратные неравенства

3.134. Решите неравенство:

а) $2x - 6 \leqslant 0$; б) $-7x - 4 > 2$; в) $8 + 2,5x > 0$.

3.135. При каком значении аргумента значения функции $y = 2x - 6$:

а) положительны; б) отрицательны; в) неположительны?

3.136. Если для значений аргумента из некоторого интервала функция принимает только положительные значения, то:
а) график функции на этом интервале расположен выше оси абсцисс;
б) график функции на этом интервале расположен правее оси ординат;
в) положение графика нельзя определить.
Выберите правильный ответ.

Рассмотрим задачу. Государственное предприятие «Бобруйский завод биотехнологий» производит гель для рук «Чистые ручки», максимальное суточное производство 3500 л. Когда производится x сотен литров геля в день, себестоимость продукции рассчитывается по формуле $C(x) = 0,3x^2 - 12x + 640$. Определите объем производства геля, при котором его себестоимость не превышала бы 550 р. за 100 литров.

Так как каждому значению аргумента x, не превышающему 3500 л, соответствует значение $C(x)$, а по условию требуется найти такие значения x, при которых себестоимость не превышает 550 р. за 100 литров, то нужно решить неравенство $C(x) \leqslant 550$, или $0,3x^2 - 12x + 640 \leqslant 550$, или $0,3x^2 - 12x + 90 \leqslant 0$. Полученное неравенство — **квадратное**.

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где $a \neq 0$, называются **квадратными.**

Для того чтобы найти значения переменной, при которых трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает положительные, отрицательные, неположительные или неотрицательные значения, т. е. решить квадратное неравенство, можно использовать свойства функции $y = ax^2 + bx + c$.

Квадратные неравенства

$3x^2 - 10x + 3 > 0$

$x^2 - 5 < 0$

$x^2 + 6x \geqslant 0$

$4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$

Для решения квадратного неравенства достаточно построить схему графика функции $y = ax^2 + bx + c$, определив ее нули.

Рассмотрим примеры решения квадратных неравенств.

Решим неравенство $2x^2 - 5x + 3 > 0$. Для решения неравенства достаточно знать расположение точек графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс. Поэтому найдем нули функции: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$. Отметим их на оси абсцисс.

Определим направление ветвей параболы: $a = 2 > 0$ — ветви направлены вверх.

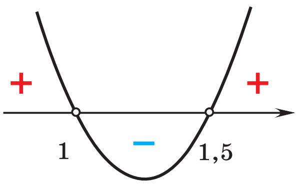


Рис. 78

Построим схему графика функции и определим, при каких значениях аргумента парабола лежит выше оси абсцисс, т. е. $2x^2 - 5x + 3 > 0$ (рис. 78). Получим решение неравенства:

$$x \in (-\infty;\ 1) \cup (1{,}5;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1{,}5;\ +\infty)$.

Решим неравенство $-2x^2 + 5x - 3 > 0$. Умножим обе части неравенства на -1 и получим равносильное неравенство $2x^2 - 5x + 3 < 0$.

Используем схему графика функции $y = 2x^2 - 5x + 3$ и определим, при каких значениях аргумента парабола лежит ниже оси абсцисс (см. рис. 78). Решением неравенства $2x^2 - 5x + 3 < 0$ является интервал $(1;\ 1{,}5)$.

Ответ: $x \in (1;\ 1{,}5)$.

Для решения неравенства $-x^2 + 3x - 4 > 0$ умножим обе его части на -1, получим равносильное неравенство $x^2 - 3x + 4 < 0$. Построим схему графика функции $y = x^2 - 3x + 4$ и определим, при каких значениях аргумента значения функции $y = x^2 - 3x + 4$ отрицательны, т. е. при каких значениях аргумента парабола лежит ниже оси абсцисс. Ветви параболы направлены вверх. Дискриминант уравнения $x^2 - 3x + 4 = 0$

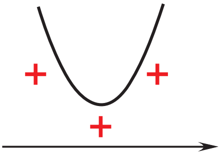


Рис. 79

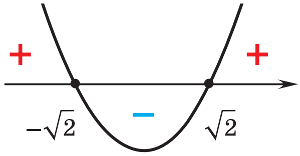


Рис. 80

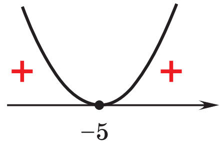


Рис. 81

отрицательный, значит, график функции не пересекает ось абсцисс (рис. 79), парабола лежит выше нее и при всех значениях аргумента значения функции положительны. Таким образом, неравенство $x^2 - 3x + 4 < 0$ не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Решим неравенство $3x^2 - 6 \geqslant 0$. Построим схему графика функции $y = 3x^2 - 6$. Нули функции: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, ветви параболы направлены вверх. Парабола (рис. 80) лежит не ниже оси абсцисс при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$. Значит, объединение этих числовых лучей является решением неравенства.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Решим неравенство $(x+5)^2 \leqslant 0$. Построим схему графика функции $y = (x+5)^2$.

Нуль функции $x = -5$, ветви параболы направлены вверх (рис. 81). Неравенству $(x+5)^2 \leqslant 0$ удовлетворяет только одно значение переменной $x = -5$.

Ответ: $x \in \{-5\}$.

Таким образом, для того чтобы решить квадратное неравенство, достаточно построить схему графика функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ (рис. 82) и в соответствии со знаком неравенства проанализировать расположение графика этой функции относительно оси абсцисс.

Если в квадратном неравенстве первый коэффициент отрицательный, то, умножив обе части неравенства на –1, можно перейти к равносильному неравенству.

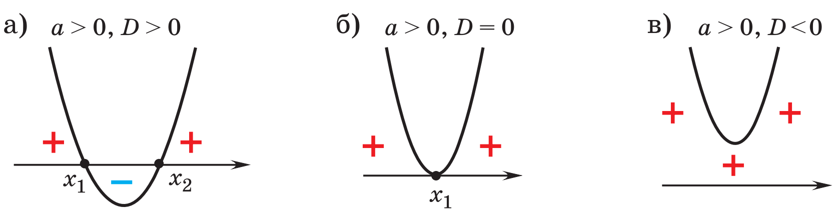
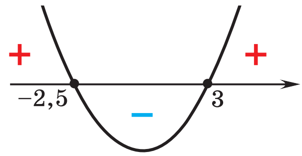
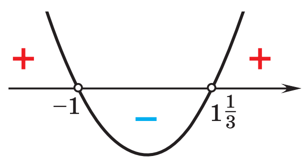
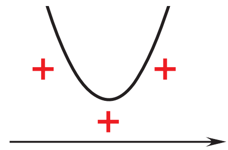
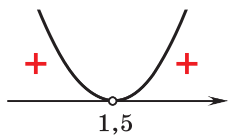


Рис. 82

Чтобы решить квадратное неравенство, можно:

① Построить схему графика функции $y = ax^2 + bx + c$. ② В соответствии со знаком неравенства определить значения переменной x, удовлетворяющие неравенству. ③ Записать ответ.	Решите неравенство $2x^2 - x - 15 \leqslant 0$. ① Нули функции $y = 2x^2 - x - 15$: $x_1 = 3$, $x_2 = -2{,}5$. Ветви параболы направлены вверх ($a = 2 > 0$).  ② Отрицательные значения функция $y = 2x^2 - x - 15$ принимает между нулями. Так как данное неравенство нестрогое, решением неравенства является отрезок $[-2{,}5; 3]$. ③ *Ответ*: $x \in [-2{,}5; 3]$.

Решение квадратных неравенств	
1. Используя алгоритм, решите неравенство $-3x^2 + x + 4 < 0$.	Умножим обе части неравенства на -1, получим равносильное неравенство $3x^2 - x - 4 > 0$. ① Найдем нули функции $y = 3x^2 - x - 4$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$. Ветви параболы направлены вверх ($a = 3 > 0$). 

	② Положительные значения функция $y = 3x^2 - x - 4$ принимает левее меньшего корня или правее большего. ③ *Ответ*: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
2. Решите неравенство: а) $x^2 + 3 > 0$; б) $4x^2 - 12x + 9 > 0$.	а) ① Уравнение $x^2 + 3 = 0$ не имеет корней, т. е. функция $y = x^2 + 3$ не имеет нулей. Ветви параболы направлены вверх.  ② Положительные значения функция $y = x^2 + 3$ принимает при всех значениях аргумента. ③ *Ответ*: $x \in \boldsymbol{R}$. б) ① Найдем нули функции $y = 4x^2 - 12x + 9$. $4x^2 - 12x + 9 = 0$; $(2x - 3)^2 = 0$; $x = 1{,}5$. Ветви параболы направлены вверх.  ② Положительные значения функция принимает при всех значениях x, кроме $x = 1{,}5$. ③ *Ответ*: $x \in (-\infty; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$.

1. Если парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше оси абсцисс, то неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$:
а) имеет одно решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений.
Выберите правильный ответ.

2. Если ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ может:
а) иметь одно решение;
б) не иметь решений;
в) иметь бесконечно много решений.
Выберите правильный ответ.

3.137. Пользуясь определением квадратного неравенства, из данных неравенств выберите квадратные:

а) $8x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$; б) $-3x^2 + 9x - 1 > 0$;
в) $x^2 + 7 \geqslant 0$; г) $6x + 25 \leqslant 0$;
д) $-10x^2 + 7x < 0$; е) $18 - x > 0$.

Приведите по два примера строгих и нестрогих квадратных неравенств.

3.138. На рисунке 83 изображен график функции $y = x^2 - x - 12$. Решите неравенство:

а) $x^2 - x - 12 > 0$;
б) $x^2 - x - 12 \geqslant 0$;
в) $x^2 - x - 12 < 0$;
г) $x^2 - x - 12 \leqslant 0$.

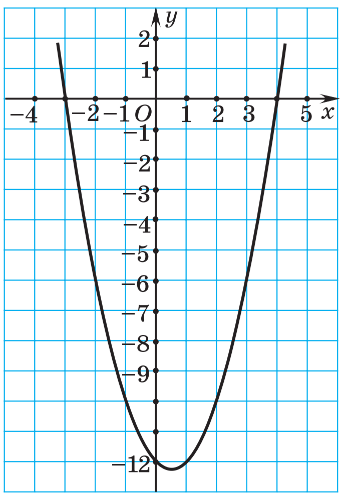


Рис. 83

3.139. Используя схему графика функции $y = x^2 + 6x$, изображенную на рисунке 84, решите неравенство:

а) $x^2 + 6x > 0$; б) $x^2 + 6x \geqslant 0$;
в) $x^2 + 6x < 0$; г) $x^2 + 6x \leqslant 0$.

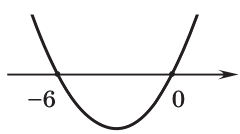


Рис. 84

3.140. Решите квадратное неравенство, используя алгоритм:

а) $x^2 + 5x - 6 > 0$;
б) $x^2 + 2x - 8 < 0$;

в) $6x^2 + x \geqslant 0$; г) $x^2 - 25 \leqslant 0$;
д) $x^2 - 14x + 49 > 0$; е) $9x^2 - 30x + 25 < 0$;
ж) $4x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$; з) $x^2 - x + \frac{1}{4} \leqslant 0$;
и) $2x^2 - 7x + 7 > 0$; к) $5x^2 - x + 7 < 0$;
л) $8x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$; м) $3x^2 - 2x + 9 \leqslant 0$.

3.141. Решите квадратное неравенство:
а) $-3x^2 + 5x + 8 \geqslant 0$; б) $-x^2 + 6x - 8 < 0$;
в) $-5x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$; г) $-x^2 - 6x - 9 < 0$.

3.142. Приведите пример квадратного неравенства, решением которого являются все числа.

3.143. Решите квадратное неравенство:
а) $x^2 - 9 > 0$; б) $4 - x^2 > 0$; в) $-x^2 + 15 \leqslant 0$;
г) $x^2 + 9 > 0$; д) $-2x^2 - 7 \geqslant 0$; е) $8x^2 - 2 > 0$;
ж) $5x^2 \leqslant 0$; з) $-7x^2 < 0$; и) $-3x^2 \leqslant 0$.

3.144. Найдите все значения переменной, при которых двучлен:
а) $-x^2 + 16$ принимает неположительные значения;
б) $-5x^2 - 8$ принимает отрицательные значения.

3.145. Решите квадратное неравенство:
а) $x^2 - 5x < 0$; б) $x^2 + x \geqslant 0$; в) $8x - x^2 > 0$;
г) $x - x^2 \leqslant 0$; д) $2x^2 - 18x \geqslant 0$; е) $0,3x + 9x^2 \leqslant 0$;
ж) $3x - 5x^2 < 0$; з) $x - 9x^2 \geqslant 0$; и) $2x - 0,1x^2 > 0$.

3.146. Найдите все целые решения неравенства:
а) $x^2 + 3x \leqslant 0$; б) $5x^2 + x - 4 \leqslant 0$;
в) $13 - x^2 > 0$; г) $3 + x - 0,25x^2 > 0$.

3.147. Найдите все значения аргумента, при которых функция:
а) $y = -3x^2 + 7x - 4$ принимает отрицательные значения;
б) $y = 5x - x^2 - 4$ принимает неотрицательные значения;
в) $y = 9x - 2x^2$ принимает положительные значения.

3.148. Приведите пример квадратного неравенства, решением которого является:
а) промежуток $[-3; 3]$; б) число 8.

3.149. Решите неравенство:

а) $-10x^2 \leqslant -9x - 1$; б) $x^2 > 4$; в) $x^2 \geqslant -6x$;
г) $4x^2 + 1 > 4x$; д) $3x + 2 \leqslant 2x^2$; е) $2x^2 \geqslant 14$;
ж) $3x + 6 < -4x^2$; з) $x \geqslant x^2$; и) $-x \leqslant 3x^2$.

3.150. Найдите значения переменной, при которых значения трехчлена:

а) $4x^2 + 3x + 5$ не превосходят 6;
б) $\frac{1}{3}x^2 - x + 8$ больше 8;
в) $-3x^2 + 8x + 6$ не меньше $-\frac{2}{3}$.

3.151. Решите неравенство:

а) $x^2 - 2x - 5 < 0$; б) $-6x^2 \leqslant x - 3$;
в) $2x^2 - 3 > 4x$; г) $8x + 3 \geqslant x^2$.

3.152. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2 + x - x^2}$; б) $\sqrt{8x^2 - x}$;
в) $\sqrt{45 - 9x^2}$; г) $\sqrt{5x - 2x^2 - 2}$.

3.153. Приведите два примера квадратных неравенств, не имеющих решений.

3.154. Решите неравенство:

а) $2x^2 + 6x - 1 > x^2 - 2x - 16$;
б) $5x^2 - 12x \leqslant x^2 + 8x - 25$;
в) $12x^2 + 15 \geqslant 11x^2 + 7x - 6$;
г) $2x^2 + 4x - 2 > 5x^2 - 9x + 8$.

3.155. Найдите значения переменной, при которых значения выражения:

а) $3x^2 + 30x + 10$ больше значений выражения $x - x^2 + 3$;
б) $13x^2 - x + 9$ не превосходят значений выражения $7x^2 + 18x - 6$.

3.156. Решите неравенство:

а) $(x + 3)^2 > 4$; б) $(2x - 1)^2 \leqslant 9$;
в) $36 < (x - 6)^2$; г) $(3x + 2)^2 \geqslant 25$.

3.157. На дачном участке планируется построить одноэтажный дом прямоугольной формы, длина которого на 6 м больше ширины. Найдите, какую ширину должен иметь дом, чтобы его площадь была не менее 72 м^2.

3.158. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите неравенство:

а) $2x(x-1) < 3(x+1)$; б) $x(x+1) \geqslant 2(1-2x-x^2)$;

в) $(x-8)(x+5) \geqslant -40$; г) $(x-1)(2x+3) < 3$;

д) $(x-8)(x+2) \leqslant -6x$; е) $(2-x)(3x+1) < 5x-1$.

3.159. Выясните, существуют ли такие значения аргумента, при которых функция $y = x^2 - 12x + 40$ принимает значения меньше 5.

3.160. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения неравенства:

а) $(3x+1)(5x-2) \leqslant 12x^2 + 7x + 1$;

б) $(4x-1)(x+7) < 2x^2 + 29x - 3$;

в) $(x+4)(2x-3) \geqslant (5x-6)(x-3) + 10$;

г) $(x-4)(3x+1) - (2x-6)(x-2) < 4$.

3.161. Траектория ядра, которое толкнул спортсмен под углом к горизонту при сдаче юниорского норматива, есть парабола (рис. 85), уравнение которой $y = -x^2 + 3x + 1{,}2$, где x — это время движения ядра (в секундах), а y — высота его подъема (в метрах) относительно земли. Определите:

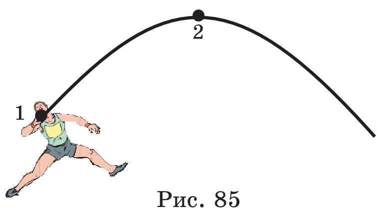


Рис. 85

а) сдал ли он норматив, который составляет 7 м;

б) сколько времени ядро находилось на высоте, меньшей, чем в положении *2*, но большей, чем в положении *1*.

Знаете ли вы, что победителем II Игр стран СНГ в толкании ядра стал Анатолий Хомич?

Используя различные источники информации, найдите сведения о белорусских олимпийских чемпионах.

3.162. Примените формулы сокращенного умножения и решите неравенство:

а) $5(x-1)^2 \leqslant 5 - 6x$; б) $(x+1)^2 - 14 > 5(1+x)$;

в) $(x-2)^2 \geqslant 1 - (x-1)^2$; г) $(x+2)^2 + 13x < (3x-1)^2$;

д) $2(2x+1) - (x-1)(x+1) \geqslant 2(x+1)^2$;

е) $(5x+1)^2 + (1-5x)(5x+1) > 2(x^2+1)$.

3.163. Найдите значения переменной, при которых:

а) значения квадрата двучлена $x + 1$ меньше значений квадрата двучлена $2x - 1$;

б) значения квадрата двучлена $3x - 5$ не превосходят значений квадрата двучлена $x + 7$.

3.164. Докажите, что при всех значениях переменной верно неравенство $-3x^2 + x \leqslant \frac{1}{3}$.

3.165. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2}{10} + 2 \leqslant \frac{9x}{10}$;

б) $\frac{x^2}{3} \geqslant \frac{3x+3}{4}$;

в) $\frac{x^2+2}{14} > \frac{x^2-23}{4}$;

г) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x-5}{4} < \frac{2x}{3}$;

д) $\frac{x^2+2}{6} - \frac{3x-1}{8} \leqslant 1$;

е) $2x^2 - \frac{x+1}{2} < \frac{x-3}{3}$.

3.166. Найдите значения аргумента, при которых значения функции:

а) $y = x^2 - 0{,}25$ больше значений функции $y = \frac{5-2x}{4}$;

б) $y = \frac{x^2}{3}$ не меньше значений функции $y = 2x - 3$.

3.167. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-2)^2}{2} < \frac{2x-4}{3}$;

б) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{4} \leqslant 1 - x$;

в) $\frac{(2x-1)^2}{10} > \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{1-x}{2}$;

г) $\frac{(x-1)^2}{2} + 7\frac{2}{3} \geqslant \frac{(x-7)^2}{4} + \frac{x^2-5x}{3}$.

3.168. Найдите значения k, при которых уравнение $x^2 + kx + 9 = 0$ имеет два корня.

3.169. Найдите значения a, при которых уравнение $x^2 + ax + 16 = 0$ не имеет корней.

3.170. Используя схему графика функции $y = x^2 - 25$, изображенную на рисунке 86, решите неравенство:

а) $x^2 - 25 > 0$;

б) $x^2 - 25 \geqslant 0$;

в) $x^2 - 25 < 0$;

г) $x^2 - 25 \leqslant 0$.

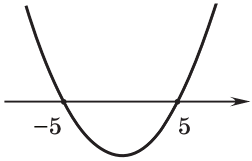


Рис. 86

3.171. Решите квадратное неравенство, используя алгоритм:

а) $x^2 + 6x - 7 \geqslant 0$; б) $x^2 - 3x + 2 < 0$;

в) $x^2 - 7x > 0$; г) $x^2 - 4 \leqslant 0$;

д) $x^2 - 8x + 16 > 0$; е) $9x^2 + 6x + 1 \leqslant 0$;

ж) $8x^2 + 3 \geqslant 0$; з) $3x^2 - x + 9 < 0$.

3.172. Решите квадратное неравенство:

а) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; б) $-x^2 + 4x + 5 < 0$;

в) $x^2 - 1 \geqslant 0$; г) $16 - x^2 > 0$;

д) $3x - 9x^2 > 0$; е) $-2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$;

ж) $7x^2 - x + 1 > 0$; з) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$.

3.173. Найдите все целые решения неравенства:

а) $x^2 - 4x < 0$; б) $x^2 - 5x - 6 \leqslant 0$;

в) $x^2 - 6 < 0$; г) $-4x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$.

3.174. Найдите все значения аргумента, при которых функция:

а) $y = 4 + x^2 - 5x$ принимает положительные значения;

б) $y = 36 - 4x^2$ принимает неотрицательные значения.

3.175. Решите неравенство:

а) $-9x^2 \geqslant -8x - 1$; б) $x^2 < 36$;

в) $x^2 \leqslant 3x$; г) $x^2 + 9 > 6x$;

д) $3x + 7 < -2x^2$; е) $3x^2 \leqslant 15$;

ж) $5x^2 + 1 \geqslant 2x$; з) $7x \leqslant x^2$.

3.176. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 7 < 0$; б) $7x - 1 \leqslant 5x^2$.

3.177. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{10x - 3 - 3x^2}$; б) $\sqrt{5x - 3x^2}$.

3.178. Решите неравенство:

а) $4x^2 - 7x + 7 > 3x^2 - 11x + 52$;

б) $10x^2 + 8x - 2 \leqslant x^2 - 16x - 18$.

3.179. Найдите значения переменной, при которых значения двучлена $6x^2 - 4x$ меньше значений трехчлена $4x^2 + 3x + 9$.

3.180. Решите неравенство:

а) $(x-2)^2 < 1$; б) $(4x-1)^2 \geqslant 9$;

в) $4 > (x+3)^2$; г) $(3x-4)^2 \leqslant 16$.

3.181. Накануне проведения церемонии награждения победителей ежегодного республиканского фестиваля-ярмарки тружеников села «Дожинки» в зале для проведения торжеств расставляют стулья. Число стульев в каждом ряду должно быть на 15 больше, чем число рядов в зале. Найдите максимальное число рядов стульев, которые можно установить, если в зале одновременно можно разместить не более 250 человек.

3.182. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения неравенства:

а) $2(2x^2-7) < -8x-9$; б) $x(x-4) \leqslant 2x-8$;

в) $(x+5)(x-7) \leqslant -35$; г) $(x-8)(x+3) < 1-5x$.

3.183. Решите неравенство:

а) $(x+3)(x-2) \leqslant 6-x^2-x$;

б) $2x(3x+1) > (3x-1)(x+3)$.

3.184. Примените формулы сокращенного умножения и решите неравенство:

а) $(x+4)^2 \geqslant 6x+40$;

б) $(2x+1)^2+2 \leqslant 2(x-3x^2)$;

в) $(3x+1)^2+33 > (2x+5)^2$;

г) $(x-1)(x+1) > x^2+4-(x-5)^2$.

3.185. Найдите значения переменной, при которых значение квадрата двучлена $3x-2$ не превосходит значений выражения $3x^2-10x+8$.

3.186. Докажите, что не существует таких значений переменной, при которых выполняется неравенство $-5x^2+2x > \frac{1}{5}$.

3.187. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2}{2} \leqslant \frac{11x-4}{5}$; б) $\frac{x-1}{3}+\frac{x^2}{5} \geqslant \frac{7}{15}$;

в) $\frac{x^2-5}{2}-\frac{x-8}{5} < 3$; г) $\frac{x^2+6x}{12}-\frac{2x+3}{4} > 6$.

3.188. Найдите значения аргумента, при которых значения функции $y=x^2+2x$ не превосходят значений функции $y=\frac{7x+3}{4}$.

3.189. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x+2)(x+3)}{15}-\dfrac{x-1}{3}>\dfrac{x+3}{5}$; б) $\dfrac{(2x-5)^2}{8}\geqslant 5-3x$;

в) $\dfrac{3-x^2}{4}-\dfrac{x}{3}\geqslant\dfrac{(x-3)^2}{12}$; г) $\dfrac{(x-1)^2}{12}+\dfrac{3x+1}{6}>\dfrac{(x+1)^2}{3}$.

3.190. Найдите такие значения a, при которых уравнение $2x^2+ax+2=0$ имеет два различных корня.

3.191. Найдите значение выражения $\dfrac{\text{НОК}(25, 40)}{\text{НОД}(25, 40)}$.

3.192. Вычислите:

а) $\dfrac{81^{-2}\cdot 3^5}{9^{-2}}$; б) $\dfrac{0{,}125^3\cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

3.193. Решите систему уравнений $\begin{cases}5x+\frac{1}{2}y=-3,\\ -4x-\frac{3}{4}y=1.\end{cases}$

3.194. По кольцевому маршруту курсировали два автобуса с интервалом 50 мин. В связи с введением в эксплуатацию нового жилого района на маршрут планируется вывести еще три автобуса. Каким станет интервал движения после увеличения числа автобусов на маршруте? На сколько процентов сократится интервал движения?

3.195. Разложите на множители:

а) y^3-49y; б) $-3a^2-6ab-3b^2$;

в) $(a-6)^2-9a^2$; г) c^2-b^2-c+b.

3.196. Выполните действия:

а) $\left(3\sqrt{2}-2\right)\left(4\sqrt{2}+7\right)-13\sqrt{2}$; б) $\left(3\sqrt{2}+2\right)^2+\left(6-\sqrt{2}\right)^2$.

3.197. По данным Белстата, численность населения Беларуси на 1 января 2024 г. составляла около 9 156 000 чел., а ее площадь приблизительно равна 207 600 км^2. Найдите плотность населения Беларуси (число жителей, приходящееся на 1 км^2 территории). С помощью справочной литературы найдите информацию о плотности населения в каждой области Беларуси. Представьте полученные результаты в виде столбчатой диаграммы.

§ 16. Системы и совокупности квадратных неравенств

3.198. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -2(x-2{,}5)>0, \\ 2x-(2-x)\leqslant 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x-2{,}6\leqslant 0, \\ x-2(1-3x)\leqslant 0. \end{cases}$

3.199. Найдите решение совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 3x-4\leqslant -15, \\ 2(x-3)>8; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 3x-4\geqslant -15, \\ 2(x-3)<8. \end{array}\right.$

Рассмотрим решение нескольких задач.

Задача 1. Площадь участка для планируемой детской площадки должна быть не меньше 39 м^2 и не больше 144 м^2. Каковы размеры участка, если его длина на 10 м больше ширины?

Решение. Обозначим ширину площадки через x м, тогда ее длина $(x+10)$ м, а площадь $x(x+10)$ м^2. По условию задачи одновременно должны выполняться два условия: $x(x+10)\geqslant 39$ и $x(x+10)\leqslant 144$. Объединим эти условия в систему $\begin{cases} x(x+10)\geqslant 39, \\ x(x+10)\leqslant 144. \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы:

1) $x(x+10)\geqslant 39;$ $x^2+10x-39\geqslant 0;$

$x_1=-13,$ $x_2=3;$ $x\in(-\infty;\ -13]\cup[3;\ +\infty);$

2) $x(x+10)\leqslant 144;$ $x^2+10x-144\leqslant 0;$

$x_1=-18,$ $x_2=8;$ $x\in[-18;\ 8].$

Найдем пересечения множеств решений первого и второго неравенств (рис. 87). Решением системы неравенств является объединение отрезков $[-18;\ -13]\cup[3;\ 8]$.

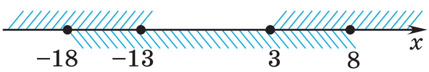


Рис. 87

Условию задачи удовлетворяют только положительные значения x, т. е. $x\in[3;\ 8]$.

Ответ: ширина площадки может изменяться от 3 до 8 м, а соответствующие значения длины — от 13 до 18 м.

Задача 2. При планировании зала для конференций, рассчитанного не более чем на 360 мест, проектной организации нужно было учесть следующие условия: количество рядов должно быть или на два меньше, чем количество мест в ряду, или на 9 больше. Какое количество рядов может быть в зале, если их должно быть не меньше 10?

Решение. Обозначим количество рядов в зале через x. По первому условию получим $x(x+2) \leqslant 360$, по второму условию — $x(x-9) \leqslant 360$. Так как должно выполняться либо первое, либо второе условие, то объединим оба условия в совокупность $\left[\begin{array}{l} x(x+2) \leqslant 360, \\ x(x-9) \leqslant 360. \end{array}\right.$ Решим каждое неравенство совокупности:

1) $x(x+2) \leqslant 360;\ \ x^2+2x-360 \leqslant 0;$
$x_1=-20,\ x_2=18;\ x \in [-20;\ 18];$
2) $x(x-9) \leqslant 360;\ \ x^2-9x-360 \leqslant 0;$
$x_1=-15,\ x_2=24;\ x \in [-15;\ 24].$

Найдем объединение множеств решений первого и второго неравенств (рис. 88). Решением совокупности неравенств является отрезок $x \in [-20;\ 24]$.

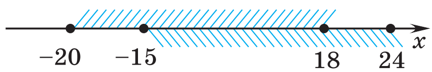
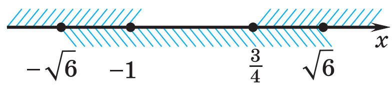


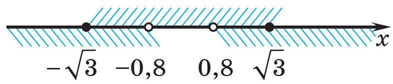
Рис. 88

По условию задачи число рядов должно быть не меньше 10, количество рядов является натуральным числом. Тогда $x \in \{10,\ 11,\ \ldots,\ 24\}$.

Ответ: $x \in \{10,\ 11,\ \ldots,\ 24\}$.

Системы квадратных неравенств	
1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x^2 \geqslant -(x-3), \\ x^2 \leqslant 6. \end{cases}$	Решим каждое неравенство системы: 1) $4x^2 \geqslant -(x-3);$ $4x^2+x-3 \geqslant 0;$ $x_1=-1,\ x_2=\frac{3}{4}$ — нули функции $y=4x^2+x-3$. Решением неравенства $4x^2 \geqslant -(x-3)$ является объединение промежутков $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{3}{4};\ +\infty\right).$ 2) $x^2 \leqslant 6;\ x^2-6 \leqslant 0;$ $x_1=-\sqrt{6},\ \ x_2=\sqrt{6}$ — нули функции $y=x^2-6$.

	Решением неравенства $x^2 - 6 \leqslant 0$ является отрезок $\left[-\sqrt{6};\ \sqrt{6}\right]$. Найдем пересечение множеств решений неравенств системы.  Решение системы неравенств: $\left[-\sqrt{6};\ -1\right] \cup \left[\frac{3}{4};\ \sqrt{6}\right]$. *Ответ*: $\left[-\sqrt{6};\ -1\right] \cup \left[\frac{3}{4};\ \sqrt{6}\right]$.
Совокупности неравенств	
2. Найдите решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} 3x^2 \leqslant 9, \\ 4x^2 > 2{,}56. \end{array}\right.$	Решим каждое неравенство совокупности: 1) $3x^2 \leqslant 9$; $x^2 \leqslant 3$; $x^2 - 3 \leqslant 0$. Нули функции $y = x^2 - 3$: $x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = \sqrt{3}$. Решением неравенства $x^2 - 3 \leqslant 0$ является отрезок $\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$. 2) $4x^2 > 2{,}56$; $x^2 > 0{,}64$; $x^2 - 0{,}64 > 0$. Нули функции $y = x^2 - 0{,}64$: $x_1 = -0{,}8$; $x_2 = 0{,}8$. Решением неравенства $x^2 - 0{,}64 > 0$ является объединение промежутков: $(-\infty;\ -0{,}8) \cup (0{,}8;\ +\infty)$.

	Найдем объединение множеств решений первого и второго неравенств.  Объединением множеств является вся числовая прямая. *Ответ*: $x \in \boldsymbol{R}$.

1. Может ли решением системы квадратных неравенств быть пустое множество?

2. Может ли решением системы квадратных неравенств быть множество, состоящее из одного числа?

3. Может ли решением совокупности квадратных неравенств быть множество, состоящее из одного числа?

3.200. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x - 5 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - x - 20 \leqslant 0, \\ x^2 + 3x - 18 \geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 7x - 8 \leqslant 0, \\ x^2 + 8x + 12 < 0. \end{cases}$

3.201. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y = x^2 + x$ принимает отрицательные значения, а функция $y = -x^2 + 2x + 3$ принимает неотрицательные значения.

3.202. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - x - 4 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 \geqslant 0, \\ x - 1 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 > 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 \leqslant 0, \\ 4 - 5x > 0. \end{cases}$

3.203. Найдите все значения аргумента, при которых и функция $y = 2x^2 + 9x + 4$, и функция $y = 6 - 5x$ принимают неотрицательные значения.

3.204. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 8x \leqslant 0, \\ x^2 + 3x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 25 > 0, \\ x^2 - 49 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x \leqslant 0, \\ 4x^2 - 9 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 5 \leqslant 0, \\ x^2 + x \geqslant 0. \end{cases}$

3.205. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = -x^2$ расположен выше прямой $y = -9$ и ниже прямой $y = -1$.

3.206. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 24 \leqslant 0, \\ x^2 \geqslant 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + x - 3 \leqslant 0, \\ -x^2 < 2x. \end{cases}$

3.207. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{-x^2 + 3x + 4} + \sqrt{2 - x}$; б) $\sqrt{36 - x^2} - \sqrt{2x - 12}$.

3.208. В лекционной аудитории число рядов на 8 больше, чем число мест в одном ряду, при этом общее число мест в аудитории не превосходит 105, а число рядов не меньше 9. Каково наибольшее возможное число рядов в этой аудитории?

3.209. Найдите число целых решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ \dfrac{x - 1}{4} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{4} + \dfrac{x + 2}{6} < 1, \\ 9 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

3.210. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} -2x + 3 \geqslant 3(x + 2), \\ -x^2 - 4x > 0. \end{cases}$

3.211. Решите двойное неравенство, заменив его системой неравенств:

а) $0 \leqslant x^2 + 8x < 9$; б) $3 < x^2 - 8x + 23 \leqslant 16$;

в) $2x < x^2 - 24 < 10x$; г) $2x - 1 < x^2 \leqslant 4x - 3$.

3.212. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases}(x+2)^2 \leqslant (2x-3)^2 - 8(x-5),\\ x^2 - x - 42 < 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x-2)^2 < (2x+3)^2 - 8(x+5),\\ x^2 + x - 42 \leqslant 0.\end{cases}$

3.213. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 2x - 8 > 0,\\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 2x - 35 \geqslant 0,\\ x^2 + 10x + 9 > 0;\end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 4x \geqslant 0,\\ x^2 - x - 6 < 0;\end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l}x^2 > 25,\\ x^2 - 6x + 5 \leqslant 0.\end{array}\right.$

3.214. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = x^2 - x$ расположен выше прямой $y = 20$ или ниже прямой $y = 12$.

3.215. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2 + x - 6 \geqslant 0,\\ x^2 + 2x + 7 < 0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 4x + 3 < 0,\\ 2x^2 + x + 1 \geqslant 0.\end{array}\right.$

3.216. Для прохождения практики студент может выбрать любой из двух графиков: число дней в неделю на 1 меньше, чем число часов работы в один день, или число часов работы на 1 меньше, чем число рабочих дней в неделю. Число рабочих часов должно быть не меньше 30. Сколько рабочих дней может быть у студента на практике?

3.217. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 7x - 8 \geqslant 0,\\ x < 0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}2x^2 + 5x - 3 \leqslant 0,\\ 3 - x > 0;\end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 12x \leqslant 0,\\ 15 - 3x > 0;\end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 4 \geqslant 0,\\ 1 - 2x \leqslant 0.\end{array}\right.$

3.218. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases}x^2 - 5x - 24 > 0,\\ x^2 - 5x - 36 \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2 - 5x - 6 \leqslant 0,\\ x^2 - 3x - 10 > 0.\end{cases}$

3.219. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y = x^2 + x - 6$ принимает неотрицательные значения, а функция $y = -x^2 + 4x$ — положительные значения.

3.220. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 < 0, \\ x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 0. \end{cases}$

3.221. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 6x > 0, \\ x^2 - 2x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 36 < 0, \\ 9x^2 - 1 \geqslant 0. \end{cases}$

3.222. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = 2x^2$ расположен выше прямой $y = 8$ и ниже прямой $y = 18$.

3.223. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geqslant 0, \\ x^2 \leqslant 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 4 \geqslant 0, \\ -x^2 > -4x. \end{cases}$

3.224. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{-x^2 + x + 2} + \sqrt{1 - x}$; б) $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{2x - 10}$.

3.225. Учащиеся 9-х классов решили принять участие в республиканской новогодней благотворительной акции «Наши дети» и подготовили подарки. При этом они заметили, что если подарков будет столько же, сколько конфет в каждом подарке, то число всех конфет не превысит 400, а если конфет в каждом подарке будет на 10 меньше, чем подарков, то число конфет не превысит 144. Каково максимально возможное число подарков?

3.226. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} 2(1 - x) < 7x + 5, \\ 4 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

3.227. Решите двойное неравенство, заменив его системой неравенств:

а) $0 < x^2 - 6x \leqslant 7$; б) $x + 2 < x^2 \leqslant 16$.

3.228. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 \leqslant 0, \\ x^2 - 11x + 28 < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 \leqslant 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0. \end{array}\right.$

3.229. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = -3x^2$ расположен выше прямой $y = -3$ или ниже прямой $y = -12$.

3.230. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x^2 - x + 3 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 \leqslant 0, \\ x^2 + 3x + 7 > 0. \end{array}\right.$

3.231. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 4x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x + 2 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 36 \leqslant 0, \\ 5 - 2x > 0. \end{array}\right.$

3.232. Вычислите:

а) $\sqrt{1\frac{24}{25}} - \frac{1}{7}\sqrt{1{,}96}$; б) $\frac{3\sqrt{6{,}25} - 2\sqrt{3{,}24}}{\sqrt{900}}$.

3.233. Сравните значения выражений $a^{-3} - b^{-3}$ и $(a - b)^{-3}$ при $a = 0{,}5$; $b = 0{,}25$.

3.234. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 + 7x - 18$; б) $5x^2 - 14x - 3$; в) $-25x^2 + 10x - 1$.

3.235. Готовясь к олимпиаде по математике, до которой оставалось 17 дней, восьмиклассник запланировал решать в каждый из оставшихся дней одинаковое количество задач. Решение задач так его увлекло, что он решал ежедневно на 5 задач больше, чем намечал по плану, и поэтому за 5 дней до начала олимпиады попросил у учителя дополнительное задание для подготовки. Сколько задач решал восьмиклассник ежедневно?

3.236. Функция задана формулой $y = -8$. Выберите все верные утверждения:

а) график функции проходит через точку $A(100; -8)$; б) функция не имеет нулей; в) график функции проходит через начало координат; г) график функции симметричен относительно оси ординат; д) график функции не пересекает ось абсцисс.

3.237. Выполните замену переменной и решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

• уметь определять квадратичную функцию в различных формах ее записи;

• уметь находить:
нули квадратичной функции;
промежутки монотонности квадратичной функции;
промежутки знакопостоянства квадратичной функции;
наибольшее или наименьшее значение квадратичной функции;

• знать алгоритм построения графика квадратичной функции и уметь строить параболу по уравнению квадратичной функции, записанному в различных формах;

• знать, какие реальные процессы можно описывать с помощью квадратичной функции;

• знать алгоритм решения квадратных неравенств и уметь решать квадратные неравенства;

• уметь решать системы и совокупности квадратных неравенств.

Я проверяю свои знания

1. Какую функцию называют квадратичной? Из данных функций выберите квадратичные:

а) $y = -x^2 - 8x + 4$; б) $y = x^2 + 2x$; в) $y = -7x^2 - 1$;
г) $y = -4x + 3$; д) $y = -8x^2$; е) $y = x^3 - 4x^2$.

Как называется график квадратичной функции?

2. На рисунке 89 изображен график одной из функций:

а) $y = x - 4$; б) $y = x^2 - 2x - 3$;
в) $y = 3x - 1$; г) $y = -x^2 - x - 3$.

Определите, график какой функции изображен на рисунке.

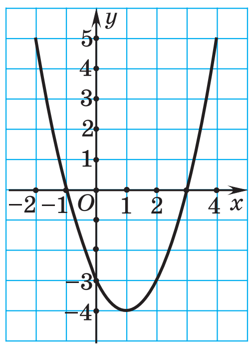


Рис. 89

3. Квадратичная функция задана формулой $f(x) = -x^2 + 5x - 3$. Найдите:

а) $f(0)$; б) $f(2)$; в) $f(-1)$.

4. Определите направление ветвей и найдите координаты вершины параболы:

а) $y = 4x^2 - 8x + 1$; б) $y = -3(x + 6)^2 + 5$;
в) $y = (x - 6)(x + 2)$; г) $y = -5x^2 + 9$.

5. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 11x + 10 \geqslant 0$; б) $4x^2 + 9x + 2 < 0$;

в) $x^2 + x + 6 > 0$; г) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$;

д) $3x^2 - x < 0$; е) $4x^2 - 9 \geqslant 0$.

6. Постройте графики квадратичных функций $f(x) = (x-4)^2 - 1$, $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$ и $h(x) = (x-2)(x+6)$. Для каждой из функций укажите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее (наибольшее) значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции. Можно ли выполнить задания а) — ж) без построения графика?

7. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 < 0, \\ 6x - x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0, \\ x^2 + 3x - 10 \leqslant 0. \end{cases}$

8. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 11x - 6 < 0, \\ x + 4 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 \leqslant 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{array}\right.$

9. Фирма производит от 0 до 60 керамических ваз в день. Прибыль в рублях задается функцией $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, где x — число ваз.

а) Рассчитайте прибыль при продаже 40 ваз.

б) Найдите число изготовляемых ваз, наиболее выгодное для продажи.

10. Найдите значения числа t, при которых уравнение:

а) $2x^2 - tx + 8 = 0$ имеет два корня;

б) $5x^2 + tx + 3 = 0$ не имеет корней.

Практическая математика

1. Если периметр прямоугольного участка земли равен 100 м, то какова его наибольшая площадь?

2. Велосипедист, выезжая из города со скоростью $v_0 = 12\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, начинает разгоняться с постоянным ускорением, модуль которого $a = 2\ \frac{\text{км}}{\text{ч}^2}$, достигая скорости $20\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Зависимость пути s (км) велосипедиста от времени t (ч) его движения за городом определяется выражением $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого велосипедист будет находиться в зоне покрытия сотовой связи, если оператор гарантирует наличие связи в радиусе не более 20 км от города.

3. Мяч брошен вертикально вверх с высоты 1,2 м с начальной скоростью, модуль которой $v_0 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Зависимость высоты подъема мяча над землей h (м) от времени полета t (с) выражается формулой $h = -5t^2 + 10t + 1{,}2$. На какую максимальную высоту поднимется мяч?

4. Во время учений исследуется запуск ракеты в воду. С помощью камеры отмечается высота h, на которой находится ракета в зависимости от времени t (рис. 90). Предполагается, что зависимость высоты h от времени t задается уравнением $h(t) = -\frac{1}{2}g(t - \alpha)^2 + \beta$, где g — ускорение свободного падения, модуль которого можно считать равным $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

а) На какой высоте находится ракета через 1 с? Через 3 с?

б) Найдите h в верхней точке траектории.

в) Найдите значения α и β.

г) Какая функция вида $h(t) = at + b$ может моделировать движение для $t > 3$ с?

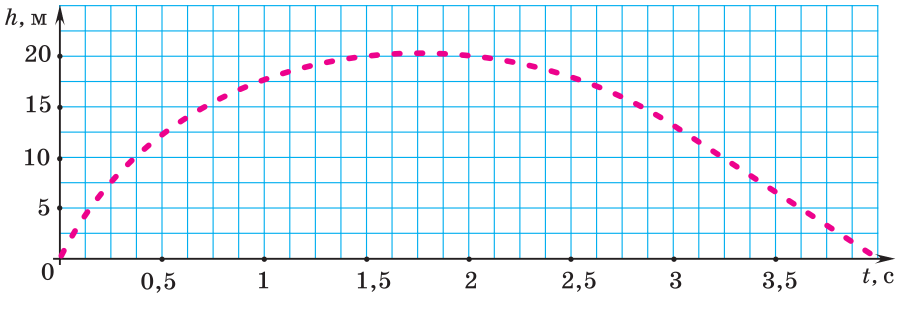


Рис. 90

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание 1. Определите, какие части картинки (рис. 91) соответствуют следующим функциям:

1) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 5,\ x \in [2;\ 8]$;

2) $y = -(x-8)^2 + 7,\ x \in [7{,}5;\ 9]$;

3) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 9,\ x \in [2;\ 8]$;

4) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 + 7,\ x \in [2;\ 8]$;

5) $y = (x-8)^2 + 5,\ x \in [7{,}2;\ 9]$;

6) $y = \frac{4}{9}(x-5)^2 + 4,\ x \in [2;\ 8]$;

7) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 + 3,\ x \in [2;\ 8]$.

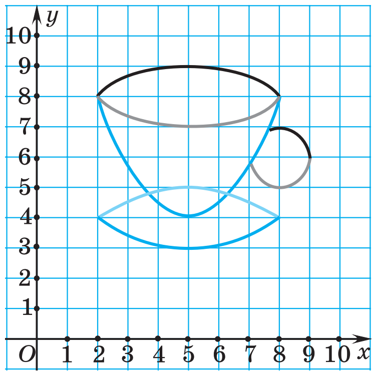


Рис. 91

С помощью графиков постройте свою картинку.

Исследовательское задание 2. Рассмотрим семейство графиков функций $y = -x^2 + kx$, где k может изменяться от -10 до 10 с шагом 1. Отметим вершины парабол красными точками и соединим их плавной линией (рис. 92). Какую гипотезу можно выдвинуть? Почему?

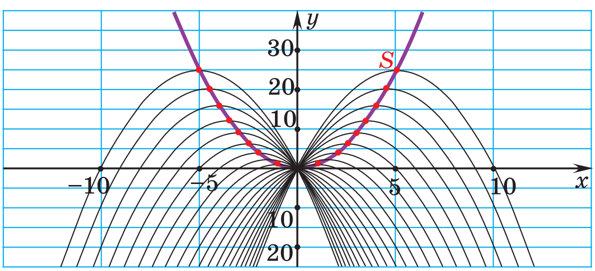


Рис. 92

Готовимся к олимпиадам

1. Участников парада планировали построить так, чтобы в каждом ряду стояло по 24 человека. Однако оказалось, что не все прибывшие смогут участвовать в параде, и их перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше, а число человек в ряду — на 26 больше нового числа рядов. Определите, сколько человек прибыло на парад, зная, что если бы все они участвовали, то их можно было бы перестроить так, чтобы число рядов было равно числу человек в ряду.

2. Известно, что график квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 2x + p$. Докажите, что все такие квадратичные функции имеют одно и то же наименьшее значение.

Интересно знать. *Фаина Михайловна Кириллова* (29 сентября 1931 г., село Зуевка, Россия) — заслуженный деятель науки Республики Беларусь, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор. Ф. М. Кириллова — известный в нашей стране и за ее пределами специалист в теории оптимального управления.

Задачи оптимального управления — это выбор наиболее выгодных режимов управления сложными динамическими объектами. Например, к таким задачам относятся оптимизация траекторий полета самолетов и космических кораблей, улучшение режимов работы роботов, оптимизация ядерных реакторов, выбор программ лечения на основе математических моделей иммунной, сердечно-сосудистой систем.