



ФУНКЦИИ $y = \frac{k}{x}$, ГДЕ $k \neq 0$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$

§ 17. Свойства и график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$

 **4.1.** Если 4 снегоуборочные машины расчищают трассу за 2 ч, то за какое время эту же работу выполнят 6 машин такой же мощности?

4.2. С помощью 10 комбайнов агрофирма планировала убрать урожай за 6 дней. Сколько таких же комбайнов надо добавить, чтобы сократить сроки уборочной на 2 дня?

4.3. В туристическом кемпинге для 24 человек сделан запас продовольствия на 9 дней. На сколько дней хватит этого запаса, если в кемпинг прибудет 36 человек?

 Многие задачи описывают обратно пропорциональную зависимость между величинами. Если одну из переменных величин обозначить через x , а другую — через y , то формула $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, задает функцию, которая называется **обратной пропорциональностью**.

Рассмотрим свойства и график этой функции.

1. Область определения функции. Так как дробь $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех значениях x , кроме нуля,

то $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Графически это означает, что график функции $y = \frac{k}{x}$ не пересекает ось ординат.

2. Множество значений функции. Так как $k \neq 0$, то $\frac{k}{x} \neq 0$, значит, $y \neq 0$, т. е. $E = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Графически это означает, что график функции не пересекает ось абсцисс.

3. Нули функции. Так как $y \neq 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ не имеет нулей.

4. Промежутки знакопостоянства функции. Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

Если $k < 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, $y < 0$ при $x \in (0; +\infty)$.

Обратная пропорциональность

$$y = \frac{k}{x}, \text{ где } k \neq 0$$

5. График функции. Построим график функции $y = \frac{4}{x}$ ($k = 4 > 0$). Выберем несколько значений аргумента и составим таблицу значений функции.

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-1	-2	-4	4	2	1

Отметим полученные точки на координатной плоскости и соединим их двумя плавными линиями (рис. 93). График обратной пропорциональности называется **гиперболой** (от. греч. *hyperbole* — переход, избыток, преувеличение). Гипербола имеет две ветви. Ветви гиперболы симметричны относительно начала координат.

Если $k > 0$, то график обратной пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях.

Построим график функции $y = -\frac{6}{x}$ ($k = -6 < 0$).

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1

Отметим полученные точки на координатной плоскости и соединим их двумя плавными линиями (рис. 94).

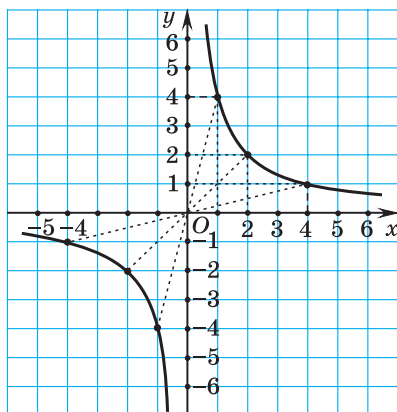


Рис. 93

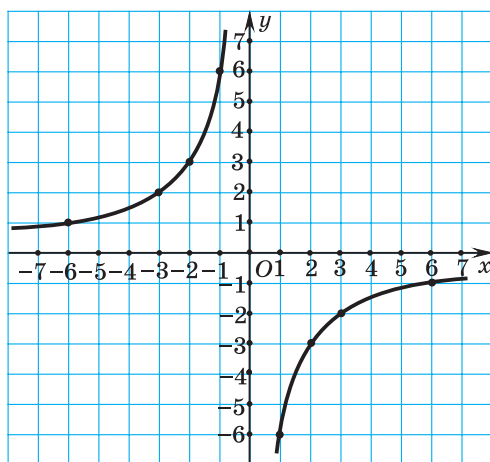



Рис. 94

Если $k < 0$, то график обратной пропорциональности расположен во второй и четвертой координатных четвертях.

6. Промежутки монотонности функции. Если $k > 0$, то с увеличением значений аргумента значения функции уменьшаются на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, т. е. функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то с увеличением значений аргумента значения функции увеличиваются на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, т. е. функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

 Свойства обратной пропорциональности	
<p>1. Является ли функция обратной пропорциональностью:</p> <p>а) $y = \frac{0,4}{x}$;</p> <p>б) $y = -\frac{1}{x}$;</p> <p>в) $y = \frac{x}{5}$?</p>	<p>а) Так как функция $y = \frac{0,4}{x}$ имеет вид $y = \frac{k}{x}$, где $k = 0,4$, то она является обратной пропорциональностью.</p> <p>б) Функция $y = -\frac{1}{x}$ имеет вид $y = \frac{k}{x}$, где $k = -1$, значит, она является обратной пропорциональностью.</p> <p>в) Функция $y = \frac{x}{5}$ является линейной ($y = kx + b$, $k = \frac{1}{5}$, $b = 0$).</p>
<p>2. Какие из следующих функций принимают положительные значения для $x \in (-\infty; 0)$: $y = \frac{1,8}{x}$;</p> <p>$y = -\frac{5}{x}$; $y = \frac{12}{x}$; $y = -\frac{3}{x}$?</p>	<p>Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, принимает положительные значения для $x \in (-\infty; 0)$, если $k < 0$. Это условие выполняется для функций $y = -\frac{5}{x}$ и $y = -\frac{3}{x}$.</p>
<p>3. Сравните:</p> <p>а) $f(3,54)$ и $f(4,24)$, если $f(x) = \frac{15}{x}$;</p> <p>б) $g(10,8)$ и $g(12,9)$, если $g(x) = -\frac{29}{x}$.</p>	<p>а) Функция $f(x) = \frac{15}{x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$. Так как $3,54 < 4,24$ и $\{3,54; 4,24\} \subset (0; +\infty)$, то $f(3,54) > f(4,24)$.</p>

б) Функция $g(x) = -\frac{29}{x}$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку $10,8 < 12,9$ и $\{10,8; 12,9\} \subset (0; +\infty)$, то $g(10,8) < g(12,9)$.

График обратной пропорциональности

4. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $f(x) = -\frac{24}{x}$;

б) $h(x) = \frac{4,5}{x}$?

а) Если $k < 0$, то график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен во второй и четвертой координатных четвертях, значит, в этих четвертях расположен график функции $f(x) = -\frac{24}{x}$.

б) Если $k > 0$, то график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен в первой и третьей координатных четвертях, значит, в этих четвертях расположен график функции $h(x) = \frac{4,5}{x}$.

5. По графику обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ (рис. 95) определите коэффициент k .

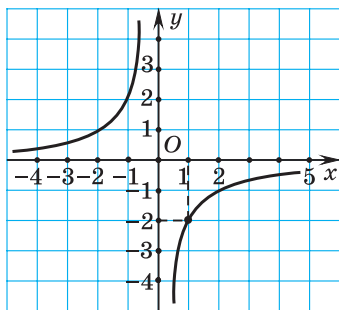


Рис. 95

На гиперболе выберем какую-либо точку и определим ее координаты, например точку $(1; -2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение гиперболы $y = \frac{k}{x}$, получим уравнение $-2 = \frac{k}{1}$, откуда $k = -2$.

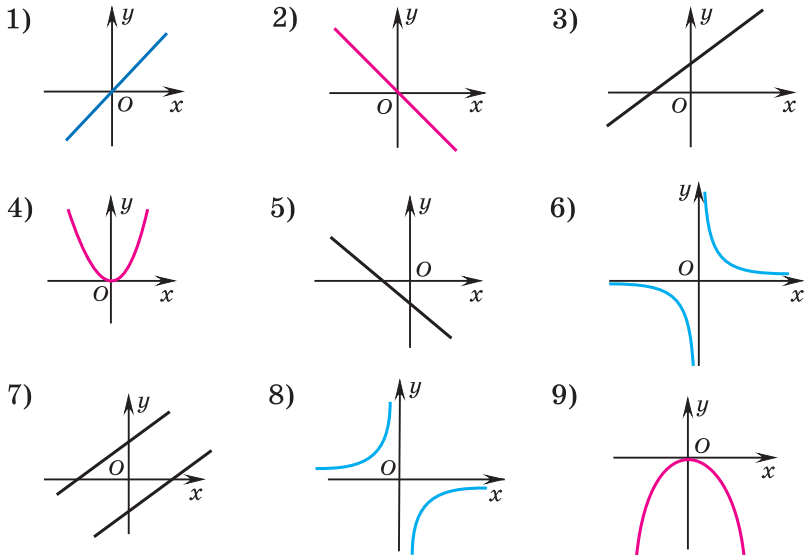


Рис. 96



1. Определите, какие из представленных на рисунке 96 графиков являются гиперболами.

2. Какой из графиков (см. рис. 96) соответствует функции:

а) $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$; б) $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$?



4.4. Выберите функции, графиками которых являются гиперболы:

а) $y = -\frac{11}{x}$;

б) $y = \frac{5}{x}$;

в) $y = \frac{x}{7}$;

г) $y = \frac{x}{9} - 6$;

д) $y = -\frac{1,8}{x}$;

е) $y = x^2 + 1$.

4.5. Для обратной пропорциональности $f(x) = -\frac{10}{x}$ найдите:

а) $f(5)$, $f(-2)$ и $f(-20)$;

б) значение аргумента, при котором $f(x) = -4$.

4.6. Выберите точки, принадлежащие графику обратной пропорциональности $y = \frac{45}{x}$:

а) $A(45; 1)$;

б) $B(-10; -4,5)$;

в) $C(0,1; 4,5)$;

г) $D(-2; 22,5)$;

д) $E(0,45; 100)$;

е) $F(2; 90)$.

4.7. Для каждой из функций $f(x) = -\frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{4,6}{x}$; $h(x) = -\frac{0,3}{x}$ и $p(x) = \frac{39}{x}$ найдите значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения. Приведите пример обратной пропорциональности, принимающей положительные значения при $x \in (0; +\infty)$.

4.8. Обратная пропорциональность задана формулой $f(x) = -\frac{13}{x}$. Сравните:

- а) $f(2)$ и $f(3)$; б) $f(-7)$ и $f(-5)$;
 в) $f(18,4)$ и $f(18,9)$; г) $f(-56,29)$ и $f(-67,48)$.

4.9. Дана функция $g(x) = \frac{29}{x}$. Расположите в порядке убывания:

- а) $g(13)$; $g(23)$; $g(38)$; б) $g(-6,49)$; $g(-6,52)$; $g(-6,78)$.

4.10. Для перевозки различных грузов используют самосвалы МАЗ-650126 различной грузоподъемности, которая зависит от модификации машины. (Грузоподъемность — максимальная масса груза, на перевозку которого рассчитано данное транспортное средство.) Требуется перевезти груз массой 250 т. Установите зависимость между грузоподъемностью машины (m) и числом машин одинаковой грузоподъемности (n), необходимых для перевозки этого груза.

4.11. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{k}{x}$. Найдите коэффициент k , если известно, что:

- а) при значении аргумента, равном 2,5, значение функции равно 0,2; б) график функции проходит через точку с координатами $(-10; 8)$.

4.12. Укажите область определения функции $y = \frac{8}{x}$ и постройте ее график. Возрастает или убывает данная функция при $x < 0$?

4.13. Укажите множество значений функции $y = -\frac{12}{x}$ и постройте ее график. Верно ли, что значения функции отрицательны при $x < 0$? Найдите координаты точек, в которых гипербола $y = -\frac{12}{x}$ пересекается с прямой $y = -4$; $y = 6$.

4.14. Выразите количество тетрадей n , которое можно купить на сумму 20 р., как функцию от цены тетради x (р.), где $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 10$. Постройте график этой функции.

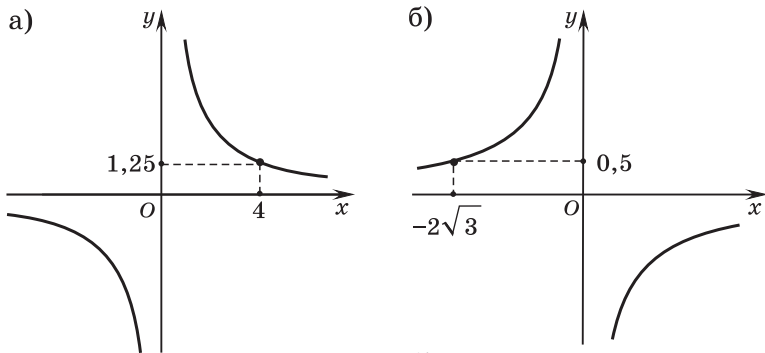


Рис. 97

4.15. По графику обратной пропорциональности (рис. 97) определите коэффициент k .

4.16. Известно, что график обратной пропорциональности проходит через точку $A(3\sqrt{5}; -\sqrt{5})$. Достаточно ли этих данных для построения графика функции? Если да, то постройте этот график.

4.17. Функция задана формулой $f(x) = \frac{7,8}{x}$. Найдите значение выражения:

а) $f(-9,5) + f(9,5)$; б) $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3})$.


Обобщите полученные результаты. Для функции $f(x) = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) найдите $f(a) + f(-a)$, где a — любое действительное число.

4.18. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = \frac{6}{x}$ и $y = -x + 5$; б) $y = \frac{4}{x}$ и $y = x$.

4.19. Для каждой из обратных пропорциональностей, графики которых изображены на рисунке 98, найдите коэффициент k . Определите, какому из данных графиков принадлежит точка $(-64; -0,25)$.

4.20. График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ расположен в первой и третьей координатных четвертях. Найдите промежутки знакопостоянства и промежутки монотонности данной функции.

 **4.21.** Известно, что график обратной пропорциональности $f(x) = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-13; 59)$.

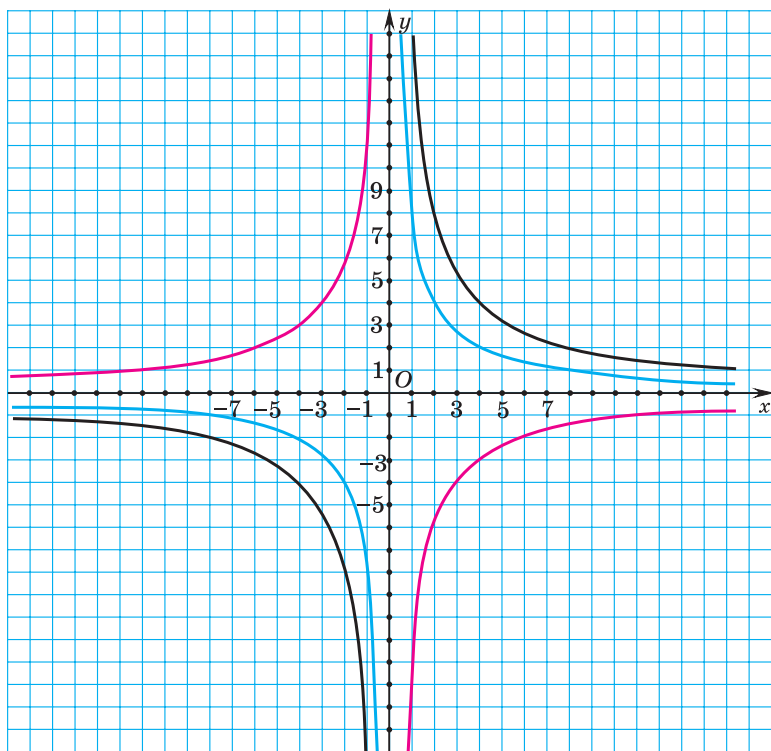


Рис. 98

Определите, имеет ли общие точки гипербола $f(x) = \frac{k}{x}$ и график функции:

- а) $g(x) = \frac{17}{x}$; б) $h(x) = -5x$.


4.22. Найдите координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции $y = -\frac{10}{x}$ и находящихся от оси:

- а) абсцисс на расстоянии, меньшем, чем 0,5;
 б) ординат на расстоянии, большем, чем 100.

4.23. Верно ли, что все точки, для каждой из которых произведение координат равно 18, образуют на координатной плоскости гиперболу?

4.24. Найдите такие значения k и b , при которых графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = kx + b$ проходят через точку:

- а) (3; 1); б) (0,1; -2).

 **4.25.** Определите, сколько точек, у которых абсцисса противоположна ординате, принадлежит графику функции:

а) $y = -\frac{25}{x}$; б) $y = -\frac{3}{x}$.

Найдите координаты всех таких точек. Рациональными или иррациональными числами являются координаты этих точек?

 **4.26.** Постройте график функции:

а) $y = -\frac{6}{|x|}$; б) $y = \frac{8}{|x|}$.



4.27. Выберите функции, являющиеся обратной пропорциональностью:

а) $y = \frac{15}{x}$; б) $y = \frac{x}{9}$; в) $y = -\frac{7}{x}$;
г) $y = \frac{6,2}{x}$; д) $y = -\frac{x}{4} + 1$; е) $y = x^2$.

4.28. Для обратной пропорциональности $f(x) = \frac{14}{x}$ найдите:

- а) $f(-2)$ и $f(3,5)$;
б) значение аргумента, при котором $f(x) = 7$.

4.29. Выберите функцию, графику которой принадлежит точка $A(-0,1; 12)$:

а) $f(x) = -\frac{12}{x}$; б) $g(x) = -\frac{120}{x}$;
в) $h(x) = -\frac{1,2}{x}$; г) $p(x) = \frac{12}{x}$.

4.30. Выберите функции, принимающие положительные значения при $x \in (0; +\infty)$:

а) $f(x) = -\frac{9}{x}$; б) $f(x) = -\frac{5,3}{x}$; в) $f(x) = \frac{17}{x}$;
г) $f(x) = \frac{9,4}{x}$; д) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{x}$; е) $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{x}$.

4.31. Обратная пропорциональность задана формулой $f(x) = -\frac{19}{x}$. Сравните:

а) $f(7)$ и $f(12)$; б) $f(-3,8)$ и $f(-3,9)$.

4.32. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку с координатами $(5; -1,2)$. Найдите коэффициент k .

4.33. Постройте график функции:

а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = -\frac{8}{x}$.

Укажите область определения, множество значений и промежутки знакопостоянства функции.

4.34. Площадь прямоугольного участка земли равна 15 а. Одна из его сторон равна x м. Выразите длину другой стороны участка как функцию от x и постройте график этой функции, выбрав удобные единичные отрезки на осях координат.

4.35. Найдите значение k , при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(12\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Постройте этот график.

4.36. В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = 2x$, найдите координаты их общих точек.

4.37. На рисунке 99 изображен график обратной пропорциональности $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите коэффициент k . Определите, принадлежат ли точки $(-100; 1)$; $(50; -0,5)$ графику данной функции.

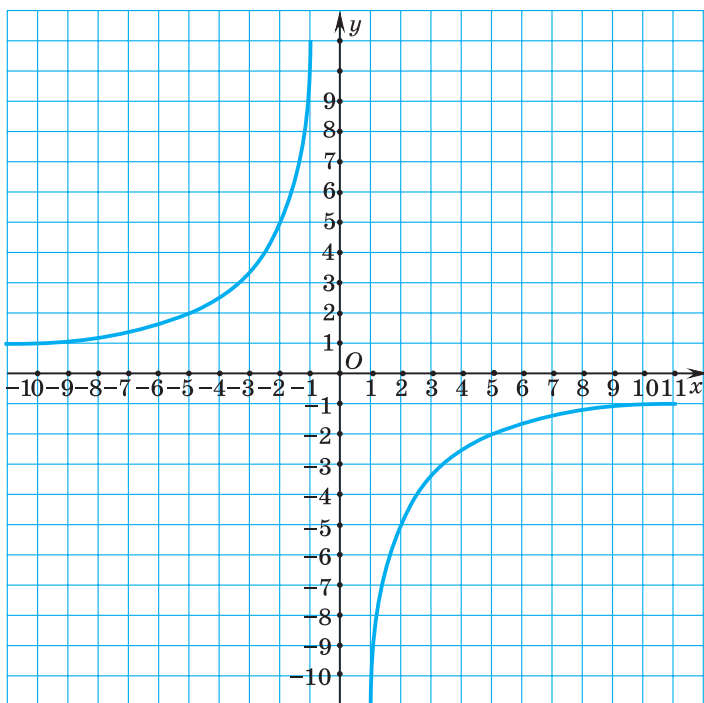




Рис. 99

4.38. Известно, что обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. В каких координатных четвертях расположен ее график? Найдите промежутки знакопостоянства данной функции.

 **4.39.** Определите, сколько точек, у которых абсцисса равна ординате, имеет график функции:

а) $y = \frac{36}{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$.

Найдите координаты всех таких точек.

 **4.40.** Постройте график функции $y = -\frac{15}{|x|}$.



4.41. Расположите в порядке возрастания числа a , a^2 и a^3 , если $a < -1$.


4.42. Найдите значение выражения $\frac{6^{-3} \cdot 2^{-4}}{18^{-2}}$.

4.43. Вычислите: $\frac{|-21| + |-4|}{|24 \cdot |-5|}$.


4.44. Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt{18x^6}$ при $x \leq 0$.

4.45. Друзья подарили однокласснику аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Длина аквариума равна $6\frac{2}{5}$ дм, ширина — $2\frac{1}{4}$ дм, высота — $1\frac{7}{8}$ дм. Сколько полных 4-литровых ведер воды пришлось влить в аквариум, чтобы наполнить его до $\frac{8}{9}$ высоты?

§ 18. Свойства и график функции $y = x^3$

 **4.46.** Найдите объем куба, если длина его ребра равна:
а) 6 см; б) 10 дм; в) x м.

4.47. Найдите значение выражения: 2^3 ; $(-3)^3$; $(\frac{2}{5})^3$; $(-\frac{4}{7})^3$; $(0,1)^3$.

 В математике функции вида $y = x^k$ изучают для различных значений k . Мы уже рассмотрели свойства функции $y = x^2$, $k = 2$ и обратной пропорциональности $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $k = -1$.

Рассмотрим свойства и график функции $y = x^3$.