4.58. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y = x^3$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(6;\ 216)$;
в) $C(-10;\ -1000)$; г) $D(0{,}2;\ -0{,}008)$.

4.59. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните:

а) $f(3{,}6)$ и $f(4{,}8)$; б) $f(-10{,}25)$ и $f(-8{,}26)$;
в) $f\left(\sqrt{11}\right)$ и $f(3)$; г) $f\left(-\sqrt{3}\right)$ и $f\left(-\sqrt{2}\right)$.

4.60. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^3$ и $y = -8$, найдите координаты их общей точки.

4.61. Найдите значение выражения $f(18) + f(-18) - f(-1)$, если $f(x) = x^3$.

4.62. Выполните действия:

а) $\left(5\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^5$; б) $\frac{4^7 \cdot 64}{16^4}$.

4.63. Постоянное пополнение рубрик на национальном образовательном портале (adu.by) считается эффективным, если рубрику читает не менее 50 % посетителей портала. Анкетирование показало, что из 100 700 посетителей портала 41 600 человек читают рубрику «Электронные образовательные ресурсы», 39 250 — рубрику «Профильное обучение», 30 650 — обе эти рубрики. Все остальные посетители портала читают только рубрику «Актуальная информация». Будет ли постоянное пополнение рубрики «Актуальная информация» эффективным?

§ 19. Свойства и график функции $y = |x|$

4.64. Найдите значение выражения $|x|$, если:

а) $x = 1{,}5$; б) $x = -4{,}5$; в) $x = 6{,}5$.

4.65. Найдите значение выражения $|-1| + |2{,}4| + |-4{,}5|$.

Во многих практических задачах ставится вопрос о вычислении расстояния между двумя точками. Для решения таких задач используется понятие модуля числа. Определение модуля числа как расстояния от начала отсчета до точки на координатной прямой, соответствующей этому числу, приводит к правилу: модуль числа равен самому числу, если число неотрицательное, и равен противоположному ему числу, если число отрицательное, т. е. $|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$

Рассмотрим свойства и график функции $y = |x|$.

1. Область определения функции. Так как $|x|$ определяется для любого действительного числа, то областью определения функции $y = |x|$ являются все действительные числа: $D = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции. Так как по определению модуля числа значение выражения $|x|$ неотрицательно для любого числа x, то множеством значений функции $y = |x|$ является множество неотрицательных чисел: $E = [0; +\infty)$.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $|x| = 0$, при $x = 0$, то $x = 0$ есть нуль функции.

4. Промежутки знакопостоянства функции. $y > 0$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

5. График функции. Построим график функции

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Поскольку при $x \geqslant 0$ $|x| = x$, то при $x \geqslant 0$ график функции $y = |x|$ есть часть прямой $y = x$ — луч с началом в точке (0; 0), т. е. биссектриса первого координатного угла.

Так как при $x < 0$ $|x| = -x$, то при $x < 0$ график функции $y = |x|$ есть часть прямой $y = -x$, расположенная во второй координатной четверти.

Объединим части графиков функций $y = x$ при $x \in [0; +\infty)$ и $y = -x$ при $x \in (-\infty; 0)$ и получим график функции $y = |x|$ (рис. 102).

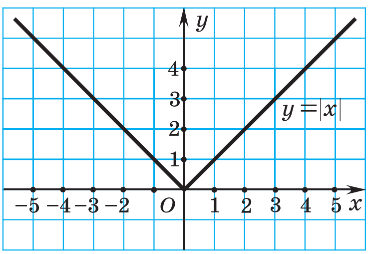

Рис. 102

6. Промежутки монотонности функции. Функция $y = |x|$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

7. Точки графика функции $y = |x|$ **симметричны** относительно оси ординат.

Свойства функции $y = \lvert x \rvert$	
1. Функция задана формулой $f(x) = \lvert x \rvert$. Сравните: а) $f(2,3)$ и $f(-2,3)$; б) $f(-4)$ и $f(0)$.	а) Так как $\lvert 2,3 \rvert = \lvert -2,3 \rvert$, то $f(2,3) = f(-2,3)$; б) $f(-4) > f(0)$, так как $f(-4) = \lvert -4 \rvert = 4$, а $f(0) = \lvert 0 \rvert = 0$.
2. Сколько существует значений аргумента, при которых значение функции $y = \lvert x \rvert$ равно: а) 6,287; б) 0; в) –5,5?	а) Подставим в уравнение $y = \lvert x \rvert$ значение $y = 6,287$, получим $6,287 = \lvert x \rvert$. Это уравнение имеет два корня: 6,287 и –6,287. б) Подставим в уравнение $y = \lvert x \rvert$ значение $y = 0$, получим $0 = \lvert x \rvert$. Это уравнение имеет один корень $x = 0$. в) Подставим в уравнение $y = \lvert x \rvert$ значение $y = -5,5$, получим $-5,5 = \lvert x \rvert$. Это уравнение не имеет корней, так как модуль числа есть число неотрицательное.
График функции $y = \lvert x \rvert$	
3. Определите, принадлежит ли точка графику функции $y = \lvert x \rvert$: а) (3; 3); б) (–4; 4); в) (2; –2); г) (–5; 4).	а) Подставим координаты точки в уравнение $y = \lvert x \rvert$, получим $3 = \lvert 3 \rvert$ — равенство верное, значит, точка (3; 3) принадлежит графику функции $y = \lvert x \rvert$. б) Равенство $4 = \lvert -4 \rvert$ верное, значит, точка (–4; 4) принадлежит графику функции $y = \lvert x \rvert$. в) Равенство $-2 = \lvert 2 \rvert$ неверное, значит, точка (2; –2) не принадлежит графику функции $y = \lvert x \rvert$.

	г) Равенство $4 = \|-5\|$ неверное, значит, точка (–5; 4) не принадлежит графику функции $y = \|x\|$.
4. Сколько точек пересечения имеет график функции $y = \|x\|$ с прямой $y = c$, если: а) $c = 6$; б) $c = 0$; в) $c = -5$?	а) Прямая $y = 6$ параллельна оси абсцисс и проходит через точку (0; 6). Она пересекает график функции $y = \|x\|$ в двух точках. б) Прямая $y = 0$ — ось абсцисс. Она пересекает график функции $y = \|x\|$ в одной точке. в) Прямая $y = -5$ параллельна оси абсцисс и проходит через точку (0; –5). Она не пересекает график функции $y = \|x\|$.

Сколько корней имеют уравнения:

а) $|x| = 4$ и $x^2 = 16$; б) $|x| = 0$ и $x^2 = 0$; в) $|x| = -3$ и $x^2 = -3$?

4.66. Найдите значения функции $y = |x|$ при значении аргумента, равном 1; –1; 0; –3,5; 3,5.

4.67. Для функции $f(x) = |x|$ найдите значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 7$; б) $f(x) = 3{,}9$; в) $f(x) = 0$.

4.68. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y = |x|$:

а) $A(0; 0)$; б) $B(-7; -7)$; в) $C(-1{,}25; 1{,}25)$;

г) $D(11; -11)$; д) $E(28{,}9; 28{,}9)$; е) $N\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

Запишите координаты еще каких-либо двух точек, принадлежащих графику функции $y = |x|$.

4.69. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Сравните:

а) $f(80{,}7)$ и $f(83{,}9)$; б) $f(-5{,}43)$ и $f(-6{,}21)$;

в) $f\left(-\sqrt{7}\right)$ и $f\left(-2\sqrt{2}\right)$; г) $f\left(2\sqrt{5}\right)$ и $f\left(-\sqrt{20}\right)$.

4.70. Дана функция $g(x) = |x|$. Расположите в порядке убывания $g(-2{,}8)$; $g(-3{,}1)$; $g(-4{,}6)$.

4.71. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = |x|$ и $y = \frac{x}{2} + 3$; б) $y = |x|$ и $y = -\frac{4}{x}$;

в) $y = |x|$ и $y = x^2 - 2$.

4.72. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Найдите значение выражения:

а) $f(-10) - f(10) + f(85)$; б) $f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3}) + f(\sqrt{2})$.

Обобщите полученные результаты. Для функции $f(x) = |x|$ найдите $f(a) - f(-a) + f(5)$, где a — любое действительное число.

4.73. Постройте графики функций $y = |x|$ и $y = x^2$. Сравните свойства функций $y = |x|$ и $y = x^2$.

4.74. В разных системах координат постройте графики функций $y = x$; $y = \sqrt{x^2}$ и $y = (\sqrt{x})^2$. Верно ли, что графики всех этих функций различны?

4.75. Для функции $f(x) = |x|$ найдите $f(4)$; $f(-4)$; $f(-0{,}8)$; $f(0{,}8)$.

4.76. Для функции $y = |x|$ найдите все значения аргумента, при которых значение функции равно 5; 0; 48.

4.77. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = |x|$:

а) $A(8;\ -8)$; б) $B(1;\ 1)$;

в) $C(-6{,}2;\ -6{,}2)$; г) $D(-18{,}3;\ 18{,}3)$.

4.78. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Сравните:

а) $f(7)$ и $f(10)$; б) $f(-56{,}32)$ и $f(-58{,}97)$;

в) $f(3\sqrt{3})$ и $f(5)$; г) $f(\sqrt{8})$ и $f(-2\sqrt{2})$.

4.79. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = |x|$ и $y = 5$; б) $y = |x|$ и $y = -x^2 + 6$.

4.80. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Найдите значение выражения:

а) $f(2{,}6) - f(-2{,}6) - f(15)$; б) $-f(2\sqrt{15}) + f(\sqrt{60}) + f(8)$.

4.81. Вычислите:

а) $\frac{(3\sqrt{8})^2}{24}$; б) $6\sqrt{1,21} - 2(\sqrt{2})^2$.

4.82. Найдите количество целых решений неравенства

$$\frac{x^2 + 6x}{6} - \frac{2x + 3}{2} \leqslant 12.$$

4.83. В рамках республиканской акции по благоустройству и озеленению территорий «Цветы добра» учащиеся создавали проекты цветников. Группа восьмиклассников высаживала цветы в городском парке 4 ч, а группа семиклассников — 3 ч. Вместе они высадили 440 цветов. Сколько цветов высадили восьмиклассники, если за 1 ч работы две группы вместе высадили 130 цветов?

§ 20. Свойства и график функции $y = \sqrt{x}$

4.84. Найдите длину стороны квадрата, если его площадь равна:

а) 36 см^2; б) 10 дм^2; в) x м^2.

4.85. Найдите значение выражения $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$.

4.86. Сравните $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ и $2\sqrt{0,25}$.

Зависимость между двумя переменными величинами, при которой каждому значению одной переменной величины x из множества неотрицательных чисел ставится в соответствие значение $\sqrt{x}$, задает функцию $y = \sqrt{x}$.

Рассмотрим свойства и график функции $y = \sqrt{x}$.

1. Область определения функции. Так как по определению квадратного корня из числа $(\sqrt{x})^2 = x$, а $(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$, то аргумент x принимает только неотрицательные значения, т. е. $D = [0; +\infty)$.

2. Множество значений функции. По определению арифметический квадратный корень из числа есть число неотрицательное, т. е. множеством значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество неотрицательных чисел: $E(y) = [0; +\infty)$.