Глава 4

ФУНКЦИИ $y = \frac{k}{x}$, ГДЕ $k \neq 0$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$

§ 17. Свойства и график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$

4.1. Если 4 снегоуборочные машины расчищают трассу за 2 ч, то за какое время эту же работу выполнят 6 машин такой же мощности?

4.2. С помощью 10 комбайнов агрофирма планировала убрать урожай за 6 дней. Сколько таких же комбайнов надо добавить, чтобы сократить сроки уборочной на 2 дня?

4.3. В туристическом кемпинге для 24 человек сделан запас продовольствия на 9 дней. На сколько дней хватит этого запаса, если в кемпинг прибудет 36 человек?

Многие задачи описывают обратно пропорциональную зависимость между величинами. Если одну из переменных величин обозначить через x, а другую — через y, то формула $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, задает функцию, которая называется **обратной пропорциональностью.**

> **Обратная пропорциональность**
>
> $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$

Рассмотрим свойства и график этой функции.

1. Область определения функции. Так как дробь $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме нуля, то $D = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Графически это означает, что график функции $y = \frac{k}{x}$ не пересекает ось ординат.

2. Множество значений функции. Так как $k \neq 0$, то $\frac{k}{x} \neq 0$, значит, $y \neq 0$, т. е. $E = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Графически это означает, что график функции не пересекает ось абсцисс.

3. Нули функции. Так как $y \neq 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ не имеет нулей.

4. Промежутки знакопостоянства функции. Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x \in (0;\ +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$.

Если $k < 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$, $y < 0$ при $x \in (0;\ +\infty)$.

5. График функции. Построим график функции $y = \frac{4}{x}$ ($k = 4 > 0$). Выберем несколько значений аргумента и составим таблицу значений функции.

x	–4	–2	–1	1	2	4
y	–1	–2	–4	4	2	1

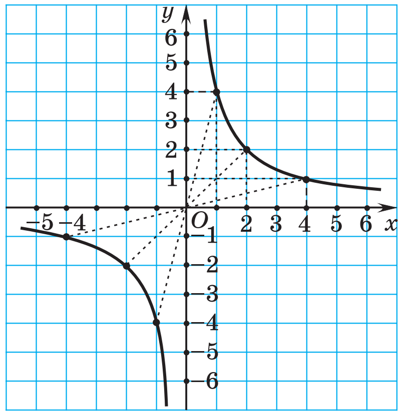


Рис. 93

Отметим полученные точки на координатной плоскости и соединим их двумя плавными линиями (рис. 93). График обратной пропорциональности называется **гиперболой** (от. греч. *hyperbole* — переход, избыток, преувеличение). Гипербола имеет две ветви. Ветви гиперболы симметричны относительно начала координат.

Если $k > 0$, то график обратной пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях.

Построим график функции $y = -\frac{6}{x}$ ($k = -6 < 0$).

x	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
y	1	2	3	6	–6	–3	–2	–1

Отметим полученные точки на координатной плоскости и соединим их двумя плавными линиями (рис. 94).

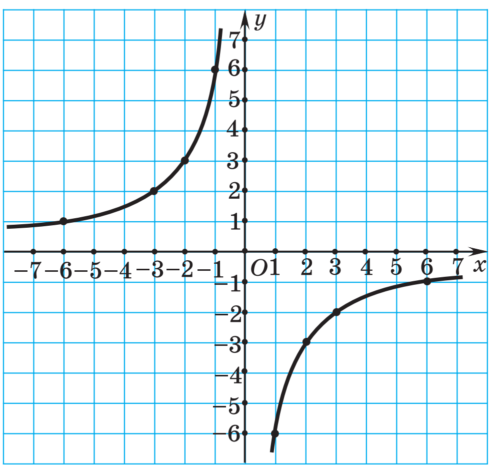


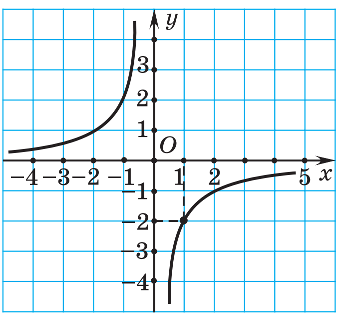
Рис. 94

Если $k < 0$, то график обратной пропорциональности расположен во второй и четвертой координатных четвертях.

6. Промежутки монотонности функции. Если $k > 0$, то с увеличением значений аргумента значения функции уменьшаются на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, т. е. функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то с увеличением значений аргумента значения функции увеличиваются на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, т. е. функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Свойства обратной пропорциональности	
1. Является ли функция обратной пропорциональностью: а) $y = \frac{0{,}4}{x}$; б) $y = -\frac{1}{x}$; в) $y = \frac{x}{5}$?	а) Так как функция $y = \frac{0{,}4}{x}$ имеет вид $y = \frac{k}{x}$, где $k = 0{,}4$, то она является обратной пропорциональностью. б) Функция $y = -\frac{1}{x}$ имеет вид $y = \frac{k}{x}$, где $k = -1$, значит, она является обратной пропорциональностью. в) Функция $y = \frac{x}{5}$ является линейной $\left(y = kx + b,\ k = \frac{1}{5},\ b = 0\right)$.
2. Какие из следующих функций принимают положительные значения для $x \in (-\infty; 0)$: $y = \frac{1{,}8}{x}$; $y = -\frac{5}{x}$; $y = \frac{12}{x}$; $y = -\frac{3}{x}$?	Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, принимает положительные значения для $x \in (-\infty; 0)$, если $k < 0$. Это условие выполняется для функций $y = -\frac{5}{x}$ и $y = -\frac{3}{x}$.
3. Сравните: а) $f(3{,}54)$ и $f(4{,}24)$, если $f(x) = \frac{15}{x}$; б) $g(10{,}8)$ и $g(12{,}9)$, если $g(x) = -\frac{29}{x}$.	а) Функция $f(x) = \frac{15}{x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$. Так как $3{,}54 < 4{,}24$ и $\{3{,}54; 4{,}24\} \subset (0; +\infty)$, то $f(3{,}54) > f(4{,}24)$.

	б) Функция $g(x) = -\frac{29}{x}$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку $10,8 < 12,9$ и $\{10,8; 12,9\} \subset (0; +\infty)$, то $g(10,8) < g(12,9)$.
График обратной пропорциональности	
4. В каких координатных четвертях расположен график функции: а) $f(x) = -\frac{24}{x}$; б) $h(x) = \frac{4,5}{x}$?	а) Если $k < 0$, то график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен во второй и четвертой координатных четвертях, значит, в этих четвертях расположен график функции $f(x) = -\frac{24}{x}$. б) Если $k > 0$, то график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен в первой и третьей координатных четвертях, значит, в этих четвертях расположен график функции $h(x) = \frac{4,5}{x}$.
5. По графику обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ (рис. 95) определите коэффициент k.  Рис. 95	На гиперболе выберем какую-либо точку и определим ее координаты, например точку $(1; -2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение гиперболы $y = \frac{k}{x}$, получим уравнение $-2 = \frac{k}{1}$, откуда $k = -2$.

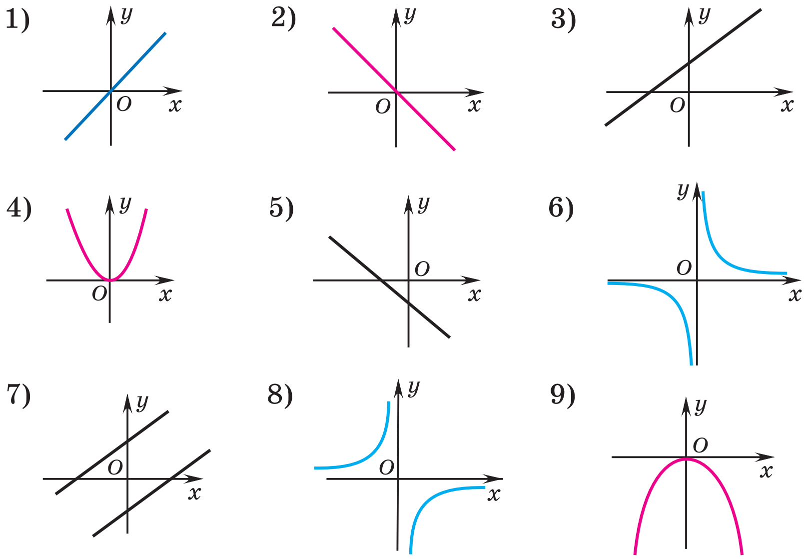


Рис. 96

1. Определите, какие из представленных на рисунке 96 графиков являются гиперболами.

2. Какой из графиков (см. рис. 96) соответствует функции:

а) $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$; б) $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$?

4.4. Выберите функции, графиками которых являются гиперболы:

а) $y = -\frac{11}{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$; в) $y = \frac{x}{7}$;

г) $y = \frac{x}{9} - 6$; д) $y = -\frac{1,8}{x}$; е) $y = x^2 + 1$.

4.5. Для обратной пропорциональности $f(x) = -\frac{10}{x}$ найдите:

а) $f(5)$, $f(-2)$ и $f(-20)$;

б) значение аргумента, при котором $f(x) = -4$.

4.6. Выберите точки, принадлежащие графику обратной пропорциональности $y = \frac{45}{x}$:

а) $A(45;\ 1)$; б) $B(-10;\ -4,5)$; в) $C(0,1;\ 4,5)$;

г) $D(-2;\ 22,5)$; д) $E(0,45;\ 100)$; е) $F(2;\ 90)$.

4.7. Для каждой из функций $f(x) = -\frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{4,6}{x}$; $h(x) = -\frac{0,3}{x}$ и $p(x) = \frac{39}{x}$ найдите значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения. Приведите пример обратной пропорциональности, принимающей положительные значения при $x \in (0; +\infty)$.

4.8. Обратная пропорциональность задана формулой $f(x) = -\frac{13}{x}$. Сравните:

а) $f(2)$ и $f(3)$; б) $f(-7)$ и $f(-5)$;
в) $f(18,4)$ и $f(18,9)$; г) $f(-56,29)$ и $f(-67,48)$.

4.9. Дана функция $g(x) = \frac{29}{x}$. Расположите в порядке убывания:
а) $g(13)$; $g(23)$; $g(38)$; б) $g(-6,49)$; $g(-6,52)$; $g(-6,78)$.

4.10. Для перевозки различных грузов используют самосвалы МАЗ-650126 различной грузоподъемности, которая зависит от модификации машины. (Грузоподъемность — максимальная масса груза, на перевозку которого рассчитано данное транспортное средство.) Требуется перевезти груз массой 250 т. Установите зависимость между грузоподъемностью машины (m) и числом машин одинаковой грузоподъемности (n), необходимых для перевозки этого груза.

4.11. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{k}{x}$. Найдите коэффициент k, если известно, что:
а) при значении аргумента, равном 2,5, значение функции равно 0,2; б) график функции проходит через точку с координатами (–10; 8).

4.12. Укажите область определения функции $y = \frac{8}{x}$ и постройте ее график. Возрастает или убывает данная функция при $x < 0$?

4.13. Укажите множество значений функции $y = -\frac{12}{x}$ и постройте ее график. Верно ли, что значения функции отрицательны при $x < 0$? Найдите координаты точек, в которых гипербола $y = -\frac{12}{x}$ пересекается с прямой $y = -4$; $y = 6$.

4.14. Выразите количество тетрадей n, которое можно купить на сумму 20 р., как функцию от цены тетради x (р.), где $x \in N$, $x \leqslant 10$. Постройте график этой функции.

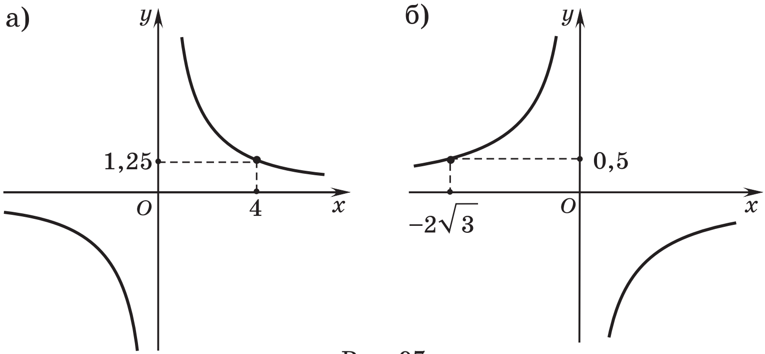


Рис. 97

4.15. По графику обратной пропорциональности (рис. 97) определите коэффициент k.

4.16. Известно, что график обратной пропорциональности проходит через точку $A\left(3\sqrt{5};\ -\sqrt{5}\right)$. Достаточно ли этих данных для построения графика функции? Если да, то постройте этот график.

4.17. Функция задана формулой $f(x) = \frac{7{,}8}{x}$. Найдите значение выражения:

а) $f(-9{,}5) + f(9{,}5)$; б) $f\left(\sqrt{3}\right) + f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Обобщите полученные результаты. Для функции $f(x) = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ найдите $f(a) + f(-a)$, где a — любое действительное число.

4.18. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = \frac{6}{x}$ и $y = -x + 5$; б) $y = \frac{4}{x}$ и $y = x$.

4.19. Для каждой из обратных пропорциональностей, графики которых изображены на рисунке 98, найдите коэффициент k. Определите, какому из данных графиков принадлежит точка $(-64;\ -0{,}25)$.

4.20. График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ расположен в первой и третьей координатных четвертях. Найдите промежутки знакопостоянства и промежутки монотонности данной функции.

4.21. Известно, что график обратной пропорциональности $f(x) = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-13;\ 59)$.

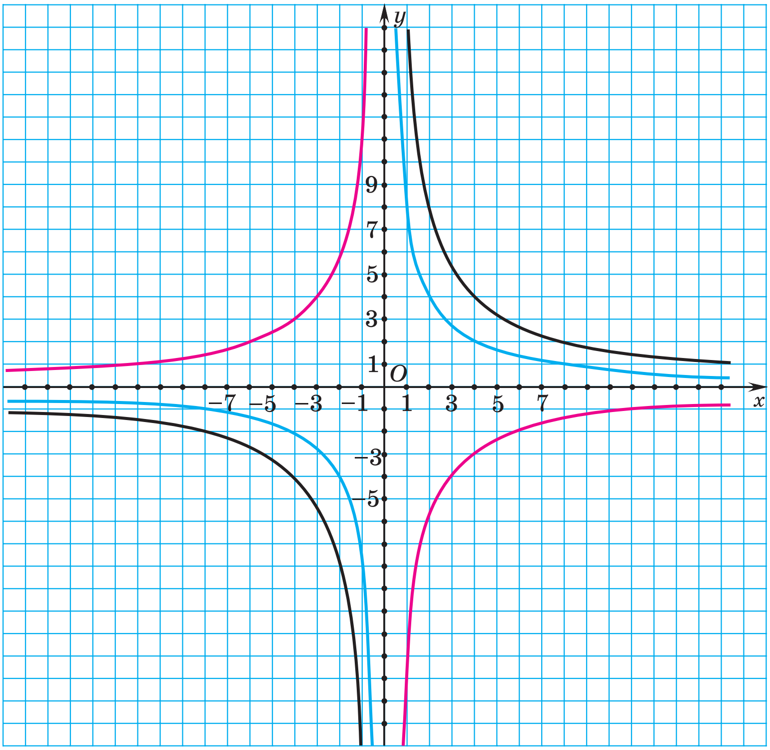


Рис. 98

Определите, имеет ли общие точки гипербола $f(x) = \frac{k}{x}$ и график функции:

а) $g(x) = \frac{17}{x}$; б) $h(x) = -5x$.

4.22. Найдите координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции $y = -\frac{10}{x}$ и находящихся от оси:

а) абсцисс на расстоянии, меньшем, чем 0,5;

б) ординат на расстоянии, большем, чем 100.

4.23. Верно ли, что все точки, для каждой из которых произведение координат равно 18, образуют на координатной плоскости гиперболу?

4.24. Найдите такие значения k и b, при которых графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = kx + b$ проходят через точку:

а) (3; 1); б) (0,1; −2).

4.25. Определите, сколько точек, у которых абсцисса противоположна ординате, принадлежит графику функции:

а) $y = -\frac{25}{x}$; б) $y = -\frac{3}{x}$.

Найдите координаты всех таких точек. Рациональными или иррациональными числами являются координаты этих точек?

4.26. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{6}{|x|}$; б) $y = \frac{8}{|x|}$.

4.27. Выберите функции, являющиеся обратной пропорциональностью:

а) $y = \frac{15}{x}$; б) $y = \frac{x}{9}$; в) $y = -\frac{7}{x}$;

г) $y = \frac{6,2}{x}$; д) $y = -\frac{x}{4} + 1$; е) $y = x^2$.

4.28. Для обратной пропорциональности $f(x) = \frac{14}{x}$ найдите:

а) $f(-2)$ и $f(3,5)$;

б) значение аргумента, при котором $f(x) = 7$.

4.29. Выберите функцию, графику которой принадлежит точка $A(-0,1;\ 12)$:

а) $f(x) = -\frac{12}{x}$; б) $g(x) = -\frac{120}{x}$;

в) $h(x) = -\frac{1,2}{x}$; г) $p(x) = \frac{12}{x}$.

4.30. Выберите функции, принимающие положительные значения при $x \in (0;\ +\infty)$:

а) $f(x) = -\frac{9}{x}$; б) $f(x) = -\frac{5,3}{x}$; в) $f(x) = \frac{17}{x}$;

г) $f(x) = \frac{9,4}{x}$; д) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{x}$; е) $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{x}$.

4.31. Обратная пропорциональность задана формулой $f(x) = -\frac{19}{x}$. Сравните:

а) $f(7)$ и $f(12)$; б) $f(-3,8)$ и $f(-3,9)$.

4.32. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку с координатами $(5;\ -1,2)$. Найдите коэффициент k.

4.33. Постройте график функции:

а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = -\frac{8}{x}$.

Укажите область определения, множество значений и промежутки знакопостоянства функции.

4.34. Площадь прямоугольного участка земли равна 15 а. Одна из его сторон равна x м. Выразите длину другой стороны участка как функцию от x и постройте график этой функции, выбрав удобные единичные отрезки на осях координат.

4.35. Найдите значение k, при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(12\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$. Постройте этот график.

4.36. В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = 2x$, найдите координаты их общих точек.

4.37. На рисунке 99 изображен график обратной пропорциональности $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите коэффициент k. Определите, принадлежат ли точки (–100; 1); (50; –0,5) графику данной функции.

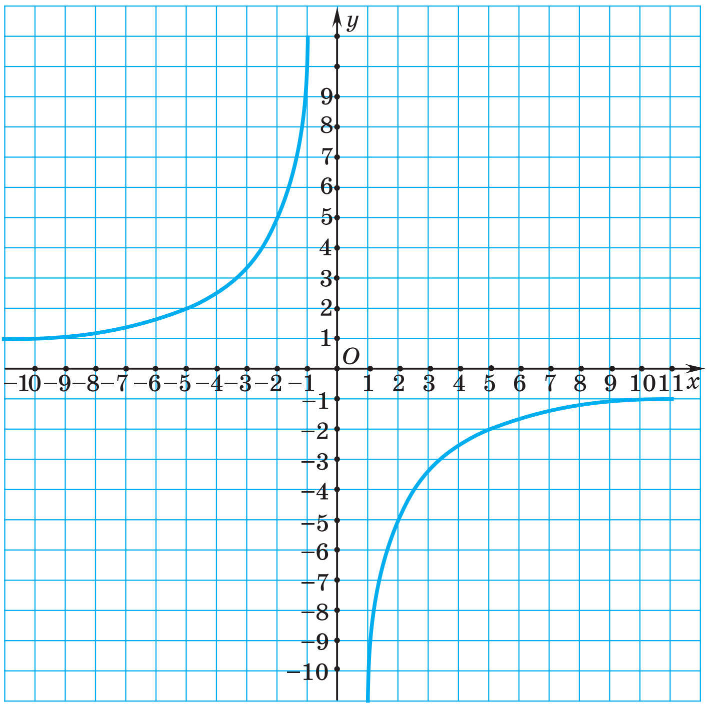


Рис. 99

4.38. Известно, что обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. В каких координатных четвертях расположен ее график? Найдите промежутки знакопостоянства данной функции.

4.39. Определите, сколько точек, у которых абсцисса равна ординате, имеет график функции:

а) $y = \frac{36}{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$.

Найдите координаты всех таких точек.

4.40. Постройте график функции $y = -\frac{15}{|x|}$.

4.41. Расположите в порядке возрастания числа a, a^2 и a^3, если $a < -1$.

4.42. Найдите значение выражения $\frac{6^{-3} \cdot 2^{-4}}{18^{-2}}$.

4.43. Вычислите: $\frac{|-21| + |-4|}{|24| \cdot |-5|}$.

4.44. Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt{18x^6}$ при $x \leqslant 0$.

4.45. Друзья подарили однокласснику аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Длина аквариума равна $6\frac{2}{5}$ дм, ширина — $2\frac{1}{4}$ дм, высота — $1\frac{7}{8}$ дм. Сколько полных 4-литровых ведер воды пришлось влить в аквариум, чтобы наполнить его до $\frac{8}{9}$ высоты?

§ 18. Свойства и график функции $y = x^3$

4.46. Найдите объем куба, если длина его ребра равна:

а) 6 см; б) 10 дм; в) x м.

4.47. Найдите значение выражения: 2^3; $(-3)^3$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; $\left(-\frac{4}{7}\right)^3$; $(0{,}1)^3$.

В математике функции вида $y = x^k$ изучают для различных значений k. Мы уже рассмотрели свойства функции $y = x^2$, $k = 2$ и обратной пропорциональности $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $k = -1$.

Рассмотрим свойства и график функции $y = x^3$.

1. Область определения функции. Так как выражение x^3 является степенью с натуральным показателем, то оно имеет смысл для любого действительного числа x, значит, областью определения функции $y = x^3$ являются все действительные числа: $D = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции. Степень x^3 может принимать положительные и отрицательные значения, быть равной нулю. Множеством значений функции $y = x^3$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$: $E = \boldsymbol{R}$.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $x^3 = 0$, при $x = 0$, то это значение аргумента есть нуль функции.

4. Промежутки знакопостоянства функции. Функция принимает положительные значения ($y > 0$), если $x \in (0; +\infty)$. Функция принимает отрицательные значения ($y < 0$), если $x \in (-\infty; 0)$.

5. График функции $y = x^3$. Для построения графика функции $y = x^3$ составим таблицу значений функции, соответствующих некоторым значениям аргумента.

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–1	0	1	8

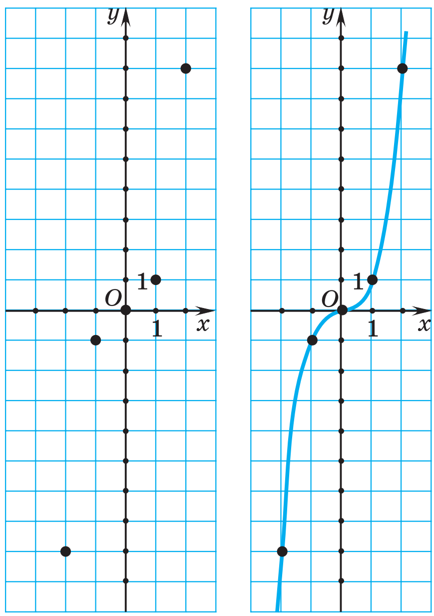


Рис. 100

Соединим точки плавной линией, получим график функции $y = x^3$ (рис. 100). Эта линия называется ***кубической параболой***.

6. Промежутки монотонности функции. С увеличением значений аргумента значения функции увеличиваются, т. е. функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

7. Точки графика функции $y = x^3$ **симметричны** относительно точки $(0; 0)$.

Свойства функции $y = x^3$	
1. Найдите значения функции $y = x^3$, если: а) $x = 0{,}02$; б) $x = -0{,}02$; в) $x = 1{,}2$; г) $x = -1{,}2$.	а) $0{,}02^3 = 0{,}000008$; б) $(-0{,}02)^3 = -0{,}000008$; в) $1{,}2^3 = 1{,}44 \cdot 1{,}2 = 1{,}728$; г) $(-1{,}2)^3 = -1{,}728$.
2. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните: а) $f(2{,}356)$ и $f(2{,}365)$; б) $f(-4{,}006)$ и $f(-4{,}0006)$.	а) Так как функция $f(x) = x^3$ возрастающая для $x \in \boldsymbol{R}$, то из того, что $2{,}356 < 2{,}365$, следует, что $f(2{,}356) < f(2{,}365)$. б) Так как $-4{,}006 < -4{,}0006$, то $f(-4{,}006) < f(-4{,}0006)$, поскольку функция $f(x) = x^3$ возрастающая для $x \in \boldsymbol{R}$.
График функции $y = x^3$	
3. Принадлежит ли графику функции $y = x^3$ точка с координатами: а) $(1;\ 0)$; б) $(1;\ 1)$; в) $(1;\ -1)$; г) $(-1;\ -1)$?	а) Подставим координаты точки в уравнение $y = x^3$, получим $1^3 = 0$ — равенство неверное, значит, точка $(1;\ 0)$ не принадлежит графику функции $y = x^3$. б) Равенство $1^3 = 1$ верное, значит, точка $(1;\ 1)$ принадлежит графику функции $y = x^3$. в) Равенство $1^3 = -1$ неверное, значит, точка $(1;\ -1)$ не принадлежит графику функции $y = x^3$. г) Равенство $(-1)^3 = -1$ верное, значит, точка $(-1;\ -1)$ принадлежит графику функции $y = x^3$.

4. Точка $M(m;\ n)$ принадлежит графику функции $y = x^3$. Какая из точек также принадлежит этому графику: а) $N(-m;\ n)$; б) $K(m;\ -n)$; в) $L(-m;\ -n)$?	Так как график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат, то координаты симметричных точек — противоположные числа. У точки L координаты являются числами, противоположными числам m и n. Таким образом, графику функции $y = x^3$ принадлежит точка L.

Определите, какой из графиков на рисунке 101 является кубической параболой.

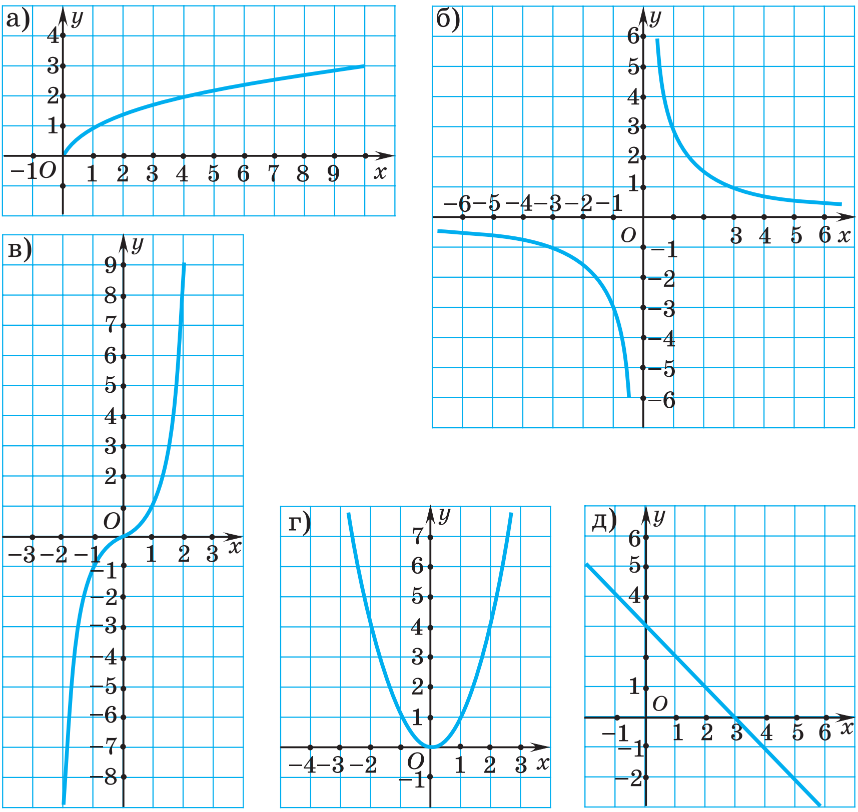


Рис. 101

4.48. Для функции $f(x) = x^3$ найдите $f(0)$; $f(4)$; $f(-5)$; $f(-0{,}01)$; $f(0{,}5)$.

4.49. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 1; 0; –8; $2\sqrt{2}$.

4.50. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = x^3$:

а) $A(-5; -125)$; б) $B(4; -64)$; в) $C(10; 100)$;

г) $D(-0{,}1; -0{,}001)$; д) $E(2; 6)$; е) $M\left(\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$.

Запишите координаты еще каких-либо двух точек, принадлежащих графику функции $y = x^3$.

4.51. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните:

а) $f(2{,}1)$ и $f(3{,}9)$; б) $f(-8{,}97)$ и $f(-9{,}52)$;

в) $f\left(-\sqrt{5}\right)$ и $f(-2)$; г) $f\left(2\sqrt{3}\right)$ и $f(13)$.

4.52. Дана функция $g(x) = x^3$. Расположите в порядке убывания $g(-2{,}8)$; $g(0)$; $g(-4{,}65)$ и $g(15)$.

4.53. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = x^3$ и $y = 2 - x$; б) $y = x^3$ и $y = \frac{16}{x}$.

4.54. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Найдите значение выражения:

а) $f(-3) + f(3) - f(5)$; б) $f(2{,}45) + f(-2{,}45) + f(0)$;

в) $f\left(-\sqrt{7}\right) + f\left(\sqrt{7}\right)$; г) $f\left(\sqrt{2}\right) + f\left(-\sqrt{2}\right) + f(-1)$.

Обобщите полученные результаты. Для функции $f(x) = x^3$ найдите $f(a) + f(-a) + f(1)$, где a — любое действительное число.

4.55. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^3$ и $y = x$. Сравните свойства функций $y = x^3$ и $y = x$.

4.56. Найдите значения функции $y = x^3$ при значениях аргумента, равных 1; –3; 0,1; –2,5.

4.57. Для функции $f(x) = x^3$ найдите значение аргумента, при котором $f(x) = -1$; $f(x) = 27$; $f(x) = -125$; $f(x) = 7\sqrt{7}$.

4.58. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y = x^3$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(6;\ 216)$;

в) $C(-10;\ -1000)$; г) $D(0{,}2;\ -0{,}008)$.

4.59. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните:

а) $f(3{,}6)$ и $f(4{,}8)$; б) $f(-10{,}25)$ и $f(-8{,}26)$;

в) $f\left(\sqrt{11}\right)$ и $f(3)$; г) $f\left(-\sqrt{3}\right)$ и $f\left(-\sqrt{2}\right)$.

4.60. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^3$ и $y = -8$, найдите координаты их общей точки.

4.61. Найдите значение выражения $f(18) + f(-18) - f(-1)$, если $f(x) = x^3$.

4.62. Выполните действия:

а) $\left(5\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^5$; б) $\frac{4^7 \cdot 64}{16^4}$.

4.63. Постоянное пополнение рубрик на национальном образовательном портале (adu.by) считается эффективным, если рубрику читает не менее 50 % посетителей портала. Анкетирование показало, что из 100 700 посетителей портала 41 600 человек читают рубрику «Электронные образовательные ресурсы», 39 250 — рубрику «Профильное обучение», 30 650 — обе эти рубрики. Все остальные посетители портала читают только рубрику «Актуальная информация». Будет ли постоянное пополнение рубрики «Актуальная информация» эффективным?

§ 19. Свойства и график функции $y = |x|$

4.64. Найдите значение выражения $|x|$, если:

а) $x = 1{,}5$; б) $x = -4{,}5$; в) $x = 6{,}5$.

4.65. Найдите значение выражения $|-1| + |2{,}4| + |-4{,}5|$.

Во многих практических задачах ставится вопрос о вычислении расстояния между двумя точками. Для решения таких задач используется понятие модуля числа. Определение модуля числа как расстояния от начала отсчета до точки на координатной прямой, соответствующей этому числу, приводит к правилу: модуль числа равен самому числу, если число неотрицательное, и равен противоположному ему числу, если число отрицательное, т. е. $|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$

Рассмотрим свойства и график функции $y = |x|$.

1. Область определения функции. Так как $|x|$ определяется для любого действительного числа, то областью определения функции $y = |x|$ являются все действительные числа: $D = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции. Так как по определению модуля числа значение выражения $|x|$ неотрицательно для любого числа x, то множеством значений функции $y = |x|$ является множество неотрицательных чисел: $E = [0; +\infty)$.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $|x| = 0$, при $x = 0$, то $x = 0$ есть нуль функции.

4. Промежутки знакопостоянства функции. $y > 0$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

5. График функции. Построим график функции

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Поскольку при $x \geqslant 0$ $|x| = x$, то при $x \geqslant 0$ график функции $y = |x|$ есть часть прямой $y = x$ — луч с началом в точке (0; 0), т. е. биссектриса первого координатного угла.

Так как при $x < 0$ $|x| = -x$, то при $x < 0$ график функции $y = |x|$ есть часть прямой $y = -x$, расположенная во второй координатной четверти.

Объединим части графиков функций $y = x$ при $x \in [0; +\infty)$ и $y = -x$ при $x \in (-\infty; 0)$ и получим график функции $y = |x|$ (рис. 102).

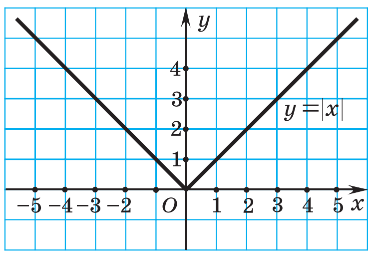


Рис. 102

6. Промежутки монотонности функции. Функция $y = |x|$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

7. Точки графика функции $y = |x|$ **симметричны** относительно оси ординат.

Свойства функции $y = |x|$	
1. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Сравните: а) $f(2{,}3)$ и $f(-2{,}3)$; б) $f(-4)$ и $f(0)$.	а) Так как $|2{,}3| = |-2{,}3|$, то $f(2{,}3) = f(-2{,}3)$; б) $f(-4) > f(0)$, так как $f(-4) = |-4| = 4$, а $f(0) = |0| = 0$.
2. Сколько существует значений аргумента, при которых значение функции $y = |x|$ равно: а) 6,287; б) 0; в) –5,5?	а) Подставим в уравнение $y = |x|$ значение $y = 6{,}287$, получим $6{,}287 = |x|$. Это уравнение имеет два корня: 6,287 и –6,287. б) Подставим в уравнение $y = |x|$ значение $y = 0$, получим $0 = |x|$. Это уравнение имеет один корень $x = 0$. в) Подставим в уравнение $y = |x|$ значение $y = -5{,}5$, получим $-5{,}5 = |x|$. Это уравнение не имеет корней, так как модуль числа есть число неотрицательное.
График функции $y = |x|$	
3. Определите, принадлежит ли точка графику функции $y = |x|$: а) (3; 3); б) (–4; 4); в) (2; –2); г) (–5; 4).	а) Подставим координаты точки в уравнение $y = |x|$, получим $3 = |3|$ — равенство верное, значит, точка (3; 3) принадлежит графику функции $y = |x|$. б) Равенство $4 = |-4|$ верное, значит, точка (–4; 4) принадлежит графику функции $y = |x|$. в) Равенство $-2 = |2|$ неверное, значит, точка (2; –2) не принадлежит графику функции $y = |x|$.

	г) Равенство $4 = \lvert -5 \rvert$ неверное, значит, точка (–5; 4) не принадлежит графику функции $y = \lvert x \rvert$.
4. Сколько точек пересечения имеет график функции $y = \lvert x \rvert$ с прямой $y = c$, если: а) $c = 6$; б) $c = 0$; в) $c = -5$?	а) Прямая $y = 6$ параллельна оси абсцисс и проходит через точку (0; 6). Она пересекает график функции $y = \lvert x \rvert$ в двух точках. б) Прямая $y = 0$ — ось абсцисс. Она пересекает график функции $y = \lvert x \rvert$ в одной точке. в) Прямая $y = -5$ параллельна оси абсцисс и проходит через точку (0; –5). Она не пересекает график функции $y = \lvert x \rvert$.

Сколько корней имеют уравнения:

а) $\lvert x \rvert = 4$ и $x^2 = 16$; б) $\lvert x \rvert = 0$ и $x^2 = 0$; в) $\lvert x \rvert = -3$ и $x^2 = -3$?

4.66. Найдите значения функции $y = \lvert x \rvert$ при значении аргумента, равном 1; –1; 0; –3,5; 3,5.

4.67. Для функции $f(x) = \lvert x \rvert$ найдите значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 7$; б) $f(x) = 3,9$; в) $f(x) = 0$.

4.68. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y = \lvert x \rvert$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(-7;\ -7)$; в) $C(-1,25;\ 1,25)$;

г) $D(11;\ -11)$; д) $E(28,9;\ 28,9)$; е) $N\left(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$.

Запишите координаты еще каких-либо двух точек, принадлежащих графику функции $y = \lvert x \rvert$.

4.69. Функция задана формулой $f(x) = \lvert x \rvert$. Сравните:

а) $f(80,7)$ и $f(83,9)$; б) $f(-5,43)$ и $f(-6,21)$;

в) $f\left(-\sqrt{7}\right)$ и $f\left(-2\sqrt{2}\right)$; г) $f\left(2\sqrt{5}\right)$ и $f\left(-\sqrt{20}\right)$.

4.70. Дана функция $g(x) = \lvert x \rvert$. Расположите в порядке убывания $g(-2,8)$; $g(-3,1)$; $g(-4,6)$.

4.71. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = |x|$ и $y = \frac{x}{2} + 3$; б) $y = |x|$ и $y = -\frac{4}{x}$;

в) $y = |x|$ и $y = x^2 - 2$.

4.72. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Найдите значение выражения:

а) $f(-10) - f(10) + f(85)$; б) $f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3}) + f(\sqrt{2})$.

Обобщите полученные результаты. Для функции $f(x) = |x|$ найдите $f(a) - f(-a) + f(5)$, где a — любое действительное число.

4.73. Постройте графики функций $y = |x|$ и $y = x^2$. Сравните свойства функций $y = |x|$ и $y = x^2$.

4.74. В разных системах координат постройте графики функций $y = x$; $y = \sqrt{x^2}$ и $y = (\sqrt{x})^2$. Верно ли, что графики всех этих функций различны?

4.75. Для функции $f(x) = |x|$ найдите $f(4)$; $f(-4)$; $f(-0,8)$; $f(0,8)$.

4.76. Для функции $y = |x|$ найдите все значения аргумента, при которых значение функции равно 5; 0; 48.

4.77. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = |x|$:

а) $A(8;\ -8)$; б) $B(1;\ 1)$;

в) $C(-6,2;\ -6,2)$; г) $D(-18,3;\ 18,3)$.

4.78. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Сравните:

а) $f(7)$ и $f(10)$; б) $f(-56,32)$ и $f(-58,97)$;

в) $f(3\sqrt{3})$ и $f(5)$; г) $f(\sqrt{8})$ и $f(-2\sqrt{2})$.

4.79. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = |x|$ и $y = 5$; б) $y = |x|$ и $y = -x^2 + 6$.

4.80. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Найдите значение выражения:

а) $f(2,6) - f(-2,6) - f(15)$; б) $-f(2\sqrt{15}) + f(\sqrt{60}) + f(8)$.

4.81. Вычислите:

а) $\frac{(3\sqrt{8})^2}{24}$; б) $6\sqrt{1,21} - 2(\sqrt{2})^2$.

4.82. Найдите количество целых решений неравенства

$$\frac{x^2+6x}{6} - \frac{2x+3}{2} \leqslant 12.$$

4.83. В рамках республиканской акции по благоустройству и озеленению территорий «Цветы добра» учащиеся создавали проекты цветников. Группа восьмиклассников высаживала цветы в городском парке 4 ч, а группа семиклассников — 3 ч. Вместе они высадили 440 цветов. Сколько цветов высадили восьмиклассники, если за 1 ч работы две группы вместе высадили 130 цветов?

§ 20. Свойства и график функции $y = \sqrt{x}$

4.84. Найдите длину стороны квадрата, если его площадь равна:

а) 36 см^2; б) 10 дм^2; в) x м^2.

4.85. Найдите значение выражения $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$.

4.86. Сравните $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ и $2\sqrt{0,25}$.

Зависимость между двумя переменными величинами, при которой каждому значению одной переменной величины x из множества неотрицательных чисел ставится в соответствие значение $\sqrt{x}$, задает функцию $y = \sqrt{x}$.

Рассмотрим свойства и график функции $y = \sqrt{x}$.

1. Область определения функции. Так как по определению квадратного корня из числа $(\sqrt{x})^2 = x$, а $(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$, то аргумент x принимает только неотрицательные значения, т. е. $D = [0; +\infty)$.

2. Множество значений функции. По определению арифметический квадратный корень из числа есть число неотрицательное, т. е. множеством значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество неотрицательных чисел: $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $\sqrt{x} = 0$, при $x = 0$, то значение $x = 0$ является нулем функции.

Три рассмотренных свойства позволяют утверждать, что график функции $y = \sqrt{x}$ лежит в первой координатной четверти и проходит через начало координат.

4. Промежутки знакопостоянства функции. $y > 0$ при всех $x \in (0; +\infty)$.

5. График функции $y = \sqrt{x}$. Для построения графика функции $y = \sqrt{x}$ составим таблицу значений функции, соответствующих некоторым значениям аргумента.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

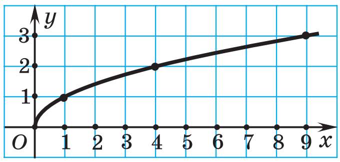


Рис. 103

Соединим точки плавной линией, получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 103).

6. Промежутки монотонности функции. С увеличением значений аргумента x значения функции $y = \sqrt{x}$ увеличиваются, значит, функция $y = \sqrt{x}$ возрастает для всех $x \in [0; +\infty)$.

Свойства функции $y = \sqrt{x}$	
1. Найдите значение функции $y = \sqrt{x}$, если: а) $x = 0{,}04$; б) $x = 1{,}21$; в) $x = 4{,}84$; г) $x = 1225$.	а) Подставим значение $x = 0{,}04$ в формулу $y = \sqrt{x}$, получим $y = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$; б) $y = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$; в) $y = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$; г) $y = \sqrt{1225} = 35$.
2. Функция задана формулой $f(x) = \sqrt{x}$. Сравните: а) $f(8{,}35)$ и $f(5{,}35)$; б) $f(41{,}06)$ и $f(42{,}06)$.	а) Так как функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, то из того, что $8{,}35 > 5{,}35$, следует, что $f(8{,}35) > f(5{,}35)$. б) Так как $41{,}06 < 42{,}06$ и функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая для $x \in [0; +\infty)$, то $f(41{,}06) < f(42{,}06)$.

График функции $y = \sqrt{x}$	
3. Какие из точек: а) (1; 1); б) (16; 4); в) (1; –1); г) (16; –4) — принадлежат графику функции $y = \sqrt{x}$?	а) Подставим координаты точки (1; 1) в уравнение $y = \sqrt{x}$, получим $\sqrt{1} = 1$ — верное равенство, значит, точка (1; 1) принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$. б) Равенство $\sqrt{16} = 4$ верное, значит, точка (16; 4) принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$. в) Равенство $\sqrt{1} = -1$ неверное, значит, точка (1; –1) не принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$. г) Равенство $\sqrt{16} = -4$ неверное, значит, точка (16; –4) не принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$.
4. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке [0; 5] (рис. 104), найдите приближенное значение $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.	По значению абсцисс точек находим приближенное значение ординат точек графика: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2$.

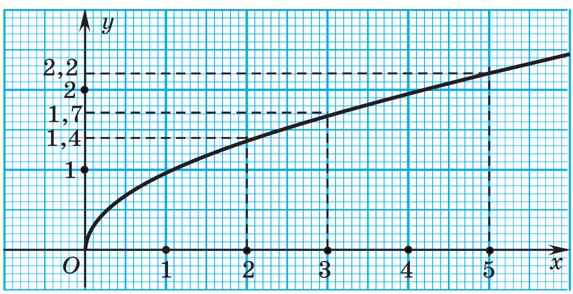


Рис. 104

1. Выберите функции, областью определения которых являются все действительные числа:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^3$; в) $y = \frac{k}{x}$; г) $y = |x|$.

2. Определите функции, которые при всех значениях x из области определения принимают неотрицательные значения:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^3$; в) $y = \frac{k}{x}$; г) $y = |x|$.

4.87. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите $f(0)$; $f(4)$; $f(0{,}25)$; $f(49)$; $f(6400)$.

4.88. Из чисел 9; –3; 0; –1,25; 12,3; 8 выберите те, которые не принадлежат области определения функции $y = \sqrt{x}$.

4.89. Найдите значение аргумента, при котором значение функции $y = \sqrt{x}$ равно 0; 1; 2,5; $\sqrt{7}$; $2\sqrt{5}$. Может ли данная функция принимать значение, равное –8?

4.90. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = \sqrt{x}$:

а) $A(36;\ 6)$; б) $B(0{,}25;\ 0{,}5)$; в) $C(1;\ -1)$;

г) $D(0{,}01;\ 0{,}1)$; д) $E(144;\ -12)$; е) $F\left(5;\ \sqrt{5}\right)$.

Определите, какие из данных точек расположены ниже графика функции $y = \sqrt{x}$, а какие выше. Запишите координаты еще каких-либо двух точек, принадлежащих графику функции $y = \sqrt{x}$.

4.91. Функция задана формулой $f(x) = \sqrt{x}$. Сравните:

а) $f(6)$ и $f(11)$; б) $f(29{,}18)$ и $f(31{,}9)$.

4.92. Пользуясь свойствами функции $f(x) = \sqrt{x}$, сравните числа:

а) $\sqrt{37}$ и $\sqrt{35}$; б) $\sqrt{24}$ и 5; в) $5\sqrt{3}$ и $4\sqrt{5}$.

4.93. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$; 4; б) $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $\sqrt{42}$.

4.94. Найдите какое-нибудь рациональное число, заключенное между числами $\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}$.

4.95. Между какими последовательными целыми числами заключено число $-\sqrt{18}$?

4.96. Определите, пересекается ли график функции $y = \sqrt{x}$ с прямой:

а) $y = 2$; б) $y = 1{,}5$; в) $y = -3$;

г) $y = 0$; д) $y = \sqrt{5}$; е) $y = -\sqrt{2}$.

Если да, то найдите координаты точки пересечения.

4.97. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 105), найдите приближенное значение $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$.

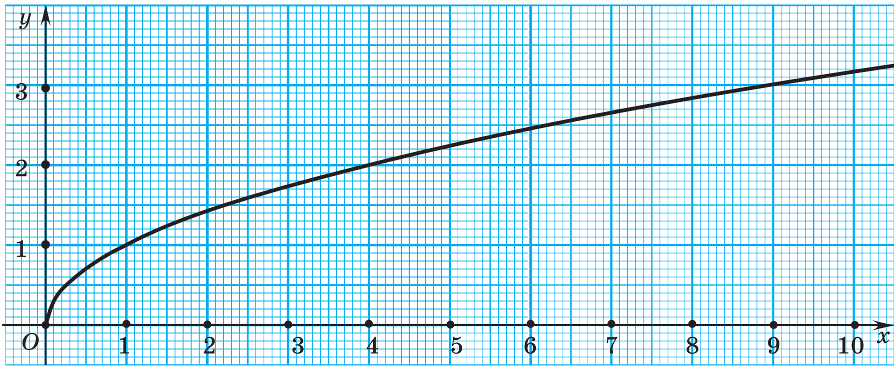


Рис. 105

4.98. Выберите прямые, которые пересекает график функции $y = \sqrt{x}$:

а) $y = 3x$; б) $y = -x + 2$;

в) $y = 2x + 5$; г) $y = -4x - 3$.

4.99. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{8}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 2$.

4.100. В одной системе координат постройте графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ и $y = x$. Найдите координаты общих точек построенных графиков. Сравните свойства функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

4.101. Среди функций $y = \sqrt{x}$; $y = |x|$; $y = x^3$ и $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, выберите функции:

а) нулем которых является $x = 0$;

б) возрастающие при $x \in (0; +\infty)$;

в) значения которых отрицательны при $x < 0$.

4.102. Сравните значения функции $y = \sqrt{x}$ при $x = \left(\frac{5}{\sqrt{6}+1}\right)^2$ и $x = 7 - 2\sqrt{6}$.

4.103. Даны функции $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = |x|$. Найдите значение выражения:

а) $f(g(-25))$; б) $g(f(0,36))$.

4.104. Найдите значения функции $y = \sqrt{x}$ при значении аргумента, равном 1; 25; 2,56.

4.105. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите значение аргумента, при котором $f(x) = 12$; $f(x) = 0,8$; $f(x) = 3\sqrt{2}$.

4.106. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y = \sqrt{x}$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(16;\ -4)$; в) $C(-100;\ 10)$;

г) $D(0,81;\ 0,9)$; д) $E\left(8;\ 2\sqrt{2}\right)$; е) $K\left(\sqrt{6};\ 36\right)$.

4.107. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Расположите в порядке возрастания $f(2)$; $f(5)$; $f(0,1)$ и $f(3,8)$.

4.108. Пользуясь свойствами функции $y = \sqrt{x}$, сравните числа:

а) $\sqrt{11}$ и $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{37}$ и 6; в) $2\sqrt{6}$ и $4\sqrt{7}$.

4.109. Расположите в порядке убывания числа 7; $3\sqrt{5}$; $\sqrt{47}$.

4.110. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{95}$.

4.111. Определите, пересекается ли график функции $y = \sqrt{x}$ с прямой:

а) $y = 1$; б) $y = \frac{1}{3}$; в) $y = -7$; г) $y = \sqrt{13}$.

Если да, то найдите координаты точки пересечения.

4.112. В одной системе координат постройте графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 6$, найдите координаты их общей точки.

4.113. За 800 г конфет заплатили 9 р. 60 к. Сколько граммов таких же конфет можно купить на 3 р.?

4.114. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 6x - 7 \geqslant 0, \\ 2 - 3x > 0. \end{cases}$

4.115. Представьте в виде произведения:

а) $(y + 2)^2 - 2y(y + 2)$; б) $-3y^2 + 10y - 3$.

4.116. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:

а) $13\,000^2$; б) $0{,}004^3$; в) 5000^{-4}.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$;
- уметь строить график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, для различных значений k;
- применять свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, при решении задач;
- знать свойства функции $y = x^3$, уметь строить график этой функции;
- применять свойства функции $y = x^3$ при решении задач;
- знать свойства функции $y = \sqrt{x}$, уметь строить ее график;
- применять свойства функции $y = \sqrt{x}$ при решении задач;
- знать свойства функции $y = |x|$, уметь строить ее график;
- применять свойства функции $y = |x|$ и использовать ее график при решении задач.

Я проверяю свои знания

1. Установите соответствие между графиком функции (рис. 106) и ее записью с помощью формулы:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^3$; в) $y = |x|$; г) $y = \frac{3}{x}$.

Как называется функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$? Как называется график этой функции?

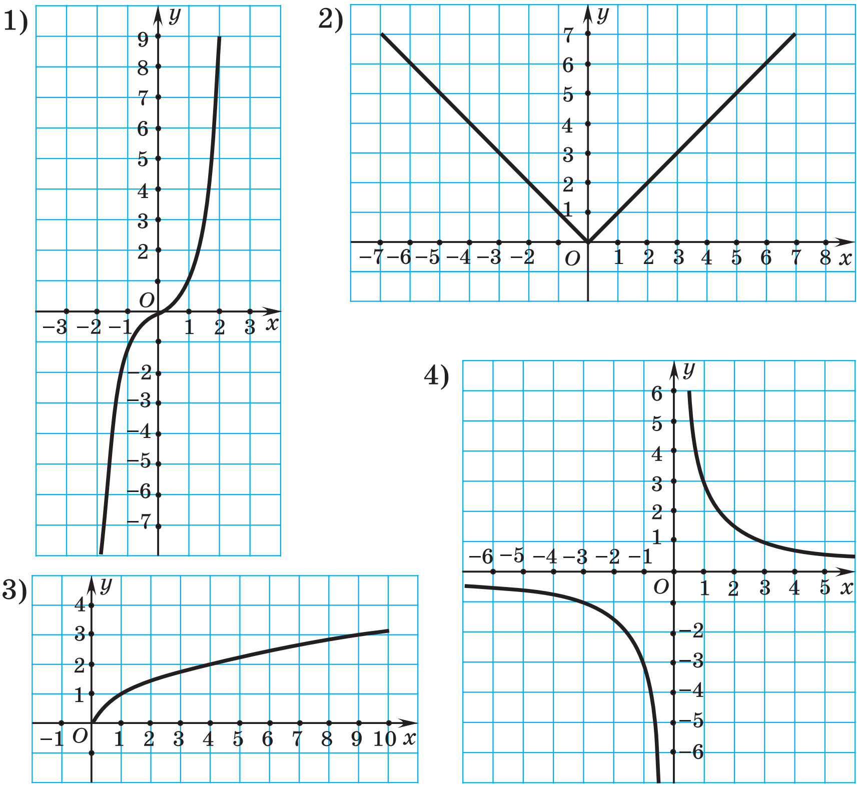


Рис. 106

2. Выберите функции, графикам которых принадлежит точка $A(-2;\ 2)$:

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f(x) = -\frac{4}{x}$; г) $f(x) = x^3$.

3. Найдите $f(9)$ для функции:

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f(x) = -\frac{18}{x}$; г) $f(x) = x^3$.

4. Найдите все значения аргумента, при которых выполняется равенство $g(x) = 8$, если:

а) $g(x) = |x|$; б) $g(x) = \sqrt{x}$;

в) $g(x) = \frac{24}{x}$; г) $g(x) = x^3$.

5. В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = \sqrt{x}$, найдите координаты их общей точки. Имеют ли общие точки графики функций:

а) $y = \frac{8}{x}$ и $y = -\frac{5}{x}$; б) $y = \frac{8}{x}$ и $y = -2x$?

Можно ли ответить на этот вопрос, не выполняя построения графиков?

6. Для каждой из функций $f(x) = |x|$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \frac{k}{x}$, $k < 0$, и $f(x) = x^3$ укажите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) нули функции; г) промежутки знакопостоянства функции; д) промежутки монотонности функции.

7. Расположите в порядке возрастания $f(5{,}12)$; $f(13{,}7)$; $f(9{,}29)$, если:

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f(x) = \frac{k}{x}$, $k > 0$; г) $f(x) = x^3$.

8. Вычислите $f(-1{,}2) + f(1{,}2) + g(7{,}8) + g(-7{,}8) + h(9{,}5) - h(-9{,}5)$, если $f(x) = \frac{79}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = |x|$.

9. Сравните $f\left(\frac{36}{8 - 2\sqrt{7}}\right)$ и $f\left(8 - 2\sqrt{7}\right)$, если $f(x) = \sqrt{x}$.

10. Задайте формулой обратную пропорциональность, график которой проходит через одну из точек пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = x^3$.

Практическая математика

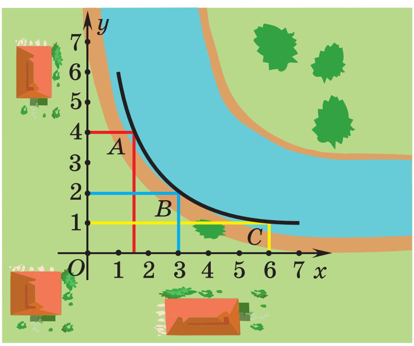


Рис. 107

1. Река огибает садовое товарищество так, как показано на рисунке 107. Дачникам предлагается устроить зону отдыха на одном из трех участков. При выборе из предлагаемых вариантов участка максимальной площади мнения разделились. Какое решение предлагаете вы?

2. Пастила продается в виде кубиков с ребром 4 см и 8 см. Восьмиклассник решил выбрать два кубика с ребром 4 см, а его старшая сестра утверждает, что лучше купить один кубик с ребром 8 см. Кто из них сумеет угостить большее число друзей, разделив купленные кубики на меньшие, с ребром 2 см?

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание

а) Постройте графики функций $f_1(x) = 2|x|$; $g_1(x) = 2\sqrt{x}$; $h_1(x) = 2x^3$ и $f_2(x) = 0{,}5|x|$; $g_2(x) = 0{,}5\sqrt{x}$; $h_2(x) = 0{,}5x^3$.

б) Обобщите полученные результаты для функций вида $f(x) = k|x|$; $g(x) = k\sqrt{x}$ и $h(x) = kx^3$, где $k \neq 0$.

Готовимся к олимпиадам

1. Название одного из городов Беларуси зашифровано с помощью некоторого кода: –14 –10 –15 –19 –12. Расшифруйте это слово.

2. Число x таково, что среди четырех чисел $x - \sqrt{2}$; $x^2 - 2\sqrt{2}$; $x + \frac{1}{x}$ и $x - \frac{1}{x}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

Повторение курса алгебры 8-го класса

Квадратные корни

1. Среди чисел 36; 0; $-\frac{1}{9}$; 0,04; –25; 1; 0,49 выберите те, из которых можно извлечь квадратный корень. Объясните свой выбор.

2. Вычислите:

а) $\sqrt{625}-3\sqrt{144}$; б) $\sqrt{11\frac{1}{9}}+\sqrt{10\frac{9}{16}}$;

в) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{25}-\sqrt{4^2+9}$; г) $3\sqrt{0{,}25}+5\sqrt{3{,}24}$.

3. Найдите значение выражения при $m = 0{,}04$, $n = \frac{1}{4}$:

а) $m\sqrt{n}-n\sqrt{m}$;

б) $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right):\sqrt{mn}$;

в) $\sqrt{m:n}+\sqrt{m+n+0{,}2}$.

4. Вычислите:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{2{,}25}$; б) $\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(5\sqrt{2}\right)^2$;

в) $\left(-\sqrt{6}\right)^2+\left(-3\sqrt{7}\right)^2$; г) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\sqrt{1\frac{19}{81}}$.

5. Используя свойства квадратного корня, вычислите:

а) $\sqrt{0{,}16\cdot 49}$; б) $\sqrt{2\cdot 800}$; в) $\sqrt{160}\cdot\sqrt{250}$;

г) $\sqrt{108}\cdot\sqrt{3}$; д) $\sqrt{\frac{36}{169}}$; е) $\sqrt{18\frac{1}{16}}$;

ж) $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$; з) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0{,}225}}$; и) $\frac{\sqrt{64{,}8}}{\sqrt{0{,}2}}$.

6. Выполните действия и определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $7\sqrt{300}-\sqrt{75}-5\sqrt{48}$; б) $3\sqrt{54}+\sqrt{96}-5\sqrt{150}$;

в) $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{5}$; г) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}+0{,}5\sqrt{24}$;

д) $\left(6-\sqrt{3}\right)^2$; е) $\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\sqrt{20}$;

ж) $\left(7-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+7\right)$; з) $\left(\sqrt{7}-3\right)^2\left(16+6\sqrt{7}\right)$.

7. Используйте свойства арифметического квадратного корня для вычисления значения выражения:

а) $\sqrt{80}+\sqrt{1{,}25}-\frac{1}{14}\sqrt{245}-\sqrt{180}$;

б) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2\left(7+4\sqrt{3}\right)+3\sqrt{12\frac{1}{4}}$.

8. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{21}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{3}+1}$.

9. Упростите выражение $2x^3-\sqrt{25x^6}$, если $x<0$.

10. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(y-3)^2}+\sqrt{(5-y)^2}$ при $3\leqslant y\leqslant 5$;

б) $\sqrt{4a^2+4a+1}-\sqrt{9a^2}$ при $-4<a<-2$.

11. Внесите множитель под знак корня:

а) $6\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{7}$ при $a\geqslant 0$; в) $b\sqrt{3}$ при $b<0$;

г) $n\sqrt{n}$; д) $c\sqrt{-c}$; е) $-a\sqrt{-a}$.

12. Найдите значение выражения $A+B+C+D$, если известно, что:

$A=\left(\sqrt{28}-\sqrt{175}+2\sqrt{63}\right):\left(2\sqrt{7}\right)$;

$B=\left(2\sqrt{3}+5\right)^2+\left(10-\sqrt{3}\right)^2$;

$C=\frac{2}{3}\sqrt{27}+\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)$;

$D=\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}$.

13. Найдите значение выражения $\sqrt{19-8\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-2}$.

Квадратные уравнения

14. Определите вид уравнения и решите его:

а) $12x^2+3x=0$; б) $2x^2-18=0$;

в) $\frac{1}{3}x^2-6x=0$; г) $x^2=25$;

д) $x^2+3=3-x$; е) $12-x^2=11$;

ж) $17-x^2=14$; з) $25+100x^2=0$.

15. Воспользуйтесь формулой корней квадратного уравнения и решите уравнение:

а) $x^2 - 6x - 16 = 0$; б) $3x^2 + 4x + 5 = 0$;

в) $-x^2 + 7x - 10 = 0$; г) $32x^2 - 12x + 1 = 0$;

д) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; е) $x^2 - x + 0{,}25 = 0$.

16. Решите уравнение:

а) $(x+1)(3x+1) = 5$;

б) $(2x+3)(3x+1) = 10x - 2$;

в) $(3x-1)(2x+6) = 8(2x+3)$;

г) $(2x+1)(x+2) - (x-1)(3x+1) = 9$;

д) $(x-2)^2 = 4(x+6)$;

е) $3(x+1)^2 = (x+3)^2$.

17. Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, которое:

а) не имеет корней;

б) имеет два целых корня;

в) имеет два иррациональных корня;

г) имеет только один корень.

18. Решите уравнение, не применяя формулы корней квадратного уравнения:

а) $x^2 - 11x + 18 = 0$; б) $x^2 - 5x - 14 = 0$;

в) $x^2 - x - 6 = 0$; г) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

д) $x^2 + 4x - 21 = 0$; е) $x^2 + 16x + 55 = 0$.

19. Выберите квадратное уравнение, корнями которого являются числа -1 и $\frac{1}{7}$:

а) $7x^2 + 6x + 1 = 0$; б) $-\frac{1}{7}x^2 + \frac{6}{7}x - 1 = 0$;

в) $x^2 - \frac{1}{7}x + 6 = 0$; г) $x^2 + \frac{1}{7}x - 6 = 0$;

д) $7x^2 + 6x - 1 = 0$; е) $x^2 - 7x - 1 = 0$.

20. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная, что:

а) его корни равны 1 и -7;

б) его корни равны $\frac{1}{6}$ и -6;

в) один из его корней равен $5 - \sqrt{2}$.

21. Найдите значение выражения $x_1 + x_2 + 2x_1x_2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 3x - 7 = 0$.

22. Уравнение $x^2 + px - 13 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразите $x_1^2 + x_2^2$ через p.

23. Разложите, если это возможно, на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 7x - 8$; б) $4x^2 + 9x + 2$; в) $4x^2 - 3x + 1$.

24. Представьте квадратный трехчлен в виде произведения двух двучленов:

а) $6x^2 - x - 1$; б) $-x^2 - 4x + 5$.

25. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$;

б) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$;

в) $5x^4 + 11x^2 + 2 = 0$.

26. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $(x^2 - 3)^4 + (x^2 - 3)^2 = 20$;

б) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;

в) $2(x^2 - x + 1)^2 - 3(x^2 - x + 1) = 2$;

г) $(x^2 + x)(x^2 + x - 4) - 12 = 0$;

д) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 5) = 84$;

е) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x - 1) = 3$;

ж) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$;

з) $(x^2 - 10x + 17)^2 - (x - 2)(x - 8) = 1$.

Квадратичная функция

27. Даны функции $f(x) = 4x^2 + 8x - 12$; $g(x) = 4(x + 1)^2 - 16$; $h(x) = 4(x - 1)(x + 3)$. Покажите, что $y = f(x)$; $y = g(x)$ и $y = h(x)$ являются тремя формами записи одной и той же функции.

28. Функция задана формулой $y = 3x^2 + 2x - 5$. Найдите:

а) значение функции при $x = -\frac{2}{3}$;

б) нули функции;

в) значения аргумента, при которых функция принимает значение, равное 3.

Проходит ли график функции через точку $A(-4;\ 32)$?

29. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 6x + 5$;
б) $y = -x^2 - 4x - 3$;
в) $y = x^2 + 2x + 3$;
г) $y = -x^2 + 4x$;
д) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$;
е) $y = -x^2 + 9$;
ж) $y = (x - 4)(x + 2)$;
з) $y = (x + 5)(1 - x)$;
и) $y = 2(x - 1)^2 - 8$;
к) $y = -(x + 3)^2 + 4$.

Для каждой из функций запишите:

1) область определения функции;
2) множество значений функции;
3) наибольшее (наименьшее) значение функции;
4) уравнение оси симметрии параболы;
5) нули функции;
6) промежутки знакопостоянства функции;
7) промежутки монотонности функции.

30. Найдите координаты вершины параболы и промежутки монотонности квадратичной функции:

а) $f(x) = (x - 4)^2 + 5$;
б) $g(x) = -(x + 2)^2 - 7$;
в) $h(x) = x^2 + 4$;
г) $p(x) = -3(x - 1)^2$.

31. Выберите график функции, заданной формулой $y = x^2 - 5$ (рис. 108).

32. В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$; $y = -2(x + 5)^2 + 8$; $y = (x + 3)^2 - 9$; $y = -(x - 5)^2$.

33. Числа –2 и 3 являются нулями квадратичной функции $y = 2x^2 + bx + c$. Найдите b и c.

34. Точка $A(2;\ 27)$ принадлежит графику функции $f(x) = -x^2 + bx + 1$. Найдите наибольшее значение функции.

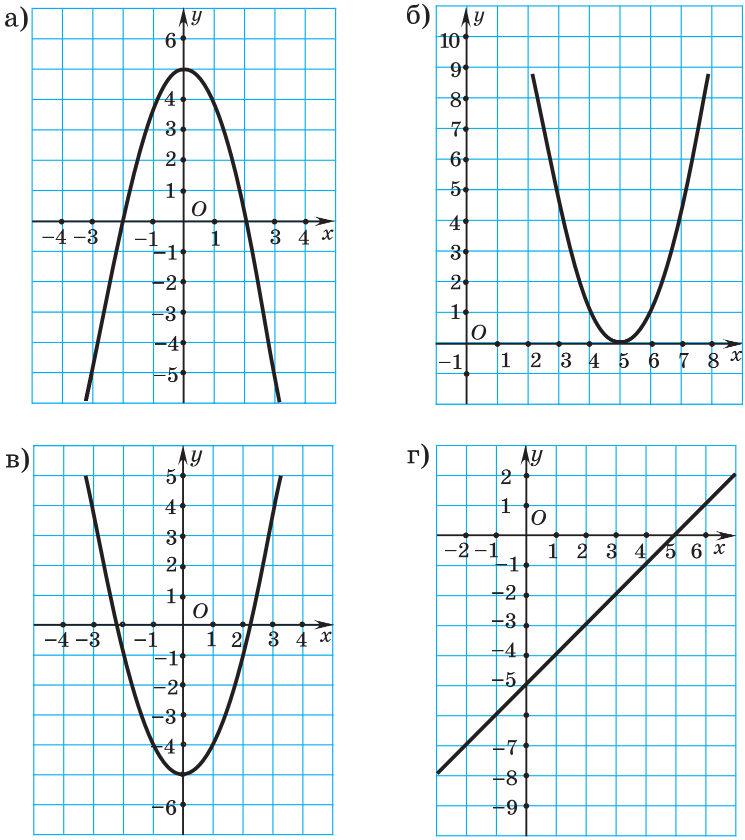


Рис. 108

35. Решите неравенство, используя свойства квадратичной функции:

а) $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;
б) $3x^2 - 4x + 7 < 0$;
в) $4x^2 - 4x - 15 \leqslant 0$;
г) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$;
д) $x^2 + 4x + 5 > 0$;
е) $x^2 + 10x - 24 < 0$;
ж) $x^2 \leqslant 36$;
з) $5x^2 + x > 0$;
и) $-4x^2 + 1 \leqslant 0$;
к) $8x^2 \geqslant 16$.

36. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{x^2 - 7x - 18}$;
б) $\sqrt{13x - 6x^2 - 5}$;
в) $\sqrt{6x^2 - x}$;
г) $\sqrt{9 - 49x^2}$.

37. Решите неравенство:

а) $(2x+1)^2-(x+1)(x-7)\leqslant 5$;

б) $5x(x+4)-(3+2x)(2x-3)>30$.

38. Найдите значения аргумента, при которых значения функции $f(x)=-x^2+3x+22$ больше соответствующих значений функции $g(x)=4x+2$.

39. Найдите сумму наибольшего целого отрицательного и наименьшего целого положительного решений неравенства

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(x-2)^2}{4}\leqslant\frac{1-x}{2}.$$

40. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}x^2-x-2\leqslant 0,\\ x>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x^2-5x+2>0,\\ x-2\geqslant 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-8x-9\geqslant 0,\\ x^2\geqslant 4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x^2-11x-6\leqslant 0,\\ x^2-6x\geqslant 0.\end{cases}$

41. Решите двойное неравенство $6-x<x^2\leqslant 16$.

42. Найдите область определения выражения

$$\sqrt{x^2-4x-12}+\sqrt{4-x^2}.$$