

К востоку от нулевого меридиана дуга окружности (полуокружность) содержит 180° восточной долготы (в. д.), а к западу от нулевого меридиана — 180° западной долготы (з. д.).

Задача.

Штаб-квартира ООН (Организации Объединенных Наций) находится в Нью-Йорке (США). Географические координаты Нью-Йорка: 39° с. ш., 77° з. д., а координаты Минска: 54° с. ш., $27,5^\circ$ в. д.

а) Определите расстояние, которое нужно преодолеть по поверхности Земли, чтобы попасть из параллели, где расположен Минск, на параллель, где расположен Нью-Йорк, двигаясь вдоль меридиана, на котором находится Минск.

Подсказка: расстояние между двумя параллелями, различающимися на 1° , равно 111 км.

б) Определите кратчайшее расстояние, которое нужно преодолеть, двигаясь по 54-й параллели, чтобы попасть из меридиана, на которой расположен Минск, на меридиан, на котором расположен Нью-Йорк.

Подсказка: длина 54-й параллели 23 500 км и длина дуги окружности прямо пропорциональна ее градусной мере.



Интересно знать. ООН — самая авторитетная международная организация, которая решает вопросы безопасности и сотрудничества на планете Земля.

Беларусь является одной из стран учредителей Организации Объединенных Наций (октябрь 1945 г). Участие Беларуси в создании ООН стало признанием международным сообществом огромной роли, которую сыграл белорусский народ в деле победы над фашизмом.

§ 29. Свойство отрезков хорд и касательных

Теорема (о пересекающихся хордах).

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой, т. е. $ab = cd$ (рис. 385).

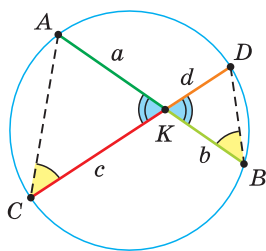


Рис. 385

Доказательство. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке K , $AK = a$, $KB = b$, $CK = c$, $KD = d$. Нужно доказать, что $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, или $ab = cd$ (см. рис. 385). Проведем хорды AC и BD . Так как $\angle AKC = \angle BDK$ как вертикальные, а $\angle ACD = \angle DBA$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD , то $\triangle AKC \sim \triangle BDK$ по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $\frac{AK}{CK} = \frac{DK}{BK}$, или $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, откуда $ab = cd$.

Теорема доказана.

Теорема (о касательной и секущей).

Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точки ее пересечения с окружностью, т. е. $a^2 = bc$ (рис. 386).

Иногда эту теорему формулируют так: «Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть», имея в виду указанные отрезки.

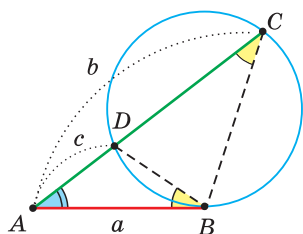


Рис. 386

Доказательство. Пусть AB — касательная, где B — точка касания и $AB = a$, AC — секущая, $AC = b$ — отрезок секущей, $AD = c$ — его внешняя часть (см. рис. 386). Нужно доказать, что $AB^2 = AC \cdot AD$, или $a^2 = bc$. Проведем хорду BD . У треугольников ABD и ACB $\angle A$ — общий, $\angle ABD = \angle ACB = \frac{1}{2} \cup BD$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, или $\frac{a}{c} = \frac{b}{a}$, откуда $a^2 = bc$. Теорема доказана.

Следствие.

Если из точки, взятой вне окружности, к окружности проведено несколько секущих, то произведения больших отрезков секущих на их внешние части равны между собой: $AC \cdot AD = AC_1 \cdot AD_1$ (рис. 387).

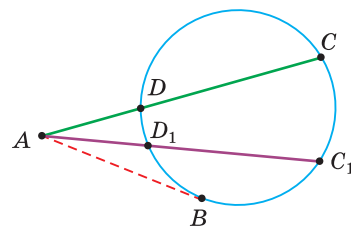


Рис. 387

Докажите это следствие самостоятельно, используя рисунок и теорему о касательной и секущей.



Задания к § 29

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

Ключевые задачи

Задача 1.

Хорды AB и CD пересекаются в точке M . Известно, что $AB = 15$ см, $CM = 9$ см, $MD = 4$ см. Найдите $AM : MB$, если $AM < MB$ (рис. 388).

Решение.

Пусть $AM = x$ см, тогда $MB = (15 - x)$ см. По теореме о пересекающихся хордах $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, то есть $x(15 - x) = 9 \cdot 4$. Решим полученное уравнение:

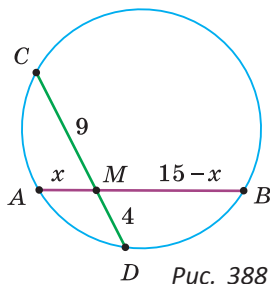


Рис. 388

$15x - x^2 = 36$, $x^2 - 15x + 36 = 0$. По теореме Виета (обратной) $x_1 = 3$, $x_2 = 12$. Если $AM = 3$ см, то $MB = AB - AM = 12$ см. Так как $3 < 12$, то $AM : MB = 3 : 12 = 1 : 4$.

Ответ: 1 : 4.

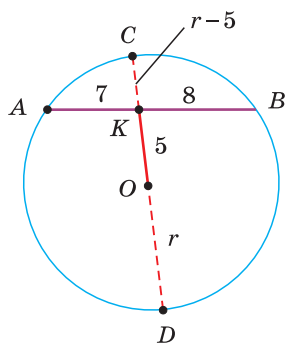


Рис. 389

Задача 2. Точка K делит хорду AB на отрезки $AK = 7$, $KB = 8$. Расстояние от центра O окружности до точки K равно 5. Найдите радиус окружности (рис. 389).

Решение. Проведем диаметр CD , содержащий отрезок OK . Обозначим радиус окружности r . Тогда $KD = OK + OD = r + 5$, $CK = OC - OK = r - 5$. По теореме о пересекающихся хордах $CK \cdot KD = AK \cdot KB$, то есть $(r - 5)(r + 5) = 7 \cdot 8$, $r^2 - 25 = 56$, $r^2 = 81$, $r = \pm 9$. По смыслу задачи $r > 0$. Поэтому $r = 9$.

Ответ: 9.

Задача 3. Из точки A к окружности проведены две секущие AB и AC (рис. 390). Найдите длину отрезка AB , если $KB = 14$ см, $AM = 8$ см, $MC = 7$ см.

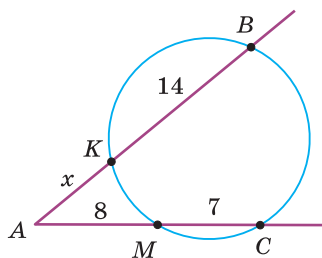


Рис. 390

Решение. Воспользуемся свойством секущих к окружности, проведенных из одной точки (следствие из теоремы о касательной и секущей). Получим $AB \cdot AK = AC \cdot AM$. Обозначим $AK = x$ см. Тогда $(x + 14) \cdot x = (8 + 7) \cdot 8$, $x^2 + 14x - 120 = 0$, $x_1 = -20$, $x_2 = 6$. Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 6$. Итак, $AK = 6$ см, $AB = 20$ см.

Ответ: 20 см.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

414. На рисунке 391 $CM = 8$ см, $MD = 6$ см, $MB = 12$ см. Найдите длину отрезка AM .

415. На рисунке 392 $AM = MB$, $CM = 4$ см, $MD = 9$ см. Найдите длину отрезка AB .

416. На рисунке 393 $AM = 20$ см, $CM = 2MB$, отрезок MD на 2 см меньше отрезка CM . Найдите длину отрезка CD .

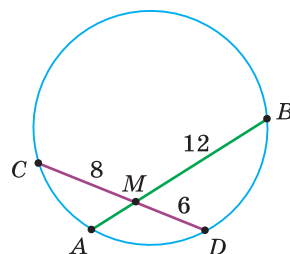


Рис. 391

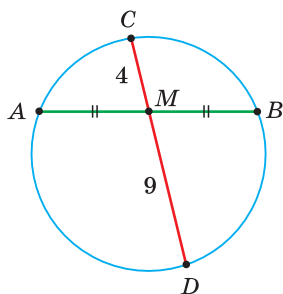


Рис. 392

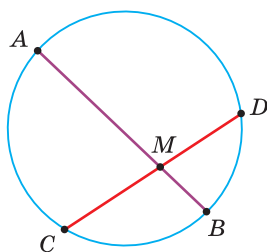


Рис. 393

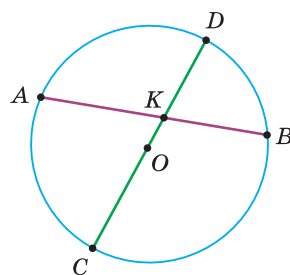


Рис. 394

- 417.** Точка O — центр окружности, $KB = 7$ см, $AK = 12$ см, $CD = 20$ см (рис. 394). Найдите длину отрезка KD .
- 418.** AB — диаметр окружности (рис. 395), $AB \perp CD$, $KB = 4$ см, $KD = 6$ см. Найдите радиус окружности.
- 419.** Из точки M к окружности проведена касательная MA , где A — точка касания, и секущая, которая пересекает окружность в двух точках C и D . Точка D лежит на отрезке MC , $MD = 4$ см, $DC = 12$ см. Найдите отрезок AM .
- 420.** На рисунке 396 AC — касательная, C — точка касания, $AC = 3$ см, $BD = 8$ см. Найдите длину отрезка AD .

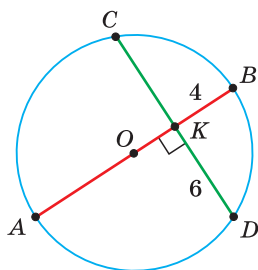


Рис. 395

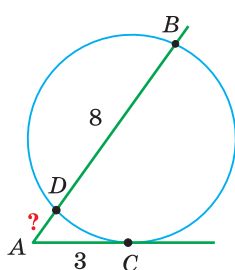


Рис. 396

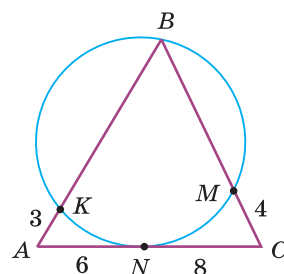


Рис. 397

- 421*.** На рисунке 397 окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке N и проходит через его вершину B . Найдите периметр треугольника ABC , если $AK = 3$ см, $AN = 6$ см, $NC = 8$ см, $CM = 4$ см.
- 422*.** На рисунке 398 AC — касательная к малой окружности, C — точка касания, $AD = 2$ см, $DB = 16$ см. Найдите длину отрезка AC .

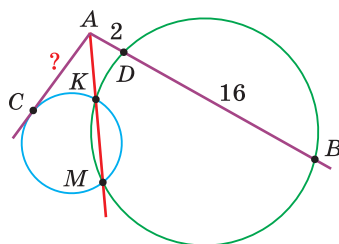


Рис. 398



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Чему равна величина угла между пересекающимися хордами.
2. Чему равна величина угла между секущими, проведенными из одной точки, взятой вне окружности.
3. Свойство отрезков пересекающихся хорд.
4. Свойство отрезка касательной и отрезков секущей, проведенных из одной точки, взятой вне окружности.

Умеем

1. Доказывать теорему об угле между пересекающимися хордами.
2. Доказывать теорему об угле между секущими к окружности.
3. Доказывать теорему об отрезках пересекающихся хорд окружности.
4. Доказывать теорему о касательной и секущей.

Об одном геометрическом месте точек*

Вначале рассмотрим задачу.

Задача. Построить дугу окружности, из каждой точки которой данный отрезок a виден под данным углом α (рис. 399).

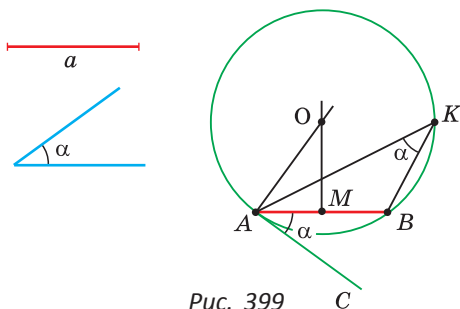


Рис. 399

Анализ. Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде a . Серединный перпендикуляр к хорде мы построить можем. Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу. Касательную под углом α к хорде a мы построить можем. Радиус, проведенный в точку касания, перпендику-

лярен касательной. Восстановить перпендикуляр к касательной в точке касания мы можем. Пересечение этого перпендикуляра и серединного перпендикуляра к данному отрезку даст центр искомой окружности.

Построение. Строим серединный перпендикуляр MO к отрезку $AB = a$. Откладываем $\angle BAC = \alpha$. Из точки A восстанавливаем перпендикуляр к прямой AC . Точка O — центр окружности, дуга AKB — искомая.

Доказательство. $OA \perp AC$, следовательно, AC — касательная к окружности с радиусом OA ; $\angle BAC = \alpha = \frac{1}{2} \angle AOB$ как угол между касательной и хордой; $\angle AKB = \frac{1}{2} \angle AOB$ как вписанный угол, опирающийся на дугу AB . Тогда $\angle AKB = \alpha$, где K — произвольная точка дуги AKB .

Из решенной задачи следует, что геометрическим местом точек плоскости, из которых данный отрезок виден под углом α , является объединение двух дуг окружностей: дуги AKB и ей симметричной относительно прямой AB , за исключением концов этих дуг, т. е. точек A и B .

Данное свойство позволяет построить при помощи циркуля и линейки треугольник по стороне, углу напротив и какому-либо еще элементу треугольника (рис. 400).

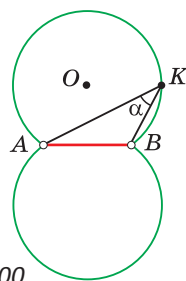


Рис. 400

Упражнения

1. Построить треугольник по основанию a , углу при вершине α и высоте h , опущенной на это основание.
2. Построить треугольник по основанию a , углу при вершине α и медиане, проведенной к стороне a .

Геометрия 3D

Из курса 7-го класса мы знаем, что, если вращать круг или полукруг вокруг своего диаметра, получим **шар** (рис. 401). Поверхность шара называется **сферой**.

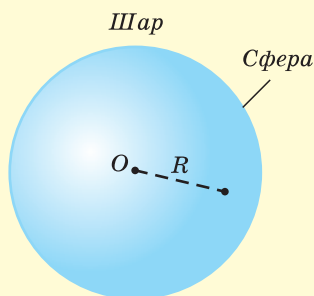
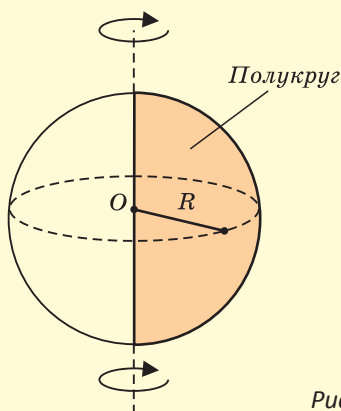


Рис. 401

Если вращать прямоугольник около одной из его сторон, получим **цилиндр** (рис. 402). Это геометрическое тело имеет поверхность и объем. Поверхность цилиндра состоит из двух кругов и боковой поверхности (рис. 403, см. с. 188). Круги называются основаниями цилиндра, их радиус R равен одной из сторон прямоугольника. Если боковую поверхность цилиндра развернуть на плоскость, получим прямоугольник. Одна из

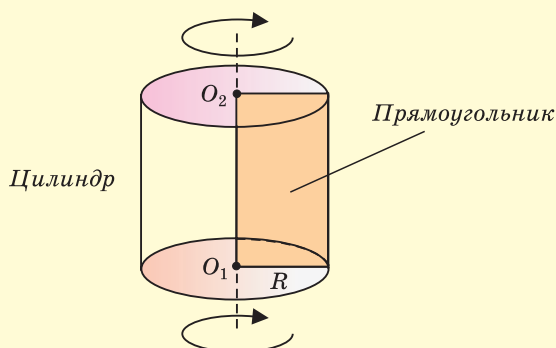


Рис. 402

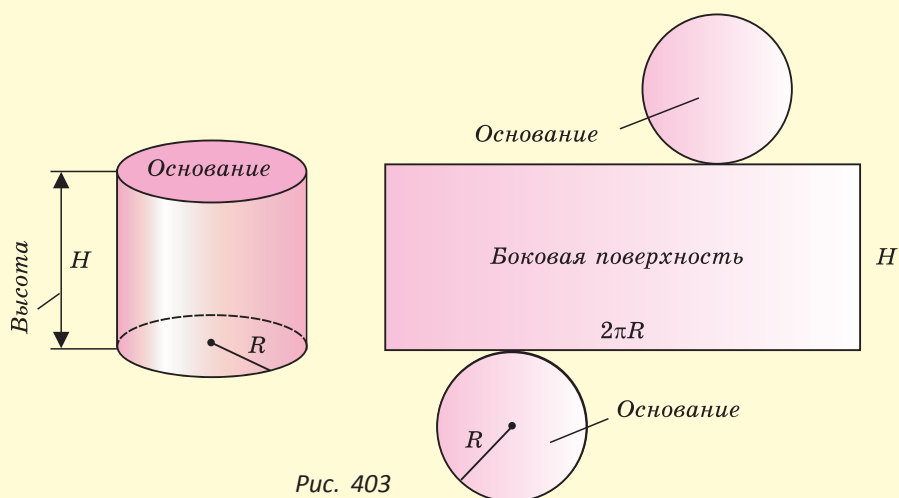


Рис. 403

его сторон равна стороне прямоугольника, а другая — длине окружности основания, то есть $2\pi R$. Высота H цилиндра равна одной из сторон прямоугольника.

Если вращать прямоугольный треугольник около одного из катетов, получим **конус** (рис. 404). Как шар и цилиндр, конус — это геометрическое тело, которое имеет поверхность и обладает объемом. Поверхность конуса состоит из одного круга, который называется основанием конуса и боковой поверхности. Радиус R основания равен одному из катетов треугольника вращения. Если боковую поверхность конуса развернуть на плоскость, то она будет представлять собой сектор круга (рис. 405). Другой катет является высотой конуса. Высота H конуса выходит из вершины и перпендикулярна основанию конуса.

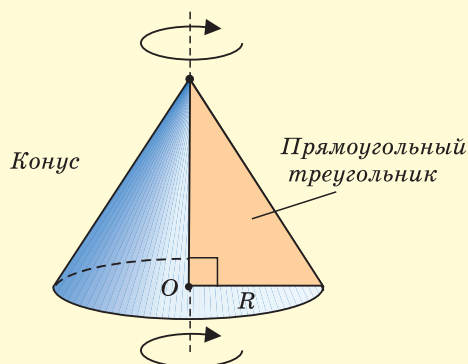


Рис. 404

Рассмотренные нами тела: шар, цилиндр и конус — называют **телами вращения**. В жизни, производстве, технике эти тела встречаются довольно часто. Приведите примеры.

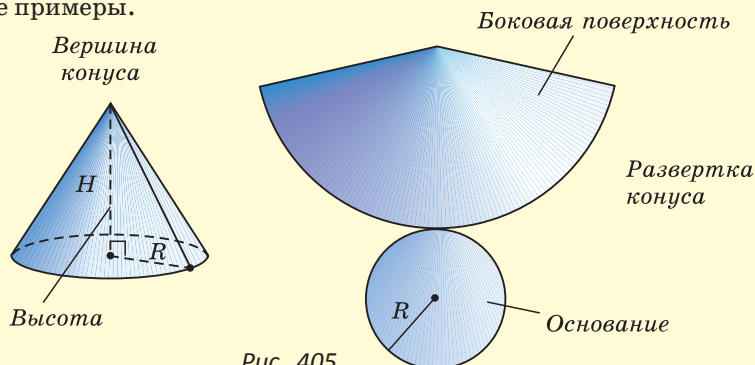


Рис. 405