361. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Окружность касается двух меньших сторон треугольника, а ее центр лежит на большей стороне. Найдите длины отрезков, на которые центр окружности делит большую сторону.

362*. На координатной плоскости задана окружность с центром $P(3;\ 2)$ и радиусом, равным 2. Из точки $A(-2;\ 0)$ к окружности проведена касательная, отличная от оси абсцисс, которая касается окружности в точке B. Найдите площадь треугольника APB.

363*. Постройте при помощи циркуля и линейки окружность заданного радиуса m, которая касается данной прямой l в отмеченной на ней точке K.

364*. При помощи циркуля и линейки впишите в данный угол A окружность данного радиуса R.

365*. Найдите геометрическое место центров окружностей, если все окружности проходят через две данные точки A и B.

§ 26. Взаимное расположение окружностей

Если две окружности имеют только одну общую точку, то они называются *касающимися* друг друга в этой точке. А если они имеют две общие точки, то — *пересекающимися*. Прямая, которая проходит через центры двух окружностей, называется *линией центров* этих окружностей.

Справедливо свойство: **«Точка касания двух касающихся окружностей принадлежит линии центров этих окружностей».**

Действительно. Пусть две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами R и r касаются в точке A, которая является их единственной общей точкой.

Предположим, что точка A не принадлежит прямой O_1O_2 (рис. 336). Построим симметричную ей точку A_1 относительно прямой O_1O_2. Так как O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1, то $O_1A = O_1A_1 = R$, $O_2A = O_2A_1 = r$. Значит, точка A_1 принадлежит каждой из данных окружностей, то есть является их второй общей точкой. Но по условию общая точка одна. Следовательно, точка A принадлежит линии центров.

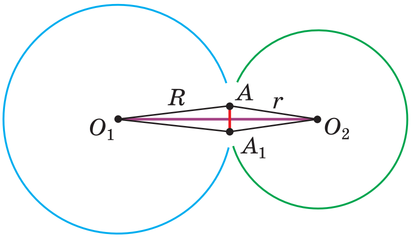


Рис. 336

Две касающиеся окружности имеют *общую касательную*, которая проходит через их общую точку (рис. 337). Пусть K — точка касания окружностей с центрами O_1 и O_2, она

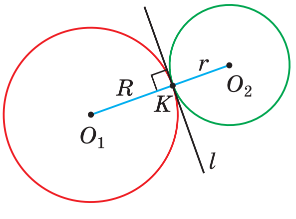


Рис. 337

принадлежит прямой O_1O_2. Проведем через точку K прямую $l \perp O_1O_2$. По признаку касательной прямая l является касательной к каждой из окружностей, т. е. l — общая касательная двух окружностей. Касающиеся окружности могут располагаться как по разные стороны от их общей касательной, так и по одну сторону от нее (см. рис. 338, *г*). В первом случае говорят, что они касаются *внешним образом*, во втором, — что они касаются *внутренним образом*.

Для двух окружностей с радиусами R и r $(R > r)$ и расстоянием $d = O_1O_2$ между их центрами можно выделить шесть случаев их различного взаимного расположения на плоскости (рис. 338, *а*)—*е*):

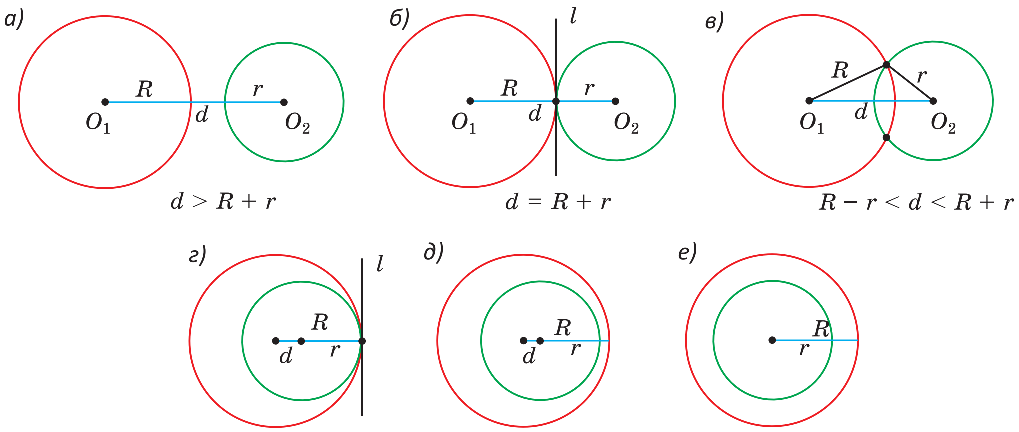


Рис. 338

а) окружности расположены внешним образом и не касаются: $d > R + r$;

б) окружности касаются внешним образом: $d = R + r$;

в) окружности пересекаются (в 2 точках): $R - r < d < R + r$ (неравенство треугольника);

г) окружности касаются внутренним образом: $d = R - r$;

д) окружности расположены внутренним образом, не касаются, и их центры не совпадают: $d < R - r$;

е) окружности расположены внутренним образом, их центры совпадают (*концентрические* окружности): $d = 0$.

Из сказанного следует, что из трех отрезков можно построить треугольник, если каждый из них меньше суммы двух оставшихся.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

Радиусы двух окружностей равны 12 см и 16 см. Расстояние между их центрами 24 см. Сколько общих точек имеют эти окружности:
а) одну; б) две; в) три; г) ни одной?

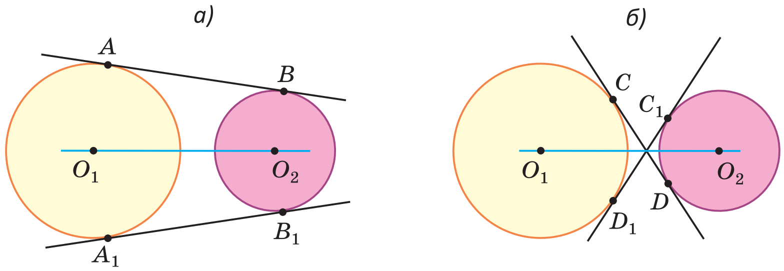


Рис. 339

Если две окружности расположены внешним образом или пересекаются, то можно построить их общую касательную, такую, что окружности будут лежать по одну сторону от этой касательной. Такая касательная называется *общей внешней касательной* по отношению к данным окружностям. На рисунке 339, *а*) это касательные AB и A_1B_1.

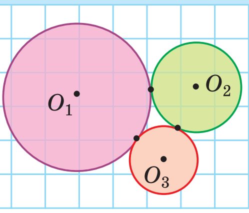
Для окружностей, расположенных внешним образом, можно построить такую общую касательную, что окружности будут лежать по разные стороны от нее. Такая касательная называется *общей внутренней касательной* по отношению к двум данным окружностям. На рисунке 339, *б*) это касательные CD и C_1D_1.

Существуют две внешние и две внутренние касательные к двум указанным окружностям. Эти касательные симметричны относительно линии центров O_1O_2. Отрезки этих касательных, заключенные между точками касания, равны между собой ($AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$), а точки пересечения двух внешних касательных (в случае неравных окружностей) и двух внутренних касательных лежат на линии центров.

А теперь выполните **Тест 2.**

Тест 2

Три окружности с диаметрами 6 см, 8 см и 10 см попарно касаются друг друга. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$, где O_1, O_2, O_3 — центры окружностей.



Задания к § 26

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии их центров и делится ею пополам.*

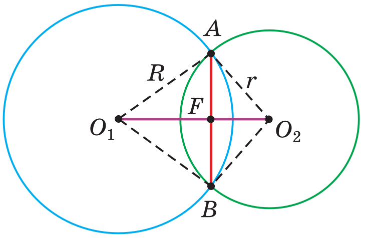


Рис. 340

Доказательство. Пусть две окружности с радиусами R и r соответственно с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (рис. 340). Так как точка O_1 равноудалена от точек A и B ($O_1A = O_1B = R$), то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Точка O_2 также равноудалена от концов отрезка AB ($O_2A = O_2B = r$), следовательно, она также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Поскольку через две точки проходит единственная прямая, то O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку AB, то есть $O_1O_2 \perp AB$, $AF = FB$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. *Две окружности с радиусами R и r касаются внешним образом. Найти длину отрезка общей внешней касательной этих окружностей, заключенного между точками касания.*

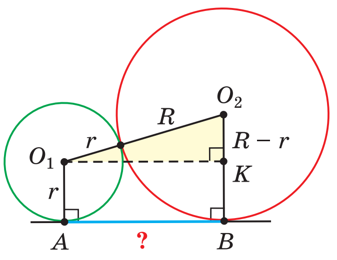


Рис. 341

Решение. Пусть AB — общая внешняя касательная двух касающихся внешним образом окружностей с центрами O_1 и O_2 (рис. 341), AB — искомый отрезок. Проведем радиусы $O_1A = r$ и $O_2B = R$ в точки касания. По свойству касательной $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$. Из точки O_1 проведем перпендикуляр O_1K к прямой O_2B. Четырехугольник AO_1KB — прямоугольник, так как все его углы прямые. Отсюда $O_1K = AB$, $BK = AO_1 = r$. В прямоугольном $\triangle O_1O_2K$ $O_2K = O_2B - BK = R - r$, $O_1O_2 = R + r$. По теореме Пифагора: $O_1K =$ $= \sqrt{O_1O_2^2 - O_2K^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$. Значит, $AB = 2\sqrt{Rr}$.

Ответ: $2\sqrt{Rr}$.

Задача 3. *В угол вписаны две касающиеся внешним образом окружности. Радиус большей из них равен* 6, *расстояние от ее центра до вершины угла равно* 30. *Найти радиус меньшей окружности* (рис. 342).

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, вписанных в угол A, M и K — точки касания окружностей со стороной угла, O_1M, O_2K — радиусы. Тогда $O_2K \perp AK$, $O_1M \perp AK$, $O_2K = 6$, $O_1M = x$, $AO_2 =$ $= 30$. Из подобия прямоугольных треугольников AO_1M и AO_2K (по общему острому углу O_2AK)

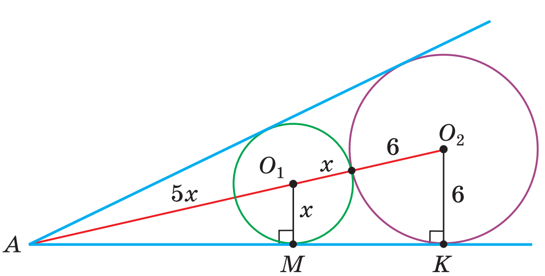


Рис. 342

следует, что $\frac{O_1M}{AO_1} = \frac{O_2K}{AO_2} = \frac{6}{30}$, то есть $\frac{x}{AO_1} = \frac{1}{5}$. Отсюда $AO_1 = 5x$, $O_1O_2 = x + 6$, $AO_2 = AO_1 + O_1O_2$, $5x + (x + 6) = 30$, $6x = 24$, $x = 4$. Искомый радиус $O_1M = 4$.

Ответ: 4.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

366. Даны две окружности с радиусами R и r и расстоянием d между их центрами. Определите, как расположены окружности относительно друг друга, если:

а) $R = 12$ см, $r = 5$ см, $d = 10$ см;
б) $R = 36$ см, $r = 12$ см, $d = 48$ см;
в) $R = 45$ см, $r = 15$ см, $d = 70$ см.

367. Две окружности с диаметрами 16 м и 6 м касаются внешним образом. Найдите расстояние между центрами окружностей.

368. Две окружности касаются внутренним образом. Расстояние между центрами окружностей 224 см. Радиус меньшей окружности равен 56 см. Найдите радиус большей окружности.

369. Три окружности с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами, равными 2 см, 4 см и 6 см, попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника $O_1O_2O_3$.

370. Три равных окружности с центрами в точках A, B и C попарно касаются друг друга. Периметр треугольника ABC равен 24 см. Найдите радиус этих окружностей.

371. Даны две равные пересекающиеся окружности с радиусом 5 м. Длина их общей хорды AB равна 8 м. Найдите расстояние между центрами окружностей.

372. Диаметры двух концентрических окружностей равны 6 м и 10 м. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности (рис. 343). Найдите длину хорды AB.

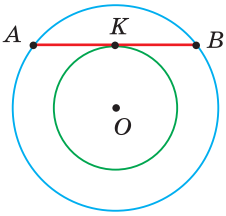


Рис. 343

373. Даны две касающиеся внешним образом окружности (рис. 344, с. 166). Радиус меньшей окружности равен 4 см. Длина отрезка AB внешней касательной, где A и B — точки касания, равна 12 см. Найдите радиус большей окружности.

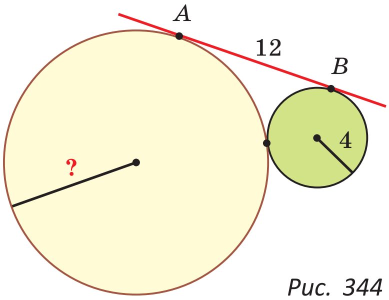


Рис. 344

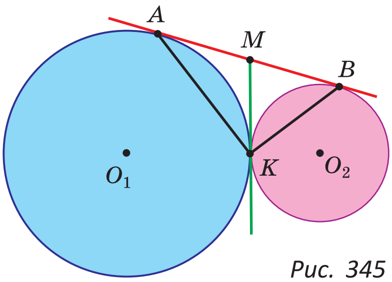


Рис. 345

374. Две окружности касаются внешним образом в точке K (рис. 345). Прямая AB — их общая внешняя касательная, где A и B — точки касания. Прямая KM — общая внутренняя касательная этих окружностей. Докажите, что:

а) $KM = \frac{1}{2}AB$; б) $\angle AKB = 90°$.

375. Прямая AB — общая внешняя касательная двух окружностей с центрами O_1 и O_2, которые касаются внешним образом (рис. 346), A и B — точки касания прямой AB и окружностей, точка F — середина отрезка AB, $\angle O_1O_2F = 37°$. Найдите $\angle FO_1O_2$.

376*. Даны две окружности с радиусами 9 см и 4 см. Третья окружность касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной a. Найдите радиус этой окружности. Рассмотрите все варианты.

377*. Прямая MN — общая внутренняя касательная двух окружностей, радиусы которых равны 3 см и 5 см, M и N — точки касания (рис. 347). Расстояние между центрами окружностей равно 10 см. Найдите длину отрезка MN.

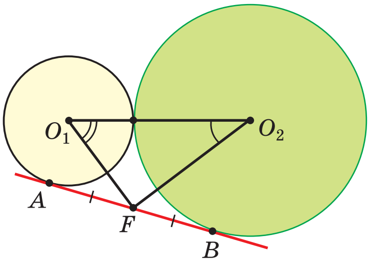


Рис. 346

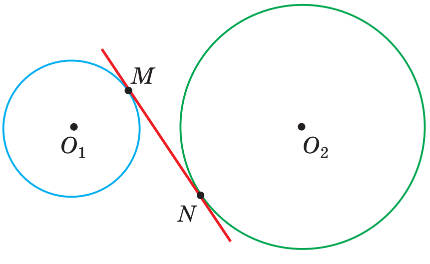


Рис. 347

378*. Даны радиусы R и r двух окружностей. При помощи циркуля и линейки постройте:
а) две окружности с радиусами R и r, касающиеся друг друга внешним образом;
б) две окружности с радиусами R и r, касающиеся друг друга внутренним образом.

379*. Даны две окружности, расположенные внешним образом ($d > R + r$). При помощи циркуля и линейки постройте:

а) их общую внешнюю касательную;
б) их общую внутреннюю касательную.

Гимнастика ума

Диаметр большой окружности с центром в точке O равен 24 см (рис. 348). Вторая окружность с центром в точке A касается большой окружности внутренним образом. Третья окружность с центром в точке B касается первой окружности внутренним, а второй — внешним образом. Найдите периметр треугольника ABO.

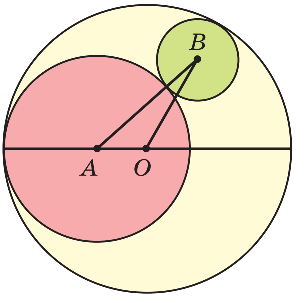


Рис. 348

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение касательной к окружности.
2. Свойство касательной и признак касательной.
3. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности.
4. Свойство окружности, вписанной в угол.
5. Все случаи взаимного расположения двух окружностей.

Умеем

1. Доказывать признак касательной.
2. Доказывать теорему о свойстве касательной.
3. Доказывать теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности.
4. Строить при помощи циркуля и линейки касательную к данной окружности, проходящую через точку, данную вне окружности.

§ 27. Центральный и вписанный углы

Определение. **Центральным углом** окружности называется угол, вершина которого находится в центре окружности.

Дуга окружности, заключенная внутри центрального угла, и этот центральный угол называются *соответствующими друг другу*.

Определение. **Градусной мерой** дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.