

Тры парады:**Як навучыцца рашаць задачы па геаметрыі**

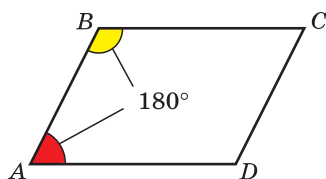
Парада 1. Прыступаючы да рашэння задачы, пажадана прачытаць яе ўмову некалькі разоў, каб ясна зразумець, што ў задачы дадзена, а што трэба знайсці (даказаць). Далей неабходна зрабіць чарцёж (калі ён не даецца), які будзе максімальна адпавядаць умове задачы. Пры гэтым, калі сказана, што дадзены чатырохвугольнік, не варта чарціць прамавугольнік, а калі дадзены адвольны трохвугольнік, то пабудаваны вамі раўнабедраны або роўнастаронні трохвугольнік можа прывесці да няправільных разважанняў. Трэба быць гатовым да таго, што прыйдзеца пабудоваць некалькі чарцяжоў, каб выбраць найбольш прыдатны.

Парада 2. Калі адразу не атрымліваецца скласці план рашэння задачы, трэба атрымаць усе дадатковыя даныя, якія вынікаюць з умовы. Перш за ўсё неабходна знайсці велічыні ўсіх вуглоў і ўсіх адрэзкаў, якія толькі можна. Затым неабходна яшчэ раз прачытаць, што трэба знайсці або даказаць.

Парада 3. Старажытныя грэкі гаварылі: «Каб навучыцца плаваць, трэба лезці ў ваду». Аналагічна можна сказаць: «Каб навучыцца рашаць задачы па геаметрыі, трэба іх рашаць». Рашэнне вялікай колькасці простых і сярэдніх па складанасці задач на гатовых чарцяжах — добры спосаб навучыцца рашаць больш складаныя задачы.

§ 2. Паралелаграм і яго ўласцівасці

Азначэнне. Паралелаграмам называецца чатырохвугольнік, у якога процілеглыя стораны парамі паралельныя.

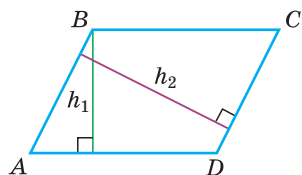


Рыс. 12

На рысунку 12 паказаны паралелаграм $ABCD$, у яго $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Па ўласцівасці аднастаронніх вуглоў пры паралельных прамых і сякучай $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$. Справядлівая ўласцівасць: «Сума суседніх вуглоў паралелаграма роўна 180° ».

Азначэнне. Вышыняй паралелаграма называецца перпендыкуляр, праведзены з пункта прамой, якая змяшчае адну са старон паралелаграма, да прамой, якая змяшчае процілеглую старану (да асновы паралелаграма).



h_1, h_2 — вышыні
паралелаграма

Рыс. 13

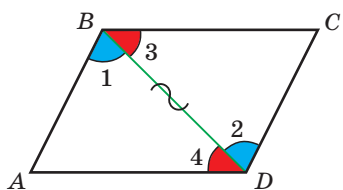
Вышыняй паралелаграма таксама называецца *даўжыня* пабудаванага перпендыкуляра. Усе вышыні паралелаграма, праведзеныя да дадзенай асновы, роўныя паміж сабой як адлегласці паміж паралельнымі прамымі.

Вышыня h_1 паралелаграма $ABCD$ (рыс. 13) праведзена да асновы AD , вышыня h_2 — да асновы DC . З уласцівасцей паралельных прамых вынікае, што $h_1 \perp BC$, $h_2 \perp AB$.

Тэарэма (аб уласцівасці старон і вуглоў паралелаграма).
У паралелаграма процілеглыя староны роўныя і процілеглыя вуглы роўныя.

Дадзена: $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 14).

Даказаць: $AB = CD$, $BC = AD$; $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



Рыс. 14

Доказ. Паколькі $ABCD$ — паралелаграм, то $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Правядзём дыяганаль BD . Атрымаем два трохвугольнікі ABD і CDB , роўныя па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў (старана BD — агульная, $\angle 1 = \angle 2$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AB і CD і сякучай BD , $\angle 3 = \angle 4$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AD і BC і сякучай BD). З роўнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае, што $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle A = \angle C$. Вуглы B і D паралелаграма роўныя як сумы роўных вуглоў: $\angle B = \angle 1 + \angle 3$, $\angle D = \angle 2 + \angle 4$.

Тэарэма даказана.

Вынік.

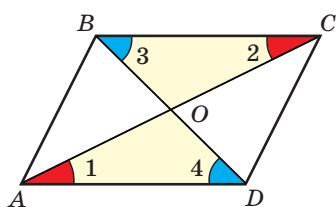
Перыметр паралелаграма са старонамі a і b вылічваецца па формуле $P = 2(a + b)$.

Пры доказе тэарэмы атрымана яшчэ адна ўласцівасць паралелаграма: «**Дыяганаль паралелаграма падзяляе яго на два роўныя трохвугольнікі**».

Тэарэма (аб уласцівасці дыяганалей паралелаграма).
Дыяганалі паралелаграма пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

Дадзена: $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 15).

Даказаць: $AO = OC$, $BO = OD$.



Рыс. 15

Доказ. Паколькі $ABCD$ — паралелаграм, то $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Трохвугольнікі AOD і COB роўныя па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($\angle 1 = \angle 2$ як накрываежныя пры паралельных прамых AD і BC і сякучай AC , $\angle 3 = \angle 4$ як накрываежныя пры паралельных прамых AD і BC і сякучай BD , $AD = BC$ як процілеглыя стараны паралелаграма). З роўнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае, што $AO = OC$, $BO = OD$. Тэарэма даказана.

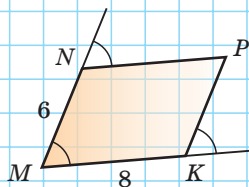
Заўвага. Пункт перасячэння дыяганалей паралелаграма называецца *цэнтрам паралелаграма*.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $MNPK$.

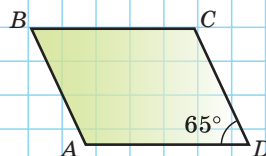
а) 14; б) 48; в) 28; г) 32.



Тэст 2

Знайдзіце суму вуглоў A , B і C паралелаграма $ABCD$.

а) 115° ; б) 235° ; в) 180° ; г) 295° .



Увага!

Калі на рысунку да задачы і ў яе ўмове не пазначана размернасць (напрыклад, як у **Тэсце 1**), то маецца на ўвазе, што даўжыні адрэзкаў выражаны ў адных і тых жа адзінках. Адказ для такой задачы даецца без размернасці.

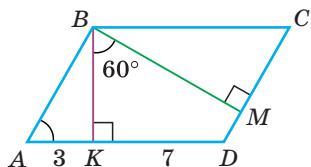


Заданні да § 2

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. $ABCD$ — паралелаграм, BK і BM — яго вышыні, $\angle KBM = 60^\circ$, $AK = 3$ см, $KD = 7$ см. Знайсці: $\angle ABK$, $\angle A$, старану AB , перыметр паралелаграма $ABCD$.



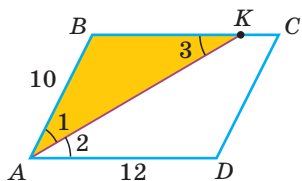
Рыс. 16

Рашэнне. Паколькі $BM \perp AB$ (рыс. 16), то $\angle ABM = 90^\circ$, $\angle ABK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. У прамавугольным трохвугольніку ABK $\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Паколькі ў трохвугольніку ABK катэт AK ляжыць на супраць вугла ў 30° , то ён роўны палавіне гіпатэнузы. Адсюль гіпатэнуза $AB = 2AK = 6$ см. Паколькі $AD = AK + KD = 10$ см, то $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(6 + 10) = 32$ (см).

Адказ: 30° ; 60° ; 6 см; 32 см.

Заўвага. Паколькі $\angle A$ і $\angle KBM$ дапаўняюць $\angle ABK$ да 90° , то $\angle A = \angle KBM$. Карысна запомніць уласцівасць: «*Вугал паміж вышынямі паралелаграма, праведзенымі з яго вяршыні, роўны вуглу пры суседняй вяршыні*».

Задача 2. Бісектрыса вугла A паралелаграма $ABCD$ перасякае старану BC у пункце K , $AD = 12$ см, $AB = 10$ см. Знайсці даўжыню адрэзка KC (рыс. 17).



Рыс. 17

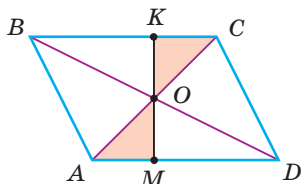
Рашэнне.

- 1) $\angle 1 = \angle 2$ (AK — бісектрыса);
- 2) $\angle 2 = \angle 3$ (як накрыжлеглыя вуглы пры $AD \parallel BC$ і сякучай AK);
- 3) $\angle 1 = \angle 3$, $\triangle ABK$ — раўнабедраны (па прымеце раўнабедранага трохвугольніка);
- 4) $AB = BK = 10$ см (як бакавыя стораны раўнабедранага трохвугольніка);
- 5) $BC = AD = 12$ см (як процілеглыя стораны паралелаграма);
- 6) $KC = BC - BK = 12 - 10 = 2$ (см).

Адказ: 2 см.

Заўвага. Пры рашэнні задачы даказана ўласцівасць: «*Бісектрыса вугла паралелаграма адсякае ад яго раўнабедраны трохвугольнік*».

Задача 3. Даказаць, што любы адрэзак з канцамі на старанах паралелаграма, які праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей, дзеліцца гэтым пунктам папалам.



Рыс. 18

Доказ. Няхай $ABCD$ — паралелаграм, KM — дадзены адрэзак (рыс. 18). Дакажам, што $OK = OM$. Разгледзім $\triangle AOM$ і $\triangle COK$. У іх $AO = OC$ (дыяганалі паралелаграма пунктам перасячэння дзеліцца папалам), $\angle OAM = \angle OCK$ (як накрыжлеглыя вуглы пры паралельных прамых AD і BC і сякучай AC), $\angle AOM = \angle COK$ (як вертыкальныя). Значыць, $\triangle AOM = \triangle COK$ (па 2-й прыме-

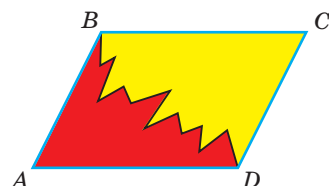
це роўнасці трохвугольнікаў). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $OM = OK$. Сцверджанне даказана.

Вынік.

Паколькі пункты K і M сіметрычныя адносна пункта перасячэння дыяганалей, то можна зрабіць вывад, што паралелаграм — цэнтральна-сіметрычная фігура і цэнтр паралелаграма з'яўляецца яго цэнтрам сіметрыі (падрабязна сіметрыя будзе разгледжана ў § 12).

Гімнастыка розуму

Паралелаграм $ABCD$ разрэзалі па ломанай лініі, якая злучае вяршыні B і D (рыс. 19). Вызначыце, перыметр якой часткі паралелаграма большы: жоўтай ці чыронай.

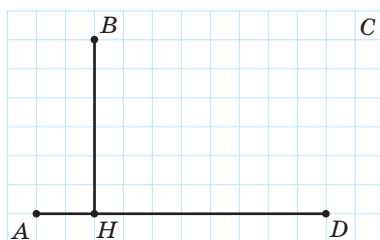


Рыс. 19



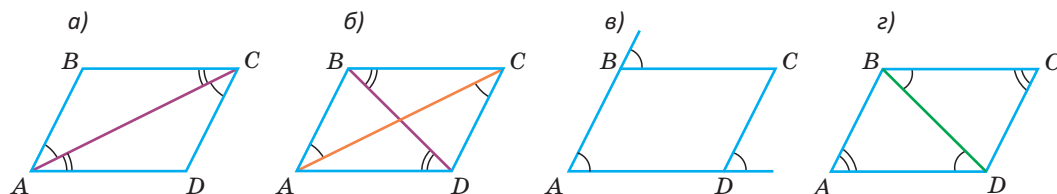
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

17. Перанясіце рысунак 20 у сшытак. Пабудуйце паралелаграм $ABCD$. Чаму роўна даўжыня стараны BC ? Чым з'яўляецца адрэзак BH для паралелаграма $ABCD$? Правядзіце вышыню CM да стараны AD . Чаму з роўнасці трохвугольнікаў ABH і DCM вынікае, што $AB \parallel CD$?



Рыс. 20

18. Па даных на рысунках 21, а) — г) дакажыце, што $ABCD$ — паралелаграм.



Рыс. 21

19. Знайдзіце невядомыя вуглы паралелаграма $ABCD$, калі:

- | | |
|---|--|
| а) $\angle B = 130^\circ$; | г) $\angle C : \angle B = 2 : 7$; |
| б) $\angle A + \angle C = 140^\circ$; | д) $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle DAC = 25^\circ$; |
| в) вугал A на 20° меншы за вугал B ; | е) $\angle D - 2\angle C = 12^\circ$. |

20. Перыметр паралелаграма $ABCD$ роўны 48 см. Знайдзіце яго стараны, калі:

- а) $CD = 10$ см;
 б) старана AD на 2 см большая за старану AB ;
 в) $AB : AD = 3 : 5$;

г) $AB + BC + CD = 32$ см;

д) $\angle BAC = \angle DAC$.

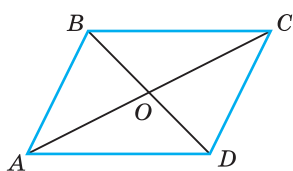
21. Дыяганалі паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O (рыс. 22). Знайдзіце:

а) перыметр трохвугольніка AOB , калі $AC = 20$ см, $BD = 16$ см, $CD = 10$ см;

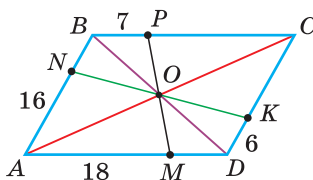
б) перыметр паралелаграма $ABCD$, калі $AC = 14$ см, $BD = 12$ см, $P_{AOB} = 21$ см, $P_{ABD} = 33$ см.

22. У паралелаграме $ABCD$ $AN = 16$ см, $BP = 7$ см, $KD = 6$ см, $AM = 18$ см (рыс. 23). Знайдзіце перыметр паралелаграма.

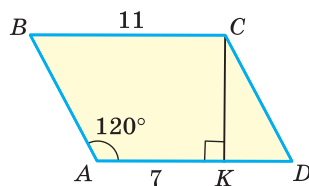
23. У паралелаграме $ABCD$ праведзена вышыня CK , $\angle A = 120^\circ$, $BC = 11$ см, $AK = 7$ см (рыс. 24). Знайдзіце перыметр паралелаграма.



Рыс. 22



Рыс. 23



Рыс. 24

24. а) Перыметр паралелаграма $ABCD$ роўны 36 см, перыметр трохвугольніка ABC роўны 28 см, $\angle ACB = 30^\circ$. Знайдзіце:

1) адрэзак AC ;

2) вышыню CK , апущчаную на старану AD .

б) Дыяганаль BD паралелаграма $ABCD$ перпендыкулярна да стараны AB , $P_{ABCD} = 30$ см, $\angle ADC = 120^\circ$. Знайдзіце стараны паралелаграма.

25. а) Дакажыце, што бісектрысы процілеглых вуглоў паралелаграма $ABCD$ ($AD \neq AB$) паралельныя паміж сабой.

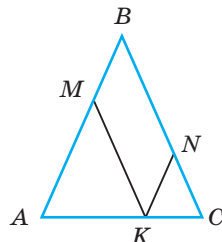
б) Дакажыце, што бісектрысы суседніх вуглоў паралелаграма ўзаемна перпендыкулярныя.

26. Бісектрыса вугла A паралелаграма $ABCD$ дзеліць старану BC на адрэзкі $BK = 6$ см, $KC = 4$ см. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

27. Бісектрысы вуглоў B і C паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце K , які належыць старане AD . Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі $KD = 8$ см.

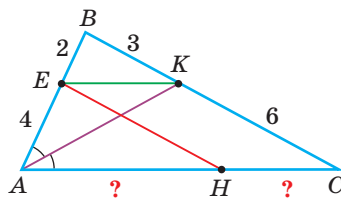
28. Трохвугольнік ABC — раўнабедраны, $AB = BC = 12$ см (рыс. 25). Знайдзіце перыметр паралелаграма $MBNK$.

29. Пункт M — сярэдзіна стараны BC паралелаграма $ABCD$, $\angle ABC = 104^\circ$, $\angle BAM = 38^\circ$. Знайдзіце велічыню вугла CDM .



Рыс. 25

- 30.** $ABCD$ — паралелаграм, $\angle A$ — востры, AH і AK — вышыні, праведзеныя да старон BC і CD адпаведна. Дакажыце, што $\angle HAK = \angle B$. Знайдзіце $\angle B$, калі $\angle HAK : \angle C = 3 : 2$.
- 31.** У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса AK , $KE \parallel AC$, $EH \parallel BC$ (рыс. 26). Дакажыце, што $EK = AE$. Па даных на рысунку знайдзіце даўжыні адрэзкаў HC і AH .
- 32.** Складзіце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі паралелаграма:
а) па дзвюх суседніх старанах і вугле паміж імі;
б) па дзвюх суседніх старанах і вышыні, праведзенай да адной са старон.
- 33.** Сфармулюйце якую-небудзь прымету роўнасці паралелаграмаў і дакажыце яе. (Фігуры роўныя, калі іх можна сумясціць накладаннем.)
- 34.** Дадзены вугал A і пункт M унутры яго. Пабудуйце пры дапамозе цыркуля і лінейкі адрэзак з канцамі на старанах вугла A , які праходзіць праз пункт M і дзеліцца гэтым пунктам папалам.



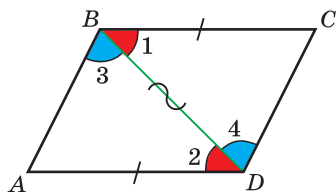
Рыс. 26

§ 3. Прыметы паралелаграма

Разгледзім тры прыметы паралелаграма.

Тэарэма (прымета паралелаграма).

Калі ў чатырохвугольніку дзве стараны роўныя і паралельныя, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.



Рыс. 27

Дадзена: чатырохвугольнік $ABCD$, $BC = AD$, $BC \parallel AD$ (рыс. 27).

Даказаць: $ABCD$ — паралелаграм.

Доказ. Правядзём у чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганаль BD . Трыкугольнікі ABD і CDB роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($AD = BC$ па ўмове, $\angle 1 = \angle 2$ як накружленыя вуглы пры паралельных прамых BC і AD і сякучай BD , старана BD — агульная). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle 3 = \angle 4$. А паколькі $\angle 3$ і $\angle 4$ па сваім размяшчэнні — накружленыя вуглы пры прамых AB і CD і сякучай BD , то $AB \parallel CD$ (па прымеце паралельнасці прамых). Такім чынам, у чатырохвугольніку $ABCD$ процілеглыя стараны