

- 30.** $ABCD$ — паралелаграм, $\angle A$ — востры, AH і AK — вышыні, праведзеныя да старон BC і CD адпаведна. Дакажыце, што $\angle HAK = \angle B$. Знайдзіце $\angle B$, калі $\angle HAK : \angle C = 3 : 2$.
- 31.** У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса AK , $KE \parallel AC$, $EH \parallel BC$ (рыс. 26). Дакажыце, што $EK = AE$. Па даных на рысунку знайдзіце даўжыні адрэзкаў HC і AH .
- 32.** Складзіце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі паралелаграма:
а) па дзвюх суседніх старанах і вугле паміж імі;
б) па дзвюх суседніх старанах і вышыні, праведзенай да адной са старон.
- 33.** Сфармулюйце якую-небудзь прымету роўнасці паралелаграмаў і дакажыце яе. (Фігуры роўныя, калі іх можна сумясціць накладаннем.)
- 34.** Дадзены вугал A і пункт M унутры яго. Пабудуйце пры дапамозе цыркуля і лінейкі адрэзак з канцамі на старанах вугла A , які праходзіць праз пункт M і дзеліцца гэтым пунктам папалам.

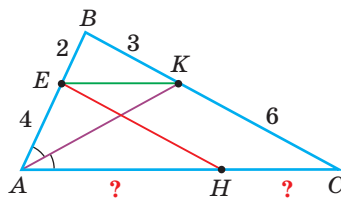


Рис. 26

§ 3. Прыметы паралелаграма

Разгледзім тры прыметы паралелаграма.

Тэарэма (прымета паралелаграма).

Калі ў чатырохвугольніку дзве стараны роўныя і паралельныя, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.

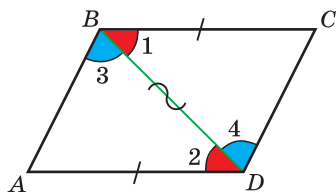


Рис. 27

Дадзена: чатырохвугольнік $ABCD$, $BC = AD$, $BC \parallel AD$ (рыс. 27).

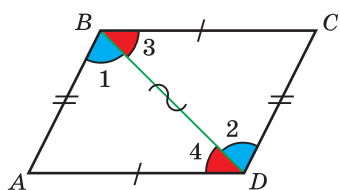
Даказаць: $ABCD$ — паралелаграм.

Доказ. Правядзём у чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганаль BD . Трыкугольнікі ABD і CDB роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($AD = BC$ па ўмове, $\angle 1 = \angle 2$ як накружленыя вуглы пры паралельных прамых BC і AD і сякучай BD , старана BD — агульная). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle 3 = \angle 4$. А паколькі $\angle 3$ і $\angle 4$ па сваім размяшчэнні — накружленыя вуглы пры прамых AB і CD і сякучай BD , то $AB \parallel CD$ (па прымеце паралельнасці прамых). Такім чынам, у чатырохвугольніку $ABCD$ процілеглыя стараны

паралельныя. Таму $ABCD$ — паралелаграм (па азначэнні паралелаграма). Тэарэма даказана.

Тэарэма (прымета паралелаграма).

Калі ў чатырохвугольніка процілеглыя стораны парамі роўныя, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.



Рыс. 28

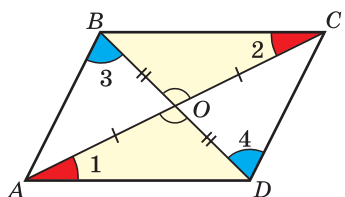
Дадзена: чатырохвугольнік $ABCD$, $BC = AD$, $AB = CD$ (рыс. 28).

Даказаць: $ABCD$ — паралелаграм.

Доказ. Правядзём дыяганаль BD . Трохвугольнікі ABD і CDB роўныя па трох старонах ($AD = BC$, $AB = CD$ па ўмове, старана BD — агульная). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. А паколькі $\angle 3$ і $\angle 4$ — накрыжлеглыя вуглы пры прамых BC і AD і сякучай BD , то $BC \parallel AD$ (па прымеце паралельнасці прамых). Аналагічна, паколькі $\angle 1$ і $\angle 2$ — накрыжлеглыя вуглы пры прамых AB і CD і сякучай BD , то $AB \parallel CD$. Паколькі ў чатырохвугольніка $ABCD$ процілеглыя стораны паралельныя, то $ABCD$ — паралелаграм (па азначэнні паралелаграма). Тэарэма даказана.

Тэарэма (прымета паралелаграма).

Калі ў чатырохвугольніка дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.



Рыс. 29

Дадзена: чатырохвугольнік $ABCD$, $AO = OC$, $BO = OD$ (рыс. 29).

Даказаць: $ABCD$ — паралелаграм.

Доказ. Трохвугольнікі AOD і COB роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($\angle AOD = \angle COB$ як вертыкальныя, $AO = OC$, $BO = OD$ па ўмове). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle 1 = \angle 2$. Але вуглы 1 і 2 — накрыжлеглыя пры прамых AD і BC і сякучай AC . Па прымеце паралельнасці прамых $AD \parallel BC$. Аналагічна трохвугольнікі AOB і COD роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў, адкуль $\angle 3 = \angle 4$, $AB \parallel CD$. Паколькі ў чатырохвугольніка $ABCD$ процілеглыя стораны паралельныя, то ён — паралелаграм (па азначэнні паралелаграма). Тэарэма даказана.

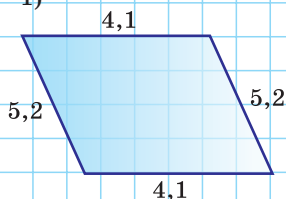
А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

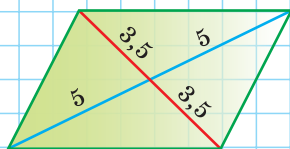
Які з паказаных на рысунках чатырохвугольнікаў з'яўляецца паралелаграмам?

а) 1); б) 2); в) 3); г) усе з'яўляюцца.

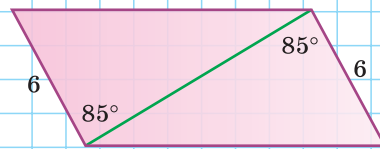
1)



2)



3)



Тэст 2

Ці правільнае сцверджанне: «Калі ў чатырохвугольніка дзве процілеглыя стараны роўныя, а дзве іншыя — паралельныя, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм»? Калі ваш адказ «не», то прывядзіце *контрыклад* (прыклад, які абвяргае гэта сцверджанне).



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, як у матэматыцы называецца пункт перасячэння вышынь трохвугольніка.

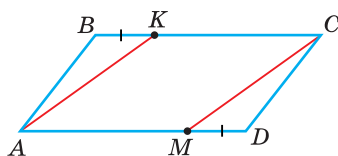


Заданні да § 3

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Дадзены паралелаграм $ABCD$. На яго старанах BC і AD адзначаны роўныя адрэзкі BK і DM . Дакажаць, што $AKCM$ — паралелаграм.

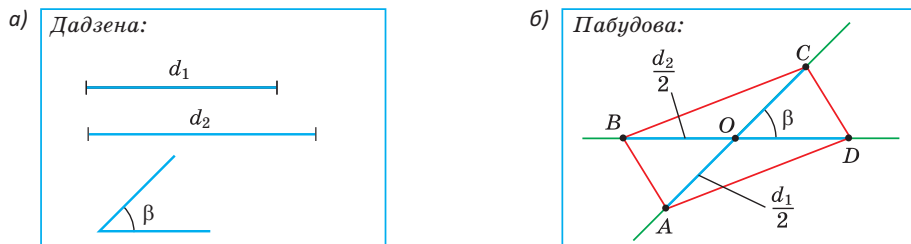


Рыс. 30

Доказ. У любога паралелаграма процілеглыя стараны роўныя і паралельныя. Таму $AD = BC$ і $AD \parallel BC$ (рыс. 30). Паколькі $KC = BC - BK$, $AM = AD - DM$ і па ўмове $BK = DM$, то $KC = AM$. Паколькі ў чатырохвугольніка $AKCM$ стараны KC і AM роўныя і паралельныя, то ён з'яўляецца паралелаграмам па прымеце паралелаграма.

Задача 2. Пабудаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі паралелаграм па дзвюх дыяганалях і вугле паміж імі.

Рашэнне. Няхай d_1 і d_2 — дадзеныя дыяганалі, β — вугал паміж імі (рыс. 31, а).



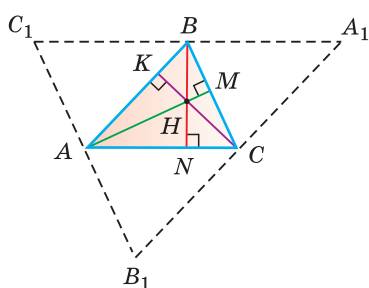
Рыс. 31

Пабудова (алгарытм). Дзелім кожную з дыяганалей d_1 і d_2 папалам (успомніце, як гэта робіцца пры дапамозе цыркуля і лінейкі). Будзем вугал O , роўны вуглу β (успомніце алгарытм пабудовы). На старанах вугла O і на іх прадаўжэннях адкладаем адрэзкі $OC = OA = \frac{d_1}{2}$ і $OD = OB = \frac{d_2}{2}$ (рыс. 31, б). Праводзім адрэзкі AB , BC , CD і AD .

Чатырхвугольнік $ABCD$ — шуканы паралелаграм.

Доказ. У чатырхвугольніка $ABCD$ дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам (паводле пабудовы), таму ён паралелаграм (па прымеце паралелаграма). Дыяганалі AC і BD роўны d_1 і d_2 , і вугал AOB паміж дыяганалямі роўны β (паводле пабудовы).

Задача 3. Даказаць, што вышыні трохвугольніка (або іх прадаўжэнні) перасякаюцца ў адным пункце.



Рыс. 32

Доказ. Няхай AM , BN і CK — вышыні трохвугольніка ABC (рыс. 32). Праз вяршыні трохвугольніка ABC правядзём прамыя, паралельныя процілеглым старанам. У іх перасячэнні атрымаем трохвугольнік $A_1B_1C_1$. Паколькі $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, то ABA_1C_1 — паралелаграм, адкуль $BA_1 = AC$. Аналагічна AC_1BC — паралелаграм і $C_1B = AC$. Тады $C_1B = BA_1$. Значыць, пункт B — сярэдзіна адрэзка A_1C_1 . Паколькі $AC \parallel A_1C_1$ і $BN \perp AC$, то $BN \perp A_1C_1$ (прамая, перпендыкулярная да адной з дзвюх паралельных прамых, перпендыкулярна і да другой прамой). Прамая BN — сярэдзінны перпендыкуляр да стараны A_1C_1 трохвугольніка $A_1B_1C_1$. Аналагічна даказваецца, што пра-

мья AM і CK — сярэдзінныя перпендыкуляры да старон B_1C_1 і A_1B_1 адпаведна. А мы ведаем, што сярэдзінныя перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце («Геаметрыя» для 7-га класа, с. 85, ключавая задача 2). Такім чынам, вышыні AM , BN і CK (або іх прадаўжэнні ў выпадку тупавугольнага трохвугольніка) перасякаюцца ў адным пункце. Што і трэба было даказаць.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 35.** Перанясіце рысунак 33 у сшытак. Правядзіце (управа) адрэзак BC , роўны і паралельны адрэзку AD . Растлумачце, чаму чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм. Знайдзіце прыбліжана перыметр паралелаграма $ABCD$, выразіце яго ў сантыметрах.

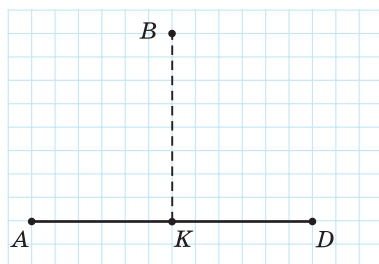


Рис. 33

- 36.** Выкарыстаўшы данныя на рысунках 34, а)–г), дакажыце, што $ABCD$ — паралелаграм.

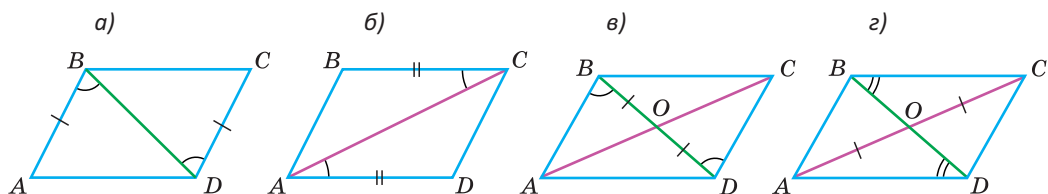


Рис. 34

- 37.** Выкарыстаўшы даныя на рысунках 35, а)–в), адкажыце на наступныя пытанні:

- Чаму на рысунку 35, а) $AD \parallel BC$?
- Чаму на рысунку 35, б) $\angle A = \angle C$?
- Чаму на рысунку 35, в) $\angle ADC + \angle DCB = 180^\circ$?

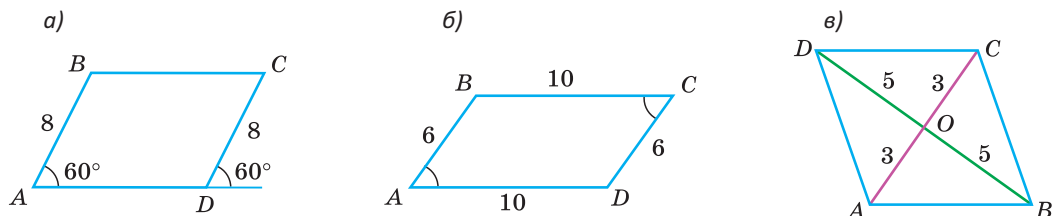
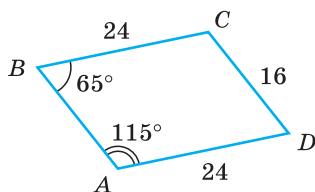
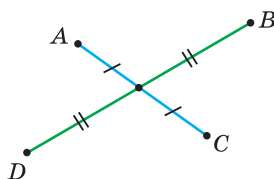


Рис. 35

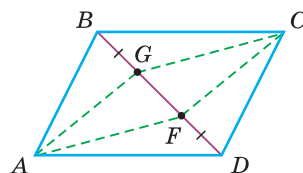
38. Па даных на рысунку 36 знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $ABCD$.
39. Адрэзкі AC і BD (рыс. 37) перасякаюцца ў іх сярэдзінах. Вядома, што $\angle DAB = 126^\circ$. Знайдзіце $\angle ADC$.
40. Дадзены паралелаграм $ABCD$ (рыс. 38). На яго дыяганалі BD адкладзены роўныя адрэзкі BG і DF . Дакажыце, што чатырохвугольнік $AGCF$ — паралелаграм.



Рыс. 36

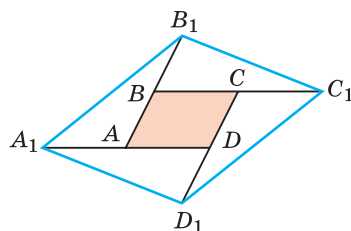


Рыс. 37

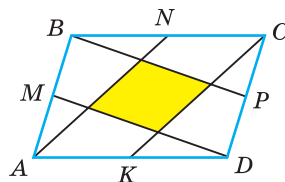


Рыс. 38

41. $ABCD$ — паралелаграм, K — сярэдзіна стараны AB , M — сярэдзіна стараны DC . Дакажыце, што:
- а) $AKMD$ — паралелаграм; б) $KBMD$ — паралелаграм.
42. $MNPK$ — чатырохвугольнік, $MN = PK$, $NP = MK$, $\angle M = 72^\circ$. Знайдзіце:
- а) градусныя меры вуглоў MKP і NPK ;
 б) вугал паміж бісектрысай вугла K і прамой NP .
43. У выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$ $AB = CD = 8$ см, $\angle ABD = \angle CDB$, дыяганалі перасякаюцца ў пункце O , $P_{ABO} = 20$ см, $P_{BOC} = 22$ см. Знайдзіце перыметр гэтага чатырохвугольніка.
44. Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніка процілеглыя вуглы роўныя, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.
45. Медыяну BM трохвугольніка ABC прадоўжылі за пункт M на адрэзак MD , роўны адрэзку BM . Дакажыце, што $ABCD$ — паралелаграм.
46. Чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 39), $BB_1 = AB$, $CC_1 = BC$, $DD_1 = CD$, $AA_1 = DA$. Дакажыце, што чатырохвугольнік $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграм.
47. Пункты M , N , P , K — сярэдзіны старон паралелаграма $ABCD$ (рыс. 40). Дакажыце, што зафарбаваны чатырохвугольнік — паралелаграм.



Рыс. 39



Рыс. 40

48. Пункты $P(-1; 1)$, $E(-3; 5)$, $K(4; 5)$ — вяршыні паралелаграма. Знайдзіце каардынаты чацвёртай вяршыні G . Разгледзьце ўсе варыянты.
49. Дадзены паралелаграм $ABCD$, $AB = 10$ см, $AD = 16$ см. Бісектрысы вуглоў A і B перасякаюцца ў пункце K , а бісектрысы вуглоў C і D — у пункце M . Пункты K і M ляжаць унутры паралелаграма. Знайдзіце даўжыню адрэзка MK .
50. Складзіце алгарытм пабудовы цыркулем і лінейкай паралелаграма $ABCD$:
- па двох дыяганалях і старане;
 - па двох дыяганалях і вышыні паралелаграма.
51. У трохвугольніку ABC вышыні BH і AF перасякаюцца ў пункце O . З пункта C да прамой AC у адну паўплоскасць з пунктам B узняты перпендыкуляр CK , роўны адрэзку BO . Дакажыце, што $BK \perp AB$.

Мадэляванне

Вядома, што калі выпуклы чатырохвугольнік разрэзаць па сярэдніх лініях (адрэзках, якія злучаюць сярэдзіны процілеглых старон чатырохвугольніка), то з атрыманых частак заўсёды можна скласці паралелаграм.

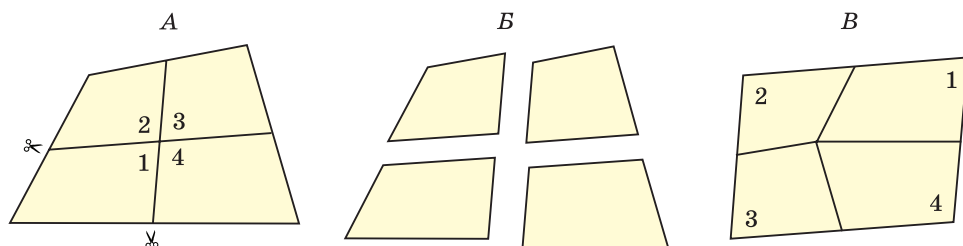
Заданні

1. Выражыце з ліста паперы адвольны выпуклы чатырохвугольнік. Адзначце пры дапамозе лінейкі сярэдзіны яго старон. Злучыце сярэдзіны процілеглых старон адрэзкамі (рыс. 41, А).

2. Разрэжце нажніцамі чатырохвугольнік па атрыманых сярэдніх лініях (рыс. 41, Б).

3. З атрыманых чатырох частак чатырохвугольніка складзіце паралелаграм (рыс. 41, В).

4. Дакажыце, што з аналагічных частак любога выпуклага чатырохвугольніка заўсёды можна скласці паралелаграм.



Рыс. 41



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне многавугольніка, выпуклага многавугольніка, дыяганалі многавугольніка.
2. Азначэнне паралелаграма, вышыні паралелаграма.
3. Уласцівасці паралелаграма.
4. Прыметы паралелаграма.

Умеем

1. Даказваць тэарэму аб суме вуглоў n -вугольніка.
2. Даказваць тэарэмы аб уласцівасцях і прыметах паралелаграма.

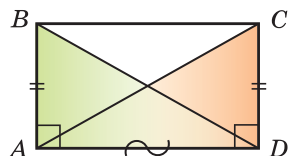
§ 4. Прамавугольнік

Азначэнне. Прамавугольнікам называецца паралелаграм, у якога ўсе вуглы прамыя.

Заўважым, што калі ў некаторага паралелаграма адзін вугал прамы, то і астатнія тры вуглы будуць прамымі, паколькі сума суседніх вуглоў паралелаграма роўна 180° . Такім чынам, *паралелаграм, у якога ёсць прамы вугал, з'яўляецца прамавугольнікам.*

Паколькі прамавугольнік — прыватны выпадак паралелаграма, то ён валодае ўсімі ўласцівасцямі паралелаграма. Аднак у прамавугольніка ёсць і адметная ўласцівасць. Сфармулюем гэту ўласцівасць у выглядзе тэарэмы.

Тэарэма (уласцівасць дыяганалей прамавугольніка).
Дыяганалі прамавугольніка роўныя.



Рыс. 42

Дадзена: $ABCD$ — прамавугольнік (рыс. 42).

Даказаць: $AC = BD$.

Доказ. Прамавугольныя трохвугольнікі ABD і DCA роўныя па двух катэтах: катэты AB і CD роўныя як процілеглыя стораны паралелаграма, катэт AD — агульны. Адсюль $AC = BD$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма (прымета прамавугольніка).

Калі ў паралелаграма дыяганалі роўныя, то гэта прамавугольнік.